TURING 图灵电子与电气工程丛书

PEARSON Prentice Hall

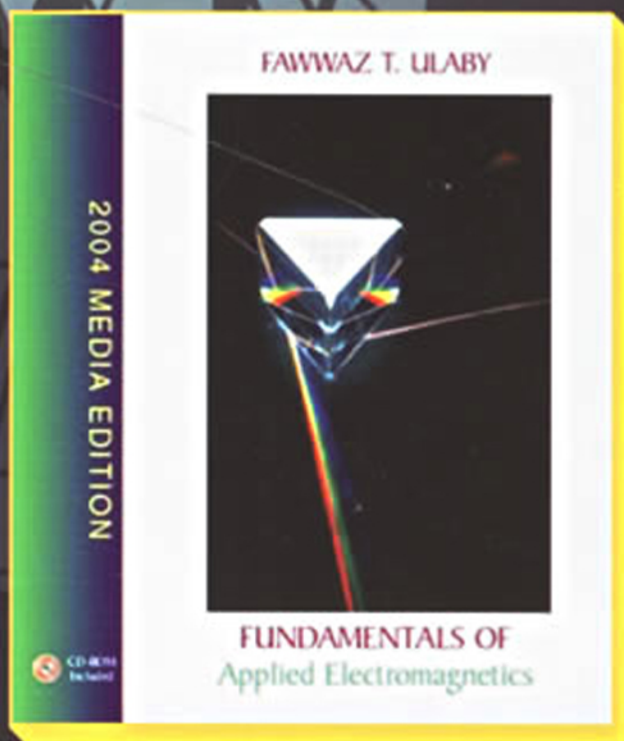
应用电磁学基础

（第4版）

Fundamentals of Applied Electromagnetics

(Fourth Edition)

Fawwaz T. Ulaby 著
尹华杰 译





附赠教学光盘



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵电子与电气工程丛书

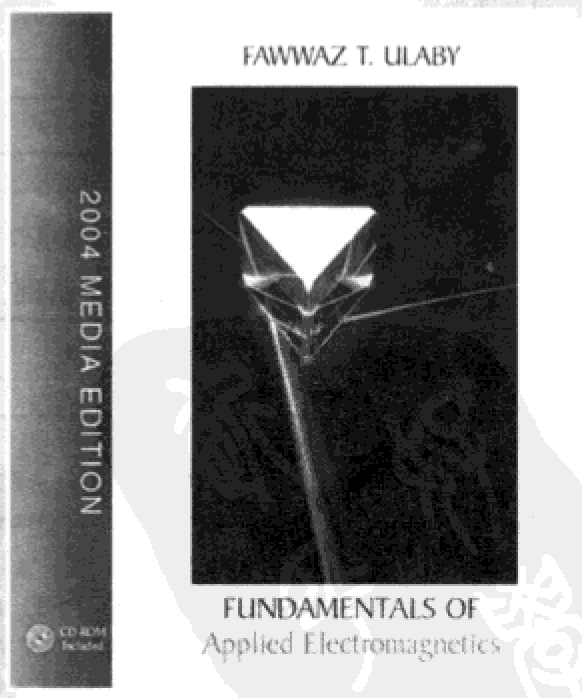
应用电磁学基础

（第4版）

Fundamentals of Applied Electromagnetics

(Fourth Edition)

Fawwaz T. Ulaby 著
尹华杰 译



人 民 邮 电 出 版 社
北 京

图书在版编目（CIP）数据

应用电磁学基础（第4版）/ 乌拉比著；尹华杰译．—北京：人民邮电出版社，2007.1
（图灵电子与电气工程丛书）

ISBN 978-7-115-15384-5

Ⅰ．应… Ⅱ．①乌…②尹… Ⅲ．电磁学 Ⅳ．0441

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第119858号

内 容 提 要

本书是作者多年教学成果的结晶，经多次改版修订，已被美国70余所高校用作电磁场教材。除不含波导和谐振腔内容外，本书涵盖了传统电磁场与电磁波教材的全部内容，并介绍了物理光学、光纤等内容及卫星通信、雷达等实例。

本书可作为高校电类专业电磁场（与电磁波）课程的本科教材（或双语教学的中文辅助教材），可分两学期或一学期授课。

图灵电子与电气工程丛书

应用电磁学基础（第4版）

◆ 著　　Fawwaz T.Ulaby
　译　　尹华杰
　责任编辑　舒　立

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市崇文区夕照寺街14号
　邮编　100061　　电子函件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　北京铭成印刷有限公司印刷
　新华书店总店北京发行所经销

◆ 开本：700×1000　1/16
　印张：28
　字数：613千字　　2007年1月第1版
　印数：1–5 000册　　2007年1月北京第1次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2006-3695号

ISBN 978-7-115-15384-5/TN・2878

定价：59.00元（附光盘）

读者服务热线：(010)88593802　印装质量热线：(010)67129223

基本物理常数

常　　数	符　　号	取　　值
真空光速	c	$2.998\times10^{8}\approx3\times10^{8}$ m/s
引力常数	G	6.67×10^{-11} N·m²/kg²
玻尔兹曼常数	K	1.38×10^{-23} J/K
基本电荷	e	1.60×10^{-19} C
自由空间介电常数	ε_0	$8.85\times10^{-12}\approx\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}$ F/m
自由空间磁导率	μ_0	$4\pi\times10^{-7}$ H/m
电子质量	m_e	9.11×10^{-31} kg
质子质量	m_p	1.67×10^{-27} kg
普朗克常数	h	6.63×10^{-34} J·s
自由空间本征阻抗	η_0	$376.7\approx120\pi\ \Omega$

基本国际单位

量　　纲	单　　位	符　　号
长度	米	m
质量	千克	kg
时间	秒	s
电流	安培	A
温度	开尔文	K
物质的量	摩尔	mol

表示放大、缩小倍数的词头

词　　头	符　　号	倍数（数量级）	词　　头	符　　号	倍数（数量级）
艾（exa）	E	10^{18}	毫（milli）	m	10^{-3}
拍（peta）	P	10^{15}	微（micro）	μ	10^{-6}
太（tera）	T	10^{12}	纳（nano）	n	10^{-9}
吉（giga）	G	10^{9}	皮（pico）	p	10^{-12}
兆（mega）	M	10^{6}	飞（femto）	f	10^{-15}
千（kilo）	k	10^{3}	阿（atto）	a	10^{-18}

一些有用的矢量恒等式

$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta_{AB}$　标量积(或点积)

$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{n}}AB\sin\theta_{AB}$　矢量积(或叉积)，其中$\hat{\boldsymbol{n}}$垂直于包含 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的平面

$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$

$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$

$\nabla(U+V)=\nabla U+\nabla V$

$\nabla(UV)=U\nabla V+V\nabla U$

$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\nabla\cdot\boldsymbol{B}$

$\nabla\cdot(U\boldsymbol{A})=U\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla U$

$\nabla\times(U\boldsymbol{A})=U\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla U\times\boldsymbol{A}$

$\nabla\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\times\boldsymbol{B}$

$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$

$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$

$\nabla\times\nabla V=0$

$$\nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$$

$$\int_v (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) dv = \oint_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s}$$ 散度定理（S 包围 v）

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{s} = \oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l}$$ 斯托克斯定理（S 由 C 界定）

梯度、散度、旋度及拉普拉斯运算

直角（笛卡尔）坐标系(x,y,z)

$$\nabla V = \hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \hat{\boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{\boldsymbol{y}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{\boldsymbol{z}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

柱坐标系(r,ϕ,z)

$$\nabla V = \hat{\boldsymbol{r}}\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{r}} & \hat{\boldsymbol{\phi}}r & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\phi & A_z \end{vmatrix} = \hat{\boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) + \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi) - \frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right]$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

球坐标系(R,θ,ϕ)

$$\nabla V = \hat{\boldsymbol{R}}\frac{\partial V}{\partial R} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2 A_R) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{R^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{R}} & \hat{\boldsymbol{\theta}}R & \hat{\boldsymbol{\phi}}R\sin\theta \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_R & RA_\theta & (R\sin\theta)A_\phi \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\boldsymbol{R}}\frac{1}{R\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\phi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right] + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{R}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_R}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial R}(RA_\phi)\right] + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial R}(RA_\theta) - \frac{\partial A_R}{\partial \theta}\right]$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

版 权 声 明



本书配套光盘

学生们常常抱怨，电磁学课程的主要内容既要求高深的数学基础，又相当抽象。由于电磁场的矢量特性，要定量理解电磁现象及其深层次的应用，向量代数是一个基本的工具，然而，要将矢量运算（如梯度、散度等）进行三维可视化处理却是十分困难的。学生们感觉“抽象”的根源在于，电场和磁场（$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$）都有幅值（强度）和方向两个特征，且每个特征都可以随 x、y、z 以及 t 变化，这样就可能同时存在多达 16 个的空间和时间量。幸运的是，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 是彼此耦合的，在人们感兴趣的绝大多数情况下，二者的空间变化模式是连续且常常对称的。尽管如此，电磁学课程的教师仍然面临一个挑战，即如何利用静态工具（如图片、图像）有效地向学生们讲授动态现象的机理。

本书第 3 版第一次引入交互式 CD-ROM，CD-ROM 的内容在第 4 版得到升级和扩充。该 CD-ROM 是作为本书的一个交互式自学材料，专门针对学生提出的一些问题而设计的。其内容包括了书中练习的解答、视频演示、图示、交互式练习，以及每章后面部分习题的解答。例如，同轴电缆中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$、导体上的电荷分布，导体表面的电流等随时间以及沿线长度的位置变化的视频演示，脉冲在传输线两端间来回反射的视频动画，行进中的波在交界处的反射和透射，电荷以及电流感应的电场 $\boldsymbol{E}$、磁场 $\boldsymbol{H}$ 的二维图示，此外还有大量牵涉矢量运算的练习。尽管模块与演示总共有 162 个，但并未覆盖本书的全部主题，而是集中在 25 个学生感觉有困难的主题上。本 CD-ROM 包含以下 5 类材料：

（1）书中有 112 道练习，每道练习题都附有简略答案。如果学生想知道自己的解答是否正确，可以通过浏览 CD-ROM 中名为“Exercises(E)”的菜单查找相应习题的详细解答。

（2）第 16 页的式（1.27）描述了正弦波的频率、波长以及速度之间的关系。紧邻式（1.27）有一个光盘符号以及一个标记 **M1.1-1.3**。这些符号引导读者到光盘的交互式模块（M）1.1-1.3，即正弦行波的图示，其中会提示使用者填写有关波的波长与频率问题的答案。如果读者输入了错误的答案，程序将给出错误提示，而如果读者选择“help”按钮，则程序将给出正确解答。CD-ROM 中共有 77 个这类模块，它们采用视频动画和/或练习，以帮助学生更好地理解电磁学的概念和应用。

（3）CD-ROM 中包含 85 个演示（D）练习，它们通过绘制场的空间分布图或特定量的时间变化图，来向学生讲授电磁场的动态特性以及关键参数的作用。书中每个演示都用符号 D 来标记，例如 **D6.1**。

（4）在 CD-ROM 的“Solved Problems（P）”部分，包含了 90 个习题的完整解答。其中 45 道选自每章后的习题，该类习题的题号前有光盘符号。另外的

45 道习题是在本版中新增的，相应的题目和完整答案都可以在 CD-ROM 中找到。

（5）提供了书中的全部图片，以便教师们用电子手段显示这些图片。

致学生

本书配套的交互式 CD-ROM 是以学生为本而开发的。一定要结合书本的相关材料，花费一定的时间来使用本光盘。电子显示的多窗体特点，使得设计具有“help”按钮的交互式模块成为可能，这种模块可以在学生需要的时候，给出习题的完整解答。视频动画可以演示，场和波是怎么随时间、空间传播的，天线阵的电波是怎么实现电子扫描的，以及在变化的磁场下电路中是如何感应出电流的，等等。本 CD-ROM 是一个自学的好材料。

致教师

本 CD-ROM 中的演示，对于讲解许多电磁学概念特别有用，当课时、教室空间条件受限时尤其如此。测验 D8.3 就是一个很好的例子，试试它就会知道我所言非虚。你会发现用该模块向学生解释行波、驻波的概念是多么容易。它可以简单清楚地说明，在两种不同媒介的交界处，边界条件是如何满足的；驻波比又意味着什么，等等。视频板书在学生中产生了良好的反响，收到了许多询问。我希望大家（尤其是有大屏幕投影的教师）也充分利用这些演示材料。我要借此机会，感谢 Leland Pierce 以及 Janice Richards 在 CD-ROM 开发上的技术协助，感谢 Prentice Hall 公司的编辑 Tom Robbins 对于本项目的鼓励和热情支持。

FAWWAZ T. ULABY
密歇根州，安阿伯



译 者 序

从1999年到2000年，译者在美国伊利诺伊大学（UIUC）电磁计算中心（CCEM）做了一年的访问学者。其间，除了每天呆在UIUC的图书馆或CCEM的计算机旁之外，就是参加CCEM每周一次的文献综述会，参加金建铭（Jianming Jin）教授每周一次的小组汇报会，参加电气与计算机工程系（ECE）下午常有的来自全美各地高校著名专家的讲座，以及旁听ECE从本科生到研究生的部分专业课程，再就是与住在同一个出租屋中来自不同国家和地区的侍者、本科生以及博士生们聊天。一年的访问生活，给译者印象最深刻的就是：电磁场是枯燥的，然而却是重要的；工程电磁学是难啃的，然而却难不倒不怕麻烦的、有耐心的人。

在UIUC期间，先后与译者住在同一个出租屋的人很多，其中就有两位是ECE的本科生。尽管他们所学的方向跟电磁场关系不大，但都必须学习电磁学这门课程。当他们知道译者是CCEM的访问副教授时，都十分客气，其中一个从日本退伍回来的学生，还特意拿出他学习电磁学时所用的16开本大、足足有6cm厚的电磁学教材给译者看。他们的电磁学教材印刷精美，图文并茂，文字叙述简单易懂，虽说是大部头，但学生们学起来却似乎并不怎么吃力。当然，这样的大部头并不是每个学生都必须学完，电磁学作为必修课，一般的学生只需要学完其中的基础内容，并对电磁学应用方面的一些最新进展与成果有所了解即可。除了基础性的入门课程，UIUC的ECE还开设有一些电磁场的高级课程，供本科生和研究生选修。译者也去旁听了周文昌（Weng Cho Chew）教授开设的“Waves and fields in inhomogeneous media”。这是研究生课程，听课的主要是CCEM的博士研究生，然而也不乏本科生选修（在UIUC，本科生选修研究生课程，研究生补修本科生课程，都计算学分）。反观国内高校近10年来的情况，却大有反其道而行之的趋势：国内许多高校（甚至重点大学）的电气工程系，已经不再把电磁场作为必修的基础课程了。将抽象难懂的电磁学（场）降格为选修课程，无异于取消这门课程。这与电磁学（场）在现代科技、工业以及日常生活中的重要作用是根本不相符的。

在国内如何教好电磁学（场），如何提高电磁学（场）课程的地位，不仅仅是一个认识问题，更是一个技术问题。要使抽象难懂的电磁学（场）变得浅显易懂，使学生们乐于学、老师们乐于教、教学之后师生们都有所得，就必须要有好的教材，好的教学手段。

由于种种原因，目前国内许多高校的（专业）基础课都存在舍弃传统的统编教材而采用自编教材、各搞一套的做法。对于教学经验丰富、高水平的教师，这种做法可能有助于教材的更新和提高，但就大多数情况来讲，这样做只会造成大量的浪费、低水平的重复，降低教材质量和教学效果。好教材的作者，不仅应该有丰富的教学经验、高强的学术水平，更应该具有不厌其烦地对教材进行反复修订的耐心和

精力。本书的作者，美国密歇根大学的 F. T. Ulaby 教授，就是这样一位作者。

Ulaby 教授作为密歇根大学负责科研的副校长、美国工程院院士、IEEE Fellow，不仅在工程电磁学的研究中取得了很大的成就，在教学方面，他自 1968 年开始电磁学教学，迄今已近 40 年，经验十分丰富。本书作为 Ulaby 教授的得力之作，自 1997 初版以来，每经过 2～3 年，就进行一次修订改版。从最初的普通版，到 2001 年第 3 版时的多媒体版，再到 2004 年的第 4 版多媒体扩展版，每次的修订，Ulaby 教授都不厌其烦地想办法提高教材的多媒体交互性和易自学性。到目前为止，本书已经被美国 70 余所大学的电气工程系采用为教材，在美国以外，例如我国的台湾地区和香港特别行政区，也有部分高校采用本书的全部或部分章节作为教材。

本书之所以能够成为一本广泛使用的好教材，还得益于其融汇了近年来蓬勃发展的多媒体技术。其配套的多媒体光盘，对电磁学一些抽象难懂的原理，进行了交互式的解说；对部分练习和习题，也给出了交互式的解答。

本书 2001 年第 3 版曾在国内影印出版。但基于国内大学的大规模扩招、教学改革大幅度压缩学时的背景，以及电磁学晦涩难懂的事实，译者认为目前在国内直接采用优秀的电磁学原版教材进行教学，教学效果难以保证。基于这种考虑，恰逢人民邮电出版社图灵文化发展有限公司的盛情邀请，所以译者接受了本书的中译本翻译工作。

在国外是优秀的教材，翻译以后就未必是优秀教材了。为了使本书在翻译以后，仍然是一本好教材，译者花了半年多的时间，对全书进行了精心翻译。为了使译文符合中文习惯，有时一个句子的翻译就要花去译者好半天的时间。对于有些术语，内地的译法就不统一，台湾地区也有它的译法。对于这些情况，译者尽量权衡考虑，进行取舍。此外，为了同国际接轨，在专业术语首次出现时，该中文版尽量采用中、英文对照，以利于双语教学及国际交流。

本书的翻译、录入、校订等工作，是在许多人士的共同努力下完成的。王莲女士，廖祥君、肖毅雄、梁剧文、朱会龙先生等承担了大部分的录入工作；研究生胡君、黄志、超明、张治涛、郭建龙、王向臣、林炯康、王世闻、曹少泳、李金安、刘增磊、肖如晶、周艳青、韦立学、罗永吉等对译稿进行了试读，对部分译文提出了很好的修改意见，并承担了其他一些相关的工作。藉此机会，译者对他们不可或缺的工作表示衷心感谢。

译者才疏学浅，译词失当、疏漏之处在所难免，敬请读者不吝指正。

尹华杰　于广州华南理工大学
2006 年 7 月 1 日

前　　言

为什么要再写一本电磁学的教材？

对于主修电气工程的学生来讲，目前可选的电磁学教材已经有好多本了。为什么还要再写一本呢？答案很简单：(1) 电气工程本科教学大纲正经历着结构和内容两个方面的巨大变革，这种变革的剧烈程度，超出了过去几十年课程变革的总和；(2) 已有教材不符合21世纪新教学大纲的思路（参见S. W. Director等人于1995年9月发表在*Proceedings of the IEEE*上的文章）。

变革中的教学大纲

（美国）电气工程的本科专业，教学大纲约每10年经历一次大的变革。在20世纪60年代，和半导体器件相关的课程大量引入，而和真空管电子学相关的课程则慢慢过时。在20世纪70年代，同电机学相关的课程慢慢从大多数大学的课程表中消失，取而代之的是计算机编程的有关课程。在20世纪80年代，有更多关于计算机以及数字处理的课程加入，这主要是通过增加必修课的数目，减少专业选修课以及自由选修课的数目来实现的。与此同时，人们也在持续努力，使本科教学大纲增加新知识，吸收迅速发展的技术领域。课程中加入的材料越多，期望学生投入的精力也就越多，选修课的学时数目迅速下降到零。到了20世纪90年代前期，美国大学平均每个学生要花接近5年的时间，才能完成原本设计为4年制的教学计划。

以上情况不限于电气工程，事实上，几乎所有工程学科，其教学计划都需要太长的时间来取得学士学位，都太缺少灵活性而难以适应变革。在上述重重压力之下，产生了遵从下述原则的新观念：(1) 学士学位的学制应该恢复到4年；(2) 学士课程的必修部分应该集中在基础的教学上，但同时要让学生大量接触工程应用；(3) 选修课部分应该显著增加，让学生在感兴趣的工程、非工程领域进行探索。大多数工程院校至少在原则上采纳了这种新的思路，这样一来，修订教学计划（尤其是在课程的层面上）就成了一个重大挑战。新的电气工程教学大纲要求在许多传统的核心课程上减少教学学时，其中就包括电磁学。在许多大学，电磁学的必修内容从两门课程减到了一门。有些学校则仍然提供两门课程的电磁学，但只有第一门是必修的核心课程，第二门则提供给感兴趣的学生，以加深他们的电磁学知识。

课程内容

基于以上目的及相关的条件限制，一学期或两门课程的电磁学到底应该包含哪些内容呢？什么样的课本才能满足这一目的呢？为了回答这一问题，我们有必要简要回顾一下过去20年里一直使用的传统方法。大多数电磁学课本采用类似的模板，

即用一到数章介绍矢量微积分及坐标系，接下来用两章或多章介绍静态场（静电学和静磁学）。这些内容通常占了全部材料的一半，另外一半再覆盖动态场（时变场、波的传播和反射、波导及谐振腔、天线等）。这种配置存在两个问题。首先，从大量的数学内容开始一门课程，往往容易打击学生的学习热情；其次，尽管静电学、静磁学本身十分有趣且应用广泛，但相比时变场在通信系统、雷达、光学、计算机以及固态电子学等领域的应用，则黯然失色了。所以，在本科课程计划的必修课程中，仅仅讲授静态场，将导致电气工程的学生严重缺乏处理大多数电磁现象的能力。

由于把着重点放在矢量微积分的数学运算上，以及相对比较枯燥的静电学、静磁学上，一个完成了电磁学必修课程的学生接下来就不大可能选修电磁学的高级课程，而该高级课程的许多内容正是与工程应用相关的。显然，按传统顺序讲授的教材，已经不合适21世纪的新教学大纲了。

在过去的一些年里，许多大学的教师已经进行了努力，尝试在没有教静态场的情况下讲授动态电磁学。这些尝试不是很成功，主要是因为在动态电磁学中，学生们必须同时处理好几个基本参数。这主要包括，用空间坐标表示的位置，用矢量表示的方向、时间，以及电场和磁场间的相互联系。而在静态电磁学中，电场和磁场是互相独立的，没有时间变量，因此参数的总数目由4个降低到2个。先学习静电学和静磁学，学生更容易学习时变场的内容。

推荐的教学安排

	两学期安排 6学分（每学期42面授学时）		一学期安排 4学分（56面授学时）	
章	节	学时	节	学时
1 简介	全部	4	全部	4
2 传输线	全部	12	2.1到2.8，2.11	8
3 矢量分析	全部	8	全部	8
4 静电学	全部	8	4.1到4.10	6
5 静磁学	全部	7	5.1到5.5，5.7，5.8	5
考试	第一学期总学时	3 42		2
6 麦克斯韦方程组	全部	6	6.1到6.3，6.6	3
7 平面波	全部	7	7.1到7.4，7.6	6
8 波的反射与透射	全部	9	8.1到8.3，8.6	7
9 辐射与天线	全部	10	9.1到9.6	6
10 卫星通信系统及雷达传感器	全部	5	无	-
考试		3	1	
	第二学期总学时	40	总学时	56
其他学时	2	0		

本书的特色

了解以上背景之后，如何才能设计出一本适合一个学期或者分两门课程用的电磁学教材呢？我对这个问题的回答体现在本书的下列特色中：

(1) 我想在三年级电气工程学生已经熟悉的知识和电磁学材料之间架设一个桥梁。在上电磁学课程前，学生通常已经学了两门或更多的电路课程。因此，他（她）对电路分析、欧姆定律、基尔霍夫（Kirchhoff）电流电压定律，以及相关内容应该是很熟悉的。传输线构成了电路到电磁学间的一个自然桥梁。无需用到矢量或场，仅仅应用学生已经熟悉的概念，就可以学习波动、功率的反射和透射、相量、阻抗匹配，以及波在导波结构中传播的许多其他性质。所有这些新学的概念，将在后续的学习中（从第7章到第9章）起到重要的作用，并使得平面波在真空以及媒介中传播等相关内容的学习容易许多。传输线的内容放在第2章，第1章则回顾复数、相量分析的相关知识。

(2) 本书第3章到第5章为第二部分，覆盖矢量分析、静电学、静磁学等内容。与大多数本科电磁学教材相比，本书以两种完全不同于传统的方法来编写这三部分内容。首先，本书仅用约30%的篇幅来讲授这三块内容，而传统教材往往使用50%甚至更多的篇幅。其次，本书静电学一章以时变的麦克斯韦方程组开始，经特殊化处理而得到静电学、静磁学的方程，这就给学生提供了一个整体框架，使之明白，接下来将学什么内容，静电学、静磁学为什么是更一般的时变场的特例。

(3) 不同于大多数的电磁学教材，本书去掉了波导与谐振腔的内容。这既是基于篇幅的考虑，也是因为目前波导不再如20世纪80年代之前那样广泛使用了。

(4) 第6章处理时变场，并为第7章到第9章的内容打下基础。第7章讲述平面波在电介质以及导电媒介中的传播，第8章则包含波在不连续边界的反射与传输，并为学生讲述了光纤、镜子和透镜成像等内容。

第9章介绍辐射的基本原理。包括导线流过电流时的辐射，如偶极子辐射；孔径辐射，如喇叭天线、光照下的遮挡屏上的开口等的辐射。

(5) 为了让学生看到电磁学在当今技术社会中的广泛应用，第10章介绍两个系统实例：卫星通信系统和雷达传感器，以此结束全书。

(6) 尽管本书的材料是为连续两学期6学分设计的，但也可以节选大部分内容，制定一个单学期4学分的教学安排。前表列出了这两种教学方案。

在本书的撰写过程中，我尽力避免冗长的公式推导，尤其是那些牵涉大量矢量微积分运算的情况。我的目标是帮助学生培养出应用矢量微积分解决实际电磁问题的能力。我把矢量微积分及数学看成有用的工具，它们本身并不是目的。贯穿这些材料始终的重点在于，用数学去解释和阐述物理本质，紧接其后的是实例，以展示工程相关的物理概念。我相信，本书材料的组织方法、全书内容的合理编排，以及将重点偏向动态场的做法，这三个方面结合在一起，必将形成一个有效的机制，使得我们未来的毕业生们具备应有的应用电磁学基础。

致谢

在本书的撰写过程中，我很幸运地得到了许多杰出人士的得力帮助。首先，我要衷心感谢 Roger DeRoo、Richard Carnes 以及 Jim Ryan。Roger DeRoo 使我受益匪浅，他不仅同我进行了大量的讨论，以探求既能最佳地表述电磁学概念与应用，又

不会迷失在数学推导中的方法，他还不辞辛苦多次审阅了我的手稿。Richard Carnes无疑是我工作中遇到过的最好的专业打字员，因为他对LaTeX的精通，以及他对待细节的态度，才使得本书材料组织成清楚、连贯的形式。Jim Ryan完成了本书的美工，他娴熟地把我的草图转换成了专业而又悦目的图形。

感谢密歇根大学辐射实验室同事们的建议和支持，其中要特别提到Linda Katehi、Chen-To Tai以及Kamal Sarabandi，感谢他们慷慨的建言以及不断的鼓励。也要感谢我的学生们，他们在两学期中毫无怨言地使用讲义形式的教材，并给我提出了许多改进的建议。此外，要感谢Bryan Hauck、Yanni Kouskoulas以及Paul Siqueira等研究生，他们阅读了手稿的部分或全部章节，并在习题答案方面提供了帮助。

感谢审稿者们的意见和建议。他们是Arizona州立大学的Constantine Balanis，Alabama大学的Harold Mott，Massachusetts大学的David Pozar，Bradley大学的S. N. Prasad，New Mexico工学院的Robert Bond，Colorado大学（Colorado Springs校区）的Mark Robinson，以及Illinois大学的Raj Mittra。感谢Prentice Hall公司的员工们的辛勤工作，在本书出版的漫长过程中，是他们监护着本书的顺利出版。感谢Ralph Pescatore，是他对本书进行了校对排版。

FAWWAZ T. ULABY
密歇根州，安阿伯



目　录

第 1 章　导论：波与相量

1.1　概述

本书的主题是应用电磁学，学习内容包括静态、动态条件下的电磁现象及其工程应用。由于微波及光通信、雷达系统、生物电磁学、高速微电子学等许多工程学科中的实际问题与时变电磁场的关系，要比与静态场的关系密切得多，因此本书的着重点放在时变电磁场（动态场）的基本特性上。将要学习的内容有波在同轴电缆、光纤等导波媒介中的传播，波在不同媒介交界面上的反射与透射，镜子与透镜的成像特性，天线的辐射以及其他一些相关的主题。最后一章将通过分析雷达传感器和卫星通信系统在使用、运行等方面对设计提出的要求，展示应用电磁学的一些方面。

我们举例说明，考虑图 1-1 所示的通信网络。其中的卫星模块采用了多束（multiple-beam）天线，以便同时与多个地面站通信。从地面站 1 收到的信号频率为 f_1 = 6GHz[1]，经放大并降频到 f_2 = 4GHz 后，再传输到地面站 2。频率转换由微波半导体设备混频器（mixer）实现。当卫星上的振荡频率为 f_0时，混频器将输入到端口 M_1 的频率 f_1转换为端口 M_2的频率 $f_2 = f_1 - f_0$。本例中 f_0 = 2GHz。上行与下行链路采用不同的信号频率，可以避免相互干扰。连到卫星天线的环行器（circulator）使得天线既可以接收也可以发送信号。环行器既可以将端口 C_1 接收到的信号经端口 C_2连接到接收器，又可以把来自端口 C_3的信号经端口 C_1连接到天线进行发射。在图 1-1 的配置中，尽管接收、发射使用了两个不同的天线束，在实际中，这两个束都具有发送和接收的功能。

地面站 1 通过多种传输线，包括同轴电缆、光纤等，连接到多个终端。这些传输线上所载的信息包括电话通信的语音、电视的图像和语音以及数据信号等。其中的一个终端连接到地面微波链路。

为了帮助读者理解电磁学的基本物理定律，并开阔电磁学实际应用的视野，本书将分析上述通信网络的多个主题，包括波在同轴电缆中的传输、光纤的原理、波在天线之间的自由空间中的传播以及天线的设计等等。

本章先介绍单位制及全书使用的符号，然后介绍电磁学中的基本电场量和磁场量，以及这些量之间、这些量同电荷（电流）之间的相互关系，再介绍描述材料电磁特性的基本参数。同这些关系相对应的所有定律，构成了电磁现象研究的基础。为了给第 2 章打基础，本章还简单回顾了行波、复数及相量分析等三方面的内容。尽管读者都多多少少在电路或其他工程学科中对这三方面的知识有所接触，但简短地回顾行波的特性及简洁的相量表示法，对于解决时谐问题仍然很有帮助。

1. 1GHz = 10^9 Hz。

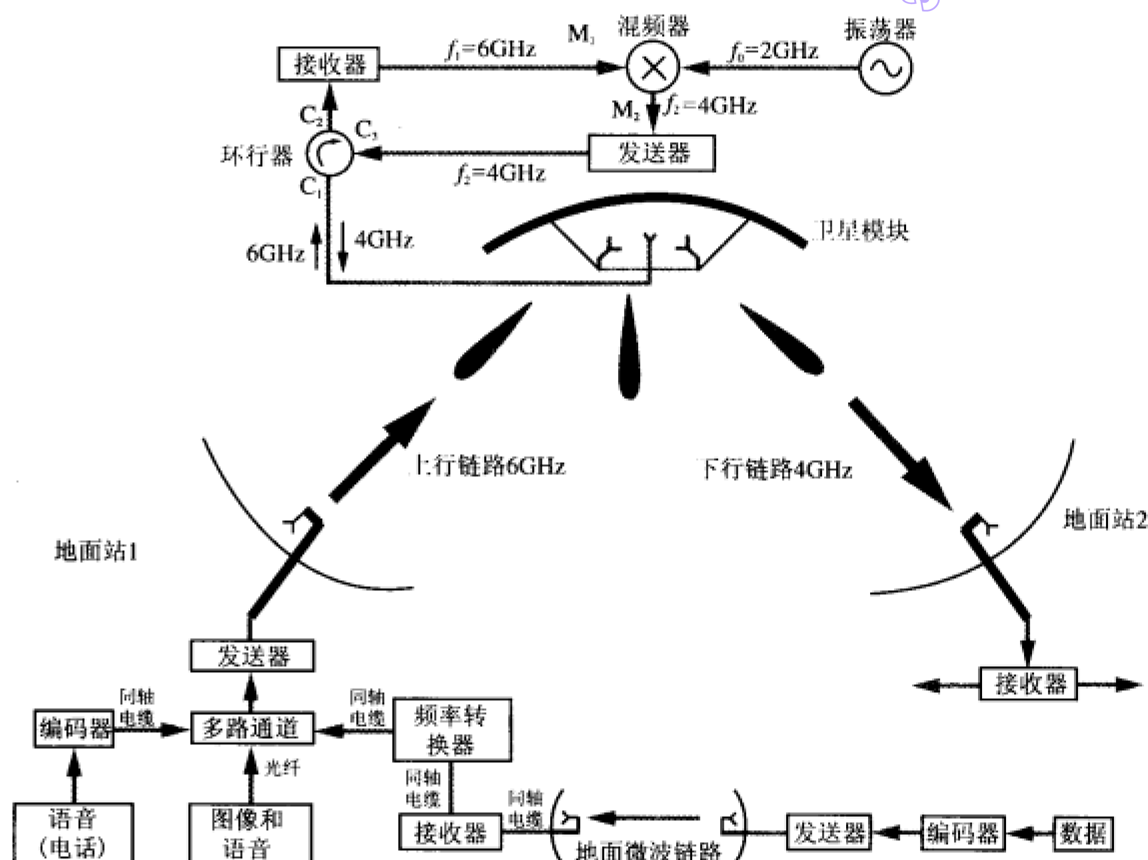


图 1-1　微波通信网络

1.2　量纲、单位制及符号

国际单位制（International System of Units）是现代科技文献中用以表示物理量单位的标准系统，简称 SI（源自法语的 Système Internationale）。长度是一个量纲（dimension），其单位（unit）为米，它是相对一个参考标准定义的。国际单位制以表1-1所列的6个基本量纲的单位为基础，其他所有量纲的单位都是派生的，因为它们都基于上述6个单位，并可以用它们来表示。附录 A 列出了本书所用的物理量及其符号和单位。

表 1-1　SI 的基本单位

量　纲	单　位	符　号
长度	米	m
质量	千克	kg
时间	秒	s
电流	安培	A
温度	开尔文	K
物质的量	摩尔	mol

对于大小在 10^{-18} ~ 10^{18}之间的物理量，使用比例为 10^3的一组词头，来放大或缩小其原始单位。表 1-2 列出了这些词头，它们都来自于希腊语、拉丁语、西班牙语或丹麦语。例如，5×10^{-9}m 的长度，就可以写成 5nm。

表 1-2 单位放大与缩小的词头

词头	符号	倍数
艾（exa）	E	10^{18}
拍（peta）	P	10^{15}
太（tera）	T	10^{12}
吉（giga）	G	10^{9}
兆（mega）	M	10^{6}
千（kilo）	k	10^{3}
毫（milli）	m	10^{-3}
微（micro）	μ	10^{-6}
纳（nano）	n	10^{-9}
皮（pico）	p	10^{-12}
飞（femto）	f	10^{-15}
阿（atto）	a	10^{-18}

在电磁学中，要涉及标量和矢量。本书使用斜体符号（而不是希腊字母）表示标量，例如用 R 表示电阻，而使用斜黑体符号表示矢量，例如用 $\boldsymbol{E}$ 表示电场矢量。矢量包含幅值（标量）和方向，方向通常用单位矢量表示。例如，

$$\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{x}}E, \tag{1.1}$$

其中，E 是 $\boldsymbol{E}$ 的幅值，$\hat{\boldsymbol{x}}$ 则为 $\boldsymbol{E}$ 的方向。单位矢量采用斜黑体，并在顶部加上符号“^”。

本书所有正弦时变的电磁问题，都广泛采用*相量表示*。在字符的顶部加上波浪号“~”，就表示相量。因此，$\widetilde{\boldsymbol{E}}$ 是对应瞬态电场矢量 $\boldsymbol{E}(t)$ 的电场矢量。1.7 节对这种标记方式进行了更详细的讨论。

1.3 电磁特性

宇宙中有四种基本力：

- *核力*（nuclear force），又称强相互作用力，它是四种力中最强的，但只存在于*亚微观*（submicroscopic）系统的范围，如原子核中。
- *弱相互作用力*（weak-interaction force），其强度仅为核力的 10^{-14}。其主要作用是参与某些放射性元素粒子间的相互作用。
- *电磁力*（electromagnetic force），它存在于所有带电粒子之间，是在原子、分子等微观系统中起主导作用的力，强度约为核力的 10^{-2}数量级。
- *引力*（gravitational force），是四种力中最弱的，约为核力的 10^{-41}数量级。然而，它是太阳系等宏观系统中起主导作用的力。

本书的兴趣仅限于电磁力及电磁力作用的结果。尽管电磁力在原子的尺度中起作用，其影响却能以电磁波的形式，在自由空间以及材料中传播，向外界发射。本

节的目的在于回顾电磁学的基本框架，即描绘静止电荷引起的电场、运动电荷引起的磁场的一系列基本定律，电场、磁场间的相互关系以及这些场如何同物质发生作用等。然而，这里我们要先讲讲引力的一些特性，因为它们与磁场力的特性类似。

1.3.1　从引力场开始

根据牛顿引力定律，在图1-2中相距R_{12}的两个质量m_1、m_2，由m_1作用在m_2上的引力$\boldsymbol{F}_{g_{21}}$为

$$\boldsymbol{F}_{g_{21}} = -\hat{\boldsymbol{R}}_{12}\frac{Gm_1m_2}{R_{12}^2}\quad(\mathrm{N}),\tag{1.2}$$

其中，G为引力常数，$\hat{\boldsymbol{R}}_{12}$为从$m_1$指向$m_2$的单位矢量，力的单位为牛顿（N）。式（1.2）中的负号表示引力是互相吸引的。因此，$\boldsymbol{F}_{g_{12}} = -\boldsymbol{F}_{g_{21}}$，其中$\boldsymbol{F}_{g_{12}}$表示质量$m_2$吸引$m_1$的力。请注意在$\boldsymbol{F}_g$的下标中，第一个下标表示受力的质量，第二个则表示力的来源。

引力的超距作用是指两个物体无需直接接触，就可以受到彼此的作用力。这种超距作用现象引出了场（field）的概念。质量为m_1的物体，产生引力场$\boldsymbol{\psi}_1$（见图1-3），该场并非真实地从该物体发出，但其影响却真实地存在于空间的每一点，如果存在另外一个质量为m_2的物体，到m_1的距离为R_{12}，那么m_2将受到力的作用，其大小由式（1.2）确定。在离开m_1距离为R的地方，场$\boldsymbol{\psi}_1$为一个矢量，定义如下

6

$$\boldsymbol{\psi}_1 = -\hat{\boldsymbol{R}}\frac{Gm_1}{R^2}\quad(\mathrm{N/kg}),\tag{1.3}$$

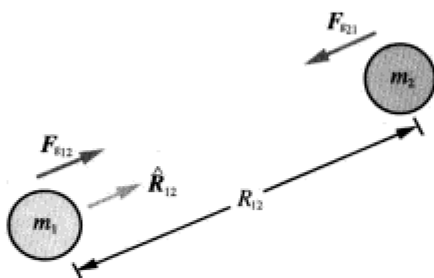


图1-2　两个质量之间的引力

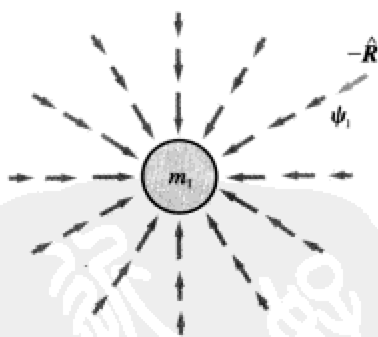


图1-3　质量m_1引起的引力场$\boldsymbol{\psi}_1$

其中，$\hat{\boldsymbol{R}}$是由m_1向外的径向单位矢量，$-\hat{\boldsymbol{R}}$则指向m_1。对于$R=R_{12}$处、质量为m_2的物体，受到场$\boldsymbol{\psi}_1$的作用力沿着$\hat{\boldsymbol{R}}=\hat{\boldsymbol{R}}_{12}$的方向，大小为

$$\boldsymbol{F}_{g_{21}} = \boldsymbol{\psi}_1 m_2 = -\hat{\boldsymbol{R}}_{12}\frac{Gm_1m_2}{R_{12}^2}\tag{1.4}$$

用以下方法，可以将场的概念一般化：在空间任意一点，放置测试质量m，把测试质量所受的引力$\boldsymbol{F}_g$同测试质量m的比值定义为该点的引力场$\boldsymbol{\psi}$，即

$$\boldsymbol{\psi} = \frac{\boldsymbol{F}_g}{m}\tag{1.5}$$

其中，力$\boldsymbol{F}_g$可以是单个质量作用的结果，也可以是大量质量分布作用的结果。

1.3.2 电场

电磁力包括电场力 $\boldsymbol{F}_{e}$ 和磁场力 $\boldsymbol{F}_{m}$。撇开场源不谈，电场力 $\boldsymbol{F}_{e}$ 同引力是相似的，但两者具有一个主要区别。引力场的场源是质量，电场的场源则是电荷；两种场都与到场源的距离平方成反比；电荷具有正负极性，而质量则无正负之分。

从原子物理知道，所有物质都由中子、带正电的质子以及带负电的电子组成。电荷的基本量是一个电子的电量，通常用 e 表示。测量电荷的单位用库仑（C），以 18 世纪法国科学家 Charles Augustin de Coulomb(1736—1806)的名字命名。e 的大小为

$$e=1.6\times10^{-19}\quad(\mathrm{C})\tag{1.6}$$

单个电子的电荷为 $q_{e}=-e$，质子的电量同电子相同，只是极性相反，$q_{p}=e$。库仑的实验表明：

（1）极性相同的电荷互相排斥，极性相反的电荷互相吸引；

（2）电荷的作用力位于电荷的连线上；

（3）作用力同两电荷量的乘积成正比，同距离的平方成反比。

以上特性就是库仑定律，其数学表述为

$$\boldsymbol{F}_{e_{21}}=\hat{\boldsymbol{R}}_{12}\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0R_{12}^2}\quad(\mathrm{N})\quad(\text{在真空中}),\tag{1.7}$$

其中，$\boldsymbol{F}_{e_{21}}$ 为电荷 q_1 作用在电荷 q_2 上的力，R_{12} 为两电荷间的距离，$\hat{\boldsymbol{R}}_{12}$ 是由电荷 q_1 指向 q_2 的单位矢量（见图 1-4），而 ε_0 则是恒值，称为自由空间的介电常数（electrical permittivity），$\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}$F/m。这两个电荷应该是位于自由空间（真空），且同其他任何电荷隔离。电荷 q_2 作用在电荷 q_1 上的力 $\boldsymbol{F}_{e_{12}}$ 大小等于 $\boldsymbol{F}_{e_{21}}$，但方向相反，因此 $\boldsymbol{F}_{e_{12}}=-\boldsymbol{F}_{e_{21}}$。

式（1.7）所给的电荷力表达式与式（1.2）所给的引力表达式类似，对这种类似性做进一步的扩展，可定义电荷 q 产生的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 如下：

$$\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{R}}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R^2}\quad(\mathrm{V/m})\quad(\text{在真空中}),\tag{1.8}$$

其中，R 为电荷与观测点间的距离，$\hat{\boldsymbol{R}}$ 是由电荷向外的径向单位矢量。图 1-5 绘出了正电荷的电力线。利用后续章节，可以很容易得到 $\boldsymbol{E}$ 的单位是伏每米（V/m）。

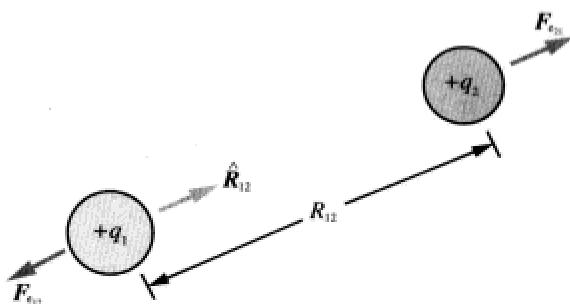


图 1-4 自由空间中两正电荷间的电荷力

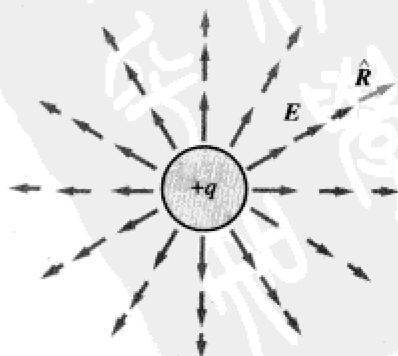


图 1-5 电荷 q 的电场 $\boldsymbol{E}$

电荷具有两个重要特性。首先是电荷守恒定律，即（净）电荷既不会产生，也不会消灭。如果在某体积中有 n_p 个质子和 n_e 个电子，则总的电荷为

$$q = n_p e - n_e e = (n_p - n_e)e \quad (\mathrm{C}) \tag{1.9}$$

即使其中某些质子与同样数量的电子结合，形成了中子或其他基本粒子，净电荷 q 仍保持不变。事实上，原子核中的质子与核外电子的行为要遵从量子力学的有关定律，是不会结合的。

另外一个重要特性是线性叠加原理（principle of linear superposition），即由一系列电荷在空间某点产生的总电场，等于其中每个电荷在该点产生电场的矢量和。这个看似简单的概念，大大方便了电荷复杂分布情况下电场的计算，无需关心单个电荷在其余电荷的场中所受的力，即可得到电场。

式（1.8）给出了单个电荷在真空中引起的电场。如果将正电荷放在原子构成的材料中，会有什么情况发生呢？在未放这个正电荷时，材料是电中性的，每个原子都由带正电荷的原子核以及围绕在核外、带等量负电荷的电子云构成。因此，在材料中未被原子占住的任何地方，电场 $\boldsymbol{E}$ 为零。在放入点电荷之后，原子将受力并发生变形，如图1-6所示。电子云的对称中心将偏离原子核，原子的一端正电荷较多，另外一端负电荷较多。这种极性化的原子称为电偶极子（electric dipole），而这个变形的过程则称为极化（polarization）。极化的程度取决于原子到点电荷的距离，电偶极子的方向则指向点电荷，并和连接两极的轴线一致，如图1-6所示。极化过程的净效果，是原子（或分子）的电偶极子趋向于反抗点电荷产生的电场。因此，点电荷在材料中任意点产生的电场，将不同于移去材料后真空中的电场。为了将式（1.8）从真空推广到任意媒介，用 ε 代替真空中的介电常数 ε_0（ε 为相应材料的介电常数，它表征材料的电极化能力），得



图1-6　正电荷 q 引起电介质原子的极化

8

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{R}}\frac{q}{4\pi\varepsilon R^2} \quad (\mathrm{V/m}) \tag{1.10}$$

通常，ε 用以下形式来表示

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \quad (\mathrm{F/m}), \tag{1.11}$$

其中，ε_r 是一个无量纲的物理量，称为材料的相对介电常数（relative permittivity 或 dielectric constant）。在真空中，$\varepsilon_r = 1$；在靠近地球表面的空气中，$\varepsilon_r = 1.000\,6$。附录B列出了本书用到的所有材料的 ε_r。

除了电场强度 $\boldsymbol{E}$，有时使用电通密度（electric flux density）$\boldsymbol{D}$ 更加方便。电通密度也称电位移，它同 $\boldsymbol{E}$ 具有以下关系

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \quad (\mathrm{C/m^2}) \tag{1.12}$$

其单位为库每平方米（$\mathrm{C/m^2}$）。$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 两个电场量，构成了电磁场中两对基本物理

量中的一对，另外一对是磁场量，将在下一节介绍。

1.3.3 磁场

早在公元前800年，希腊人就已经发现有些石头能够吸引铁块。这些石头就是今天人们所说的*磁铁矿*（Fe_3O_4），这种吸引现象称为*磁性*（magnetism）。在13世纪，法国科学家们发现，当把针放在球形天然磁铁表面时，所放的位置不同，针的取向就不同。把针的取向描绘出来，得到的是代表磁力的*磁力线*（magnetic-field line），这些磁力线环绕着球形磁铁，并都经过球面上由直径相连的两个点。这两个点称为磁铁的*北极和南极*（north and south pole），且无论磁铁形状如何，南北极总是存在的。图1-7所示为条形磁铁的磁力线分布模式。观察表明，同种磁极互相排斥，异种磁极互相吸引。磁场中的吸引－排斥性质同电荷间的电场力是类似的，但有一个显著差别，就是*电荷可以独立存在，而磁极总是成对存在的*。将永久磁铁分割成许多小段，不论每段有多小，总存在南北极。

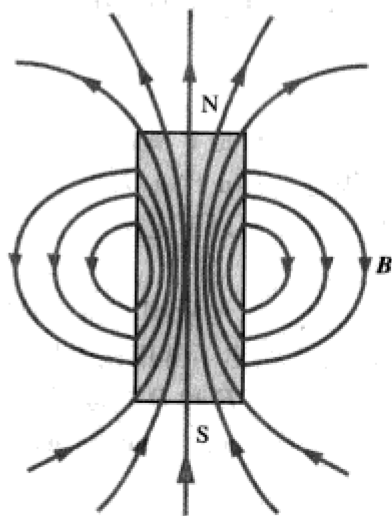


图1-7 条形磁铁的磁力线分布模式

环绕磁铁的磁力线表示磁场的存在，人们称这个场为*磁通密度*（magnetic flux density），用 **B** 表示。磁场不仅出现在永久磁铁周围，也可以用电流来产生。电流与磁性之间的联系是由丹麦科学家奥斯特（Hans Oersted，1777—1851）于1819年发现的。他发现，导线中的电流会引起附近的指南针发现偏转，转到既垂直于导线，又垂直于连接导线与指针的径向线的方向上。由此可以推断出，载流导线产生围绕导线的闭合圆环形磁场，如图1-8所示。在奥斯特的发现之后不久，法国科学家毕奥（Jean Baptiste Biot）和萨伐尔（Felix Savart）发现了描述空间一点的磁通密度 **B** 与导体中电流 I 的关系的表达式，即毕奥－萨伐尔定理。对图1-8所示长直导线的情况，应用毕奥－萨伐尔定理，可以获得 z 方向的恒定电流 I 产生的磁通密度 **B** 的表达式

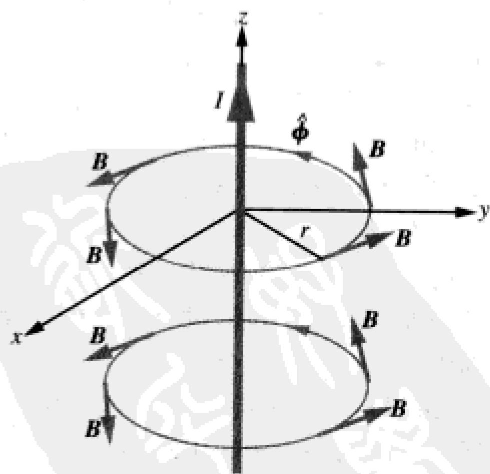


图1-8 z 方向恒定电流产生的磁场

$$\mathbf{B} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (\mathrm{T}), \tag{1.13}$$

其中，r 是从电流到场点的径向距离，$\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 是方位角单位矢量，表示磁场的方向同环绕电流的圆相切，如图1-8所示。计量磁场大小的单位用特斯拉（T），以 Nikola Tesla

(1856—1943) 的名字命名，他是一个克罗地亚裔美国电气工程师，他在变压器方面的贡献使得低损耗远距离输电成为可能。μ_0则称为真空中的**磁导率**（magnetic permeability），$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m，它和介电常数 ε_0是类似的。在第2章将看到，μ_0和 ε_0的乘积确定了真空中的光速 c

10

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \times 10^8 \quad (\text{m/s}) \tag{1.14}$$

大多数自然材料是**非磁性的**（nonmagnetic），即它们的磁导率 $\mu = \mu_0$。而铁磁材料，如铁、镍等，其 μ 比 μ_0大很多。磁导率 μ 表征材料的磁化特性。类似式（1.11），可以对材料的 μ 作以下定义

$$\mu = \mu_r \mu_0 \quad (\text{H/m}), \tag{1.15}$$

其中，μ_r为一个无量纲的量，称为材料的**相对磁导率**（relative magnetic permeability）。附录B给出了常用铁磁材料的 μ_r。

前面提到，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 构成了电磁场量中两对物理量中的一对。剩下的一对是 $\boldsymbol{B}$ 和**磁场强度**（magnetic field intensity）$\boldsymbol{H}$，二者通过 μ 而联系在一起

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{1.16}$$

1.3.4 稳态场与动态场

由于电场 $\boldsymbol{E}$ 由电荷 q 决定，磁场 $\boldsymbol{H}$ 由电流 $I = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ 决定，而 q 和 $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ 是彼此独立的变量，因此，只要电流 I 保持不变，产生的电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 就是彼此无关的。为了说明这一点，举个例子，假定有一束带电的粒子流，以恒定速度运动，则这些运动的电荷构成了直流电流。选取粒子流中的一小段，它所产生的电场由其中的总电荷 q 确定；但磁场则不是取决于 q，而是取决于该小段中电荷的速度（即电流）。少量的电荷以较快的速度运动，或者大量的电荷以较慢的速度运动，可以产生同样大小的电流。这两种情况下，由于电流相同，产生的磁场也相同，但由于电荷数目不同，电场将完全不同。

在电磁学中，**静电学**（electrostatics）和**静磁学**（magnetostatics）分别对应恒定电荷、恒定电流两种特殊情况。它们被当成两个独立的电磁学分支，原因在于两种场是彼此解耦、相互没有关系的。**动态场**（dynamics）则是电磁学的第三个，也是范围更为宽广的一个分支，它涉及电流、电荷密度等时变源所引起的**时变场**（time-varying field）。如果前述由运动带电粒子束产生的电流是随时间变化的，则在粒子束中任何选定的一段中，电荷的数目也将随时间变化；反之，电荷数量的变化也必将要求电流变化。在第6章将看到，在时变场中，电场和磁场是彼此耦合的。事实上，**时变的电场将产生时变的磁场，反之亦然**。表1-3对电磁学的三个分支作了一个总结。

表1-3 电磁学的三个分支

分　支	条　件	场量（单位）
静电学	静止电荷 ($\partial q/\partial t = 0$)	电场强度 $\boldsymbol{E}$ (V/m) 电位移 $\boldsymbol{D}$ (C/m²) $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$

（续）

分 支	条 件	场量（单位）
静磁学	恒定电流 ($\partial I/\partial t=0$)	磁感应强度 $\boldsymbol{B}$（T） 磁场强度 $\boldsymbol{H}$（A/m） $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$
动态场（时变场）	时变电流 ($\partial I/\partial t\neq 0$)	$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ 及 $\boldsymbol{H}$ ($\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$) 耦合 ($\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$)

材料的电、磁特性分别用参数 ε 和 μ 来表征。此外还需要另外一个基本参数，即材料的电导率 σ，其单位为西门子每米（S/m）。电导率表征电荷在材料中运动的容易程度。如果 $\sigma=0$，则电荷无法脱离原子的束缚而自由运动，这种材料称为理想电介质（perfect dielectric）；如果 $\sigma=\infty$，则电荷可以在材料中毫无阻力地运动，这种材料称为理想导体（perfect conductor）。参数 ε、μ 和 σ 也常常称作材料的构造参数（constitutive parameter），部分材料的构造参数如表 1-4 所示。如果构造参数在媒质各处都是常数，则称这种媒质为各向同性（homogeneous）的。

11

表 1-4 材料的构造参数

参 数	单 位	真空中的数值
介电常数 ε	F/m	$\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}$ (F/m) $\approx\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}$ (F/m)
磁导率 μ	H/m	$\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ (H/m)
电导率 σ	S/m	0

复习题

Q1.1 宇宙中的四种基本力分别是什么？它们的相对强度如何？

Q1.2 什么是库仑定律？它具体包括哪些性质？

Q1.3 电荷的两个最重要的特性是什么？

Q1.4 材料的介电常数、磁导率分别表征材料的什么性质？

Q1.5 电磁学的三个分支是什么？各有什么限定条件？

1.4 行波

波是许多物理过程的自然结果，例如，海洋与湖泊中的波浪和纹波、空气中传播的声波、拉紧的弦上的机械波、构成光的电磁波和地震波等等。尽管波的种类不同，但都具有一些共同属性，例如：

- *移动的波将能量从一点带到另外一点。*
- *波具有速度：*波从一点传到另外一点需要时间。在真空中，光波以 3×10^8 m/s 的速度传播，而空气中的声波速度约比光速慢一百万倍，为 330m/s。

12

- *有些波具有线性特性：*不影响其他波通过的波，为线性的（linear）波。由于线性波可以彼此通过而不相互干扰，因此，两个线性波的和等于它们分别单独存在时的波之和。电磁波、声波都是线性的。当两个人交谈时，他们的声波不会因对方说话而反射回来，而是简单、独立地传向对方。水波是近似线

性的，当往湖中不同地方投入两枚小卵石时，往外扩散的两个圆形水波不会相互影响。尽管这两个圆形水波相互作用时可能表现出复杂的模式，但那也只不过是两个独立水波的线性叠加而已。

波有两种类型：由短时干扰引起的瞬态波（transient wave），以及由振荡源产生的连续谐波（continuous harmonic wave）。本书里两种波都会遇到，但大部分讨论是关于正弦时变连续波的传播的。

波传播的一个基本特性是：波是所通过的媒介的一种扰动，且具有自保持能力。如果这种扰动仅是某一个空间坐标变量的函数，则称这种波为一维波（one-dimensional wave）。譬如图1-9中弦的垂直位移就是一维波，它仅随时间及弦上不同位置而变化。尽管弦在第二维上有起落，但波是一维的，因为扰动仅仅随一个空间坐标变量变化。二维波（two-dimensional wave）则沿表面往外传播，就如同水塘中的纹波一样（图1-10a），其扰动可以用两个空间坐标变量来描述。类似地，三维波（three-dimensional wave）向三维空间传播，其扰动是所有三个空间坐标变量的函数。三维波可以有许多不同的形式，包括平面波（plane wave）、柱面波（cylindrical wave）和球面波（spherical wave）等。平面波的特征在于，在任意时刻过任何给定点，做垂直于传播方向的无穷大平面，该平面上的扰动是处处相同的，如图1-10b所示。与此类似，柱面波和球面波的扰动分别在圆柱面或球面上是均匀的，如图1-10b、1-10c所示。

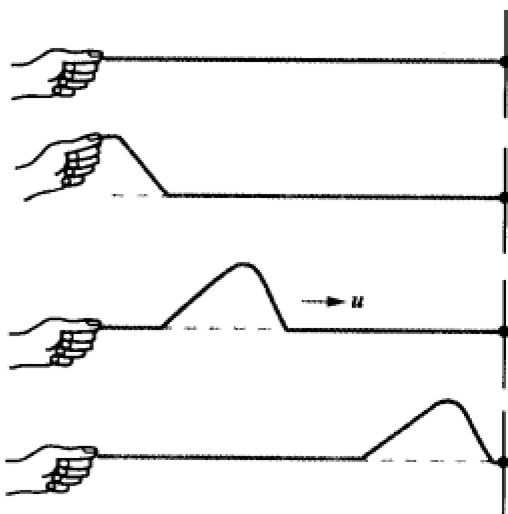


图1-9　弦上传播的一维波

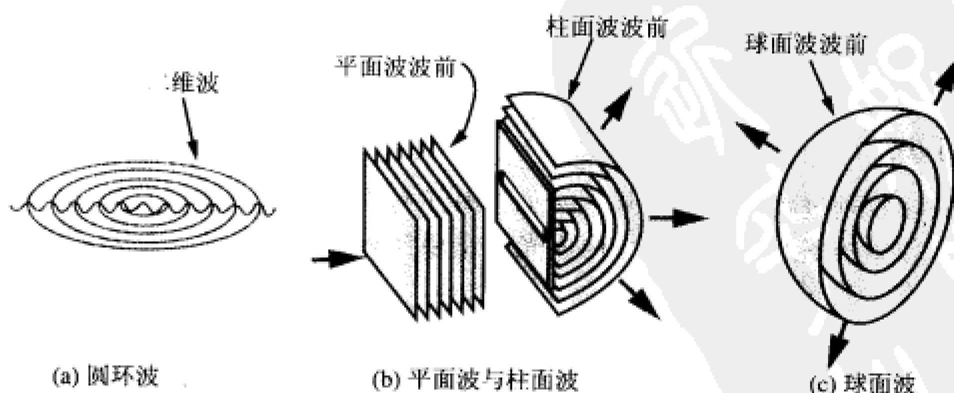


图1-10　二维波、三维波的例子

（a）池塘中的圆形波；（b）平面光波通过遮光屏上的狭缝时产生的柱面波；（c）球面波的一部分

在接下来的材料中，我们将通过推导波随时间、空间变量变化的函数关系，以及建立相应的数学公式，来分析波的一些基本性质。为了简化叙述，此处的讨论将

仅限于波为正弦变化的情况（这种波的扰动仅仅跟一个空间变量有关），而把其他更复杂的波的讨论任务留给后面几章。 13

1.4.1 无损媒介中的正弦波

撇开产生的机制不谈，所有波都可以用相同的数学术语来描述。下面用湖面上的水波为例进行说明。一种媒介，若其对内部或表面传播的波的幅值不产生衰减，则称为无损的（lossless）。假定先忽略摩擦力，则湖面上产生的水波可以无限传播而不损失能量。若用 y 表示水面偏离平均高度（无扰动的水面高度）的距离，x 表示水波传播的距离，则 y 与时间 t、空间坐标 x 之间的依赖关系具有以下一般化的形式

$$y(x,t)=A\cos\left(\frac{2\pi t}{T}-\frac{2\pi x}{\lambda}+\phi_0\right)\quad(\text{m}),\qquad(1.17)$$

其中，A 是波的幅值（amplitude），T 是时间周期（time period），λ 是空间波长（wavelength），ϕ_0是参考相位（reference phase）。$y(x,t)$也可以表示成以下形式

$$y(x,t)=A\cos\phi(x,t),\qquad(1.18)$$

其中

$$\phi(x,t)=\left(\frac{2\pi t}{T}-\frac{2\pi x}{\lambda}+\phi_0\right)\quad(\text{rad})\qquad(1.19)$$

角度 $\phi(x,t)$称为波的相位，注意不要同参考相位 ϕ_0混淆，后者相对时间、空间都是常数。相位的单位与角度相同，即弧度（rad）或度（°），$2\pi\ \text{rad}=360°$。

先分析 $\phi_0=0$ 的简单情况：

$$y(x,t)=A\cos\left(\frac{2\pi t}{T}-\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\quad(\text{m})\qquad(1.20)$$

图 1-11 绘出了 $t=0$ 时 $y(x,t)$随 x 的变化，以及 $x=0$ 时 $y(x,t)$随 t 的变化情况。波形沿 x 方向按空间周期 λ 重复，沿时间轴 t 按时间周期 T 重复。 14

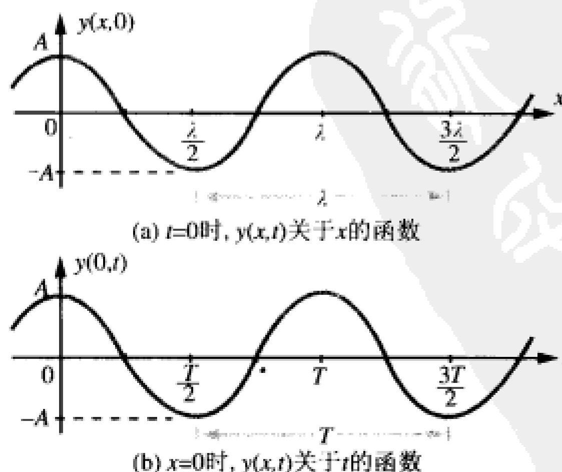


图 1-11 将 $y(x,t)=A\cos\left(\frac{2\pi t}{T}-\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$绘成：(a) $t=0$ 时 x 的函数；(b) $x=0$ 时 t 的函数

如果在不同的时刻对水面拍照，将发现水波轮廓 $y(x)$ 具有图1-12所示的正弦模式。图中的每条曲线，都对应着一个特定的时刻，它们的波峰间的距离都等于波长 λ，但因观测时间不同，故三条曲线有相对位移。由于随着时间 t 的逐渐增大，曲线向 x 轴的正方向移位，因此水波轮廓看起来就像一个沿着该方向传播的波。如果选定某个高度，譬如峰值，观测其在不同时刻所处的 x 位置，可以测量波的相速（phase velocity）。峰值对应于相位 $\phi(x,t)$ 等于零度或 2π 弧度的整数倍的地方，即

$$\phi(x,t)=\frac{2\pi t}{T}-\frac{2\pi x}{\lambda}=2n\pi,\quad n=0,1,2,\cdots \tag{1.21}$$

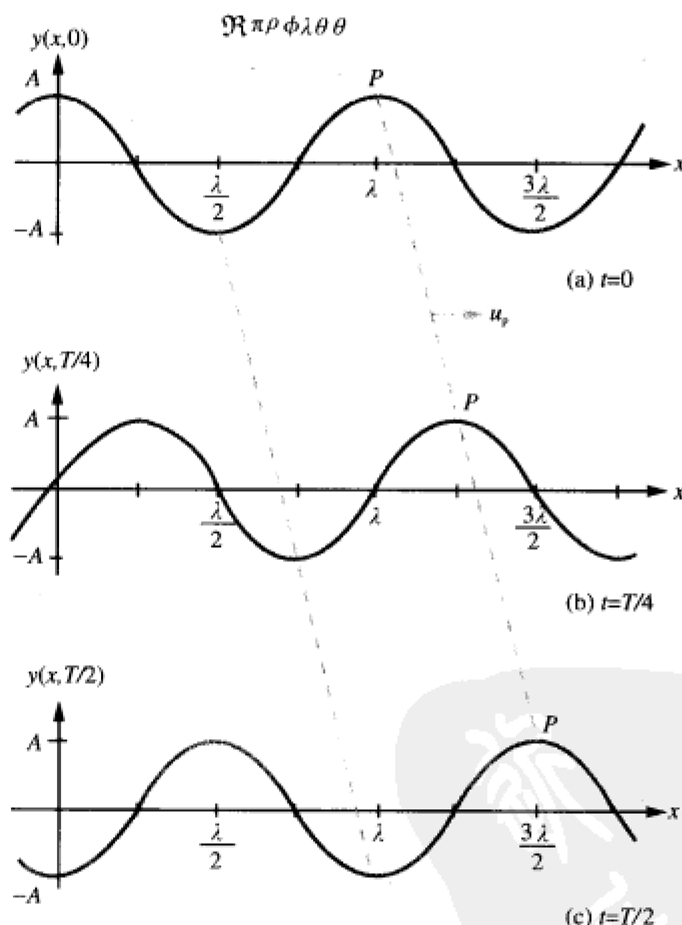


图1-12 $y(x,t)=A\cos\left(\frac{2\pi t}{T}-\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ 关于 x 的曲线

注：波以 $u_p=\lambda/T$ 的速度沿 $+x$ 方向移动。

如若选定的不是峰值而是其他高度，譬如 y_0，观测其随时间 t 以及 x 的运动，这等效于固定相位 $\phi(x,t)$ 为一个常数，以满足

15

$$y(x,t)=y_0=A\cos\left(\frac{2\pi t}{T}-\frac{2\pi x}{\lambda}\right), \tag{1.22}$$

或

$$\frac{2\pi t}{T}-\frac{2\pi x}{\lambda}=\cos^{-1}\left(\frac{y_0}{A}\right)=\text{常数} \tag{1.23}$$

对式（1.23）求时间的导数，以求取该固定点的视在速度，

$$\frac{2\pi}{T}-\frac{2\pi}{\lambda}\frac{dx}{dt}=0, \tag{1.24}$$

得到相速 u_p为

$$u_p=\frac{dx}{dt}=\frac{\lambda}{T} \quad (\text{m/s}) \tag{1.25}$$

相速也称传播速度（propagation velocity），它是水面上波形移动的速度。水本身主要做上下运动，当波从一点传播到另外一点时，水分子并没有随波一起往外移动。

在式（1.19）的相位表达式 $\phi(x,t)$ 中，观察 t 和 x 项的正负符号，很容易确定波动的方向：如果一正一负，则波沿正 x 方向传播；如果全正或全负，则波沿负 x 方向传播。恒定的参考相位 ϕ_0对波速和传播方向都没有影响。

正弦波的频率 f 等于时间周期 T 的倒数：

M1.9 D1.1

$$f=\frac{1}{T} \quad (\text{Hz}) \tag{1.26}$$

综合式（1.25）和式（1.26），可得下述关系

M1.1-1.3

$$u_p=f\lambda \quad (\text{m/s}) \tag{1.27}$$

频率以每秒的周波数表示，单位用 Hz，以纪念德国物理学家 Heinrich Hertz（1857—1894）在无线电波方面的开创性工作。

利用式（1.26），式（1.20）可简写成

$$y(x,t)=A\cos\left(2\pi ft-\frac{2\pi}{\lambda}x\right)=A\cos(\omega t-\beta x), \tag{1.28}$$

其中，ω 是波的角速度（angular velocity），β 是相位常数（phase constant）或波数（wavenumber），定义如下

$$\omega=2\pi f \quad (\text{rad/s}), \tag{1.29a}$$

$$\beta=\frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{rad/m}) \tag{1.29b}$$

利用以上两个物理量，相速可以表示成

D1.2

$$u_p=f\lambda=\frac{\omega}{\beta} \tag{1.30}$$

以上分析的是沿正 x 方向传播的波的行为。为了描述沿负 x 方向传播的波，将式（1.28）中 x 的符号取反：

$$y(x,t)=A\cos(\omega t+\beta x) \tag{1.31}$$

下面分析式（1.17）中的参考相位 ϕ_0的作用。如果 ϕ_0不等于 0，则式（1.28）应该写成

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-\beta x+\phi_0) \tag{1.32}$$

这表示，在任何时刻 t，$y(x,t)$ 作为 x 函数的曲线，以及在任何位置 x，$y(x,t)$ 作为 t 函数的曲线，当 ϕ_0 不等于0时，曲线将相对参考相位为0的曲线产生 ϕ_0 角度的空间（或时间）位移，如图1-13所示。从图中可以看到，相对 $\phi_0=0$ 的情况，当 ϕ_0 为正时，$y(t)$ 较早到达其峰值或任何给定的数值。因此，称 $\phi_0=\pi/4$ 的波*超前*(lead) $\phi_0=0$ 的波，*超前相角*（phase lead）为 $\pi/4$；类似地，称 $\phi_0=-\pi/4$ 的波*滞后*(lag) $\phi_0=0$ 的波，*滞后相角*（phase lag）为 $\pi/4$。ϕ_0 为负的波，比0参考相位的波较晚达到 $y(t)$ 的给定值。正的 ϕ_0 表示相位在时间上的超前，负的 ϕ_0 则表示相位的滞后。

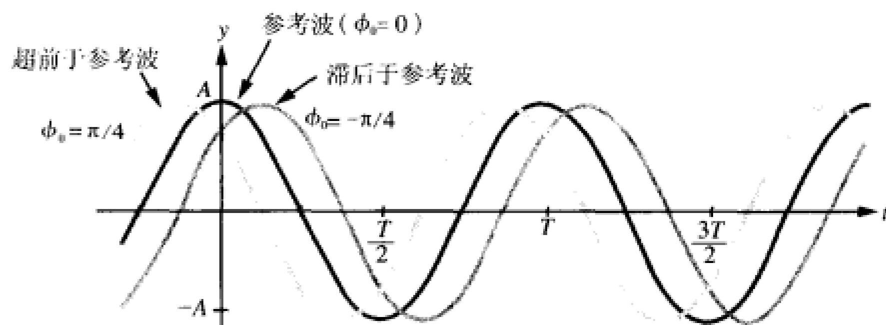


图1-13 参考相位 ϕ_0 取三个不同值时，$y(0,t)=A\cos[(2\pi t/T)+\phi_0]$ 的曲线

1.4.2 有损媒介中的正弦波

如果波在有损媒介（lossy medium）中沿 x 方向传播，则其幅值将按指数规律 $e^{-\alpha x}$ 衰减。$e^{-\alpha x}$ 称为*衰减系数*（attenuation factor），α 则是媒介的*衰减常数*（attenuation constant），单位为奈培每米（Np/m）。一般有

$$y(x,t)=Ae^{-\alpha x}\cos(\omega t-\beta x+\phi_0) \tag{1.33}$$

这里，波的幅值不再是 A，而是 $Ae^{-\alpha x}$。图1-14绘出了 $t=0$ 时，$y(x,t)$ 作为 x 函数的曲线，其中 $A=10\text{m}$、$\lambda=2\text{m}$、$\alpha=0.2\text{Np/m}$、$\phi_0=0$。注意波形的包络线是以 $e^{-\alpha x}$ 规律减小的。

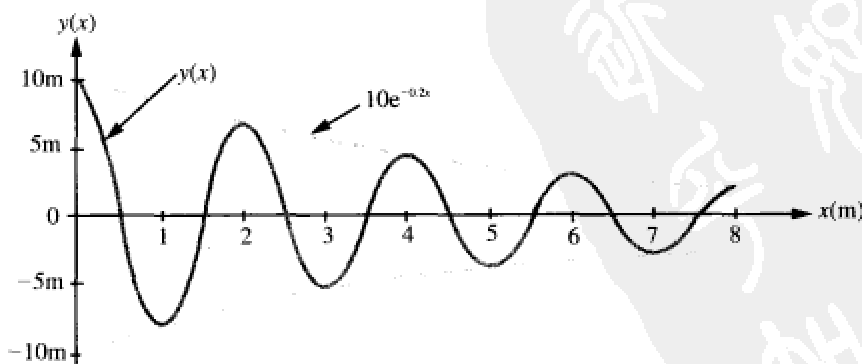


图1-14 $y(x)=10e^{-0.2x}\cos\pi x(\text{m})$ 的曲线

注：包络线由 $10e^{-0.2x}$ 及其镜像构成。

α 的实际单位是1/m。奈培（Neper）只是传统上采用的一个无量纲的人为修饰

词，目的是为了提醒人们，以明确 Np/m 是媒介的衰减常数 α 的单位。类似的例子还有相位常数 β，其单位用 rad/m 而不用实际单位 1/m。

复习题

Q1.6 如何判断波是沿 x 的正方向传播还是沿 x 的负方向传播？

Q1.7 在（a）无损媒介及（b）有损媒介两种情况下，波形的包络线是如何随距离变化的？

Q1.8 为什么负的 ϕ_0 值表示相位的滞后？

例 1-1 水中的声波

在流体（液体或气体）中沿 x 方向传播的声波，可以用压力差（简称压差）$p(x,t)$ 来表示，其单位为牛顿每平方米（N/m^2）。假定声波以正弦波 $p(x,t)$ 的形式在水中沿正 x 方向传播，频率为 1kHz，速度为 1.5km/s，幅值为 $10N/m^2$，$p(x,t)$ 的一个最大值出现在 $t=0$、$x=0.25m$ 处。将水当作无损媒介，试写出 $p(x,t)$ 的表达式。 [17]

解答：根据式（1.17）给定的沿正 x 方向传播的波的一般形式，有

$$p(x,t)=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\phi_0\right)\quad (N/m^2)$$

其中，幅值 $A=10N/m^2$，$T=1/f=10^{-3}s$。由 $u_p=f\lambda$ 可得，

$$\lambda=\frac{u_p}{f}=\frac{1.5\times10^3}{10^3}=1.5m$$

因此有，

$$p(x,t)=10\cos\left(2\pi\times10^3t-\frac{4\pi}{3}x+\phi_0\right)\quad (N/m^2)$$

由于在 $t=0$、$x=0.25m$ 处，$p(0.25,0)=10N/m^2$，所以有

$$10=10\cos\left(\frac{-4\pi}{3}0.25+\phi_0\right)=10\cos\left(\frac{-\pi}{3}+\phi_0\right),$$

由此得到 $(\phi_0-\pi/3)=\cos^{-1}(1)$，或 $\phi_0=\pi/3$。所以有

$$p(x,t)=10\cos\left(2\pi\times10^3t-\frac{4\pi}{3}x+\frac{\pi}{3}\right)\quad (N/m^2)$$ ■

例 1-2 功率损耗

在大气中传播的激光束可以用电场强度来表示，其衰减源自大气的吸收作用。假定某激光的电场强度为

$$E(x,t)=150e^{-0.03x}\cos(3\times10^{15}t-10^7x)\qquad (V/m),$$ [18]

其中，x 是到激光源的距离，单位为 m。试确定（a）波传播的方向；（b）波的速度；（c）在 $x=200m$ 处波的幅值。

解答：（a）由于余弦函数的变量中 t 和 x 的符号相反，因此波沿正 x 方向传播。

（b）
$$u_p=\frac{\omega}{\beta}=\frac{3\times10^{15}}{10^7}=3\times10^8 m/s,$$

它等于 c，真空中的光速。

（c）在 $x=200m$ 处，$E(x,t)$ 的幅值为

$$150e^{-0.03\times 200}=0.37 \quad (\text{V/m})$$ ■

练习 1.1 一个电磁波的电场为

$$E(z,t)=10\cos(\pi\times 10^7 t+\pi z/15+\pi/6) \quad (\text{V/m})$$

试确定：(a) 波传播的方向；(b) 波的频率 f；(c) 波长 λ；(d) 相速 u_p。

答案：(a) 负 z 的方向；(b) $f=5\text{MHz}$；(c) $\lambda=30\text{m}$；(d) $u_p=1.5\times10^8\text{m/s}$。(参见❤[1])

练习 1.2 某电磁波在有损媒介中沿 z 方向传播，衰减常数为 $\alpha=0.5\text{Np/m}$。如果在 $z=0$处，波的电场幅值为100V/m，求下述三种情况下波所走过的距离：(a) 幅值衰减到10V/m时；(b) 幅值衰减到1V/m时；(c) 幅值衰减到1μV/m时。

答案：(a) 4.6m；(b) 9.2m；(c) 37m。(参见❤)

1.5 电磁波谱

可见光是电磁波谱（electromagnetic spectrum）里的波之一（图1-15），其他还有伽马射线、X射线、红外波和无线电波等等。由于它们具有以下共性，通常将它们统称电磁波：

- 都由电场强度和磁场强度组成，二者以相同频率 f 振荡。
- 在真空中传播的相速都等于恒定常数 c，即式（1.14）给定的光速。
- 在真空中，它们的波长 λ 与振荡频率 f 之间都满足以下关系

$$\lambda=\frac{c}{f} \tag{1.34}$$

尽管所有电磁波都具有以上性质，但各有各的波长 λ 和振荡频率 f。

在图1-15中，电磁波谱的可见部分所覆盖的波长范围是很窄的，在 $\lambda=0.4\mu\text{m}$（紫色）到 $\lambda=0.7\mu\text{m}$（红色）之间。往波长变短的方向走，将依次遇到紫外线、x光以及伽马射线等波段（这些波段的名称同它们被发现的历史有关）。在可见光谱的另外一侧，依次是红外波段和无线电波段。由于式（1.34）的 λ、f 关系，以上每个波段范围，既可以用波长范围表示，也可以用频率范围表示。在实际应用中，波长 $\lambda<1\text{mm}$的电磁波用波长来标示，这包括了无线电波以外的所有电磁波谱；而波长 $\lambda>1\text{mm}$（即无线电波范围）的电磁波，则用频率来标示。在真空中，波长为1mm的电磁波，频率为 $3\times10^{11}\text{Hz}=300\text{GHz}$。 [19]

无线电的波谱又由几个独立的波段组成，如图1-16所示。每个波段占10倍频的范围，并基于国际电信联盟的命名法赋以字符缩略名称。由于产生机制不同，频率不同，其用途也不相同。在材料中传播的电磁波的性质，可能因所属的波段不同而存在显著差别。极低频（ELF）段的范围为3Hz～30Hz，主要用于隐藏的金属物体的探测。比ELF更低，直至0.1Hz的频率，则用于地球结构的电磁探测。1Hz～1kHz的频率，有时用于水下潜艇的通信，以及对地球的电离层进行某些探测。甚低频（VLF）段的范围为3kHz～30kHz，用于潜艇通信以及“欧米伽”导航系统的定位。

---

1. 该符号表示配套光盘中有详细解答，下同。

低频（LF）段的范围为 30kHz～300kHz，用于某些形式的通信，以及“罗兰 C”定位系统。用于空中导航的某些无线电塔及天气预报站，则运行在低频段的频率较高的一端。中频（MF）段的范围为 300kHz～3MHz，它包含了 0.5MHz～1.5MHz 的标准 AM 广播频段。

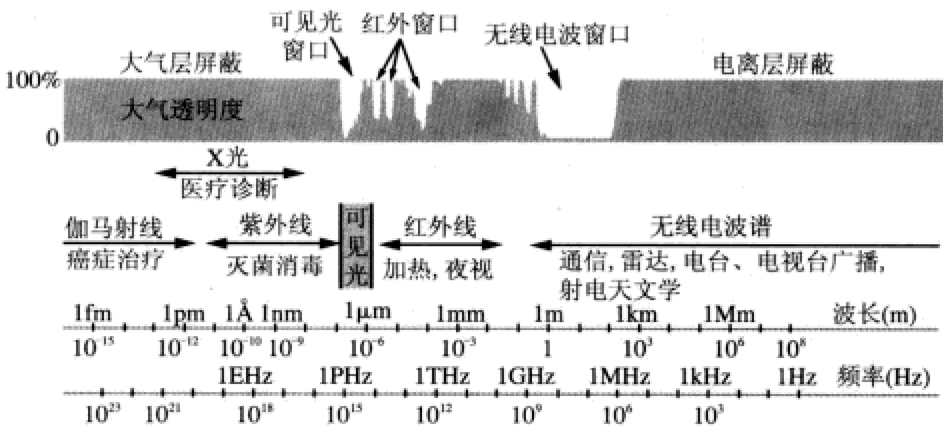


图 1-15 电磁波谱



波段	应用
极高频 EHF(30GHz～300GHz)	雷达，高级通信系统，遥感，射电天文学
超高频 SHF(3GHz～30GHz)	雷达，卫星通信系统，飞机导航，射电天文学，遥感
特高频 UHF(300MHz～3GHz)	电视发射，雷达，射电天文学，微波炉，移动电话
甚高频 VHF(30MHz～300MHz)	电视发射及FM广播，移动无线电通信，空中交通控制
高频 HF(3MHz～30MHz)	短波广播
中频 MF(300kHz～3MHz)	AM广播
低频 LF(30kHz～300kHz)	空中导航用的无线电塔、天气预报站
甚低频 VLF(3kHz～30kHz)	导航及定位
特低频 ULF(300Hz～3kHz)	电话机用音频信号
超低频 SLF(30Hz～300Hz)	电离层探测，电力配送，潜艇通信
极低频 ELF(3Hz～30Hz)	隐蔽金属物体的探测
f<3Hz	地球结构的电磁探测

图 1-16 无线电波的波段划分及主要用途

高频（HF）段的范围为 3MHz～30MHz，由于电离层对其反射最强而吸收最小，因此长距离通信及长距离短波广播使用这个波段中的频率。接下来是甚高频（VHF）段，其频率范围为30MHz～300MHz，主要用于电视塔和FM电台在发射天线的视线

[20] 范围内广播，也用于飞机及其他交通工具的通信。早期进行的某些射电天文学研究，用的也是这个频段。特高频（UHF）段的范围为300MHz～3GHz，除了部分频率也用于电视发射以及作飞机、水面快艇的移动通信外，绝大部分频率都被雷达占据着，十分拥挤。工作在这一波段的雷达主要用于飞机的探测及跟踪。本频段还有部分频率保留用于射电天文观测。

许多点对点通信系统以及多种地面雷达、舰载雷达运行在3GHz～30GHz的超高频（SHF）段。有些飞机导航系统也运行在这个频段。

极高频（EHF）段的范围为30GHz～300GHz。其中大部分频率未广泛使用，原因有二：一是技术不成熟，二是大气层对其中的部分频率的吸收特别严重。有些高级的通信系统，如汽车防撞雷达、某些军用成像雷达系统等，工作在这一波段的某些“大气窗口”中。落在这些窗口中的频率，大气的吸收问题不太严重。这些大气窗口范围包括30GHz～35GHz，70GHz～75GHz，90GHz～95GHz，135GHz～145GHz。[21]

尽管没有对微波的波段范围作精确的定义，但惯常认为其覆盖UHF、SHF、EHF等波段的全部频率。EHF波段有时称为毫米波段，因为其波长范围为1mm(300GHz)到1cm(30GHz)。

复习题

Q1.9　电磁波的三个基本性质是什么？

Q1.10　微波波段的频率范围是多少？

Q1.11　可见光谱的波长范围是多少？红外波段有什么应用？

1.6　复数回顾

复数（complex number）z用以下形式表示

$$z = x + jy, \tag{1.35}$$

其中，x，y分别是z的实部（$\mathfrak{Re}$）和虚部（$\mathfrak{Im}$），$j=\sqrt{-1}$。即，

$$x = \mathfrak{Re}(z), \qquad y = \mathfrak{Im}(z) \tag{1.36}$$

此外，z也可以表示成极坐标形式（polor form）

$$z = |z|e^{j\theta} = |z|\angle\theta \tag{1.37}$$

其中，$|z|$为z的模；θ为相角，在数值计算中常简记为$\angle\theta$。应用欧拉恒等式（Euler's identity）

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta, \tag{1.38}$$

可以将复数z从式（1.37）的极坐标形式转换成式（1.35）的直角坐标形式，

$$z = |z|e^{j\theta} = |z|\cos\theta + j|z|\sin\theta, \tag{1.39}$$

由此得到以下关系

$$x = |z|\cos\theta, \qquad y = |z|\sin\theta, \tag{1.40}$$

$$|z| = +\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \theta = \tan^{-1}(y/x) \tag{1.41}$$

图1-17以图形方式表示了这两种形式。当使用式（1.41）时，要注意确保θ在正确的象限里。还要注意的是，由于$|z|$是非负数，因此式（1.41）的开方取正根。这用在开方号上加“+”表示。[22]

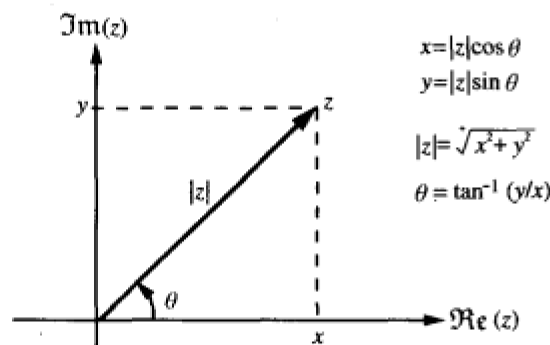


图 1-17　复数 $z=x+\mathrm{j}y=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ 的直角坐标与极坐标表示间的关系

给 z 加个星号作上标（*），以表示 z 的**共轭复数**（complex conjugate）。它是通过将 z 中出现的任何 j 替换为 −j 得到的，即

$$z^* = (x+\mathrm{j}y)^* = x-\mathrm{j}y = |z|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta} = |z|\angle{-\theta} \tag{1.42}$$

z 的模 $|z|$ 等于 z 与 z^* 乘积的平方根，即

$$|z| = \sqrt{zz^*} \tag{1.43}$$

下面着重回顾本书可能用到的一些复数性质。

复数相等性：给定两个复数

$$z_1 = x_1+\mathrm{j}y_1 = |z_1|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1}, \tag{1.44}$$

$$z_2 = x_2+\mathrm{j}y_2 = |z_2|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2}, \tag{1.45}$$

当且仅当 $x_1=x_2$ 及 $y_1=y_2$，或 $|z_1|=|z_2|$ 及 $\theta_1=\theta_2$ 时，才有 $z_1=z_2$。

复数加法：

$$z_1+z_2 = (x_1+x_2)+\mathrm{j}(y_1+y_2) \tag{1.46}$$

复数乘法：

$$z_1z_2 = (x_1+\mathrm{j}y_1)(x_2+\mathrm{j}y_2) = (x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{j}(x_1y_2+x_2y_1), \tag{1.47a}$$

或

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= |z_1|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1}\cdot|z_2|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2} = |z_1||z_2|\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_1+\theta_2)} \\ &= |z_1||z_2|[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{j}\sin(\theta_1+\theta_2)] \end{aligned} \tag{1.47b}$$

复数除法：当 $z_2\neq 0$ 时，

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+\mathrm{j}y_1}{x_2+\mathrm{j}y_2} = \frac{(x_1+\mathrm{j}y_1)}{(x_2+\mathrm{j}y_2)}\cdot\frac{(x_2-\mathrm{j}y_2)}{(x_2-\mathrm{j}y_2)} = \frac{(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{j}(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}, \tag{1.48a}$$

或

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1}}{|z_2|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_1-\theta_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{j}\sin(\theta_1-\theta_2)] \tag{1.48b}$$

复数的乘方：对于任何正整数 n，有

$$z^n = (|z|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})^n = |z|^n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\theta} = |z|^n(\cos n\theta+\mathrm{j}\sin n\theta), \tag{1.49}$$

$$z^{1/2} = \pm|z|^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta/2} = \pm|z|^{1/2}[\cos(\theta/2)+\mathrm{j}\sin(\theta/2)] \tag{1.50}$$

常用关系式：

$$-1 = e^{j\pi} = e^{-j\pi} = 1\angle 180^\circ,$$

$$j = e^{j\pi/2} = 1\angle 90^\circ, \tag{1.51}$$

$$-j = -e^{j\pi/2} = e^{-j\pi/2} = 1\angle -90^\circ, \tag{1.52}$$

$$\sqrt{j} = (e^{j\pi/2})^{1/2} = \pm e^{j\pi/4} = \frac{\pm(1+j)}{\sqrt{2}}, \tag{1.53}$$

23

$$\sqrt{-j} = \pm e^{-j\pi/4} = \frac{\pm(1-j)}{\sqrt{2}} \tag{1.54}$$

例 1-3　复数运算

给定两个复数

$$V = 3 - j4,\quad I = -(2 + j3)$$

(a) 把 V 和 I 表示成极坐标形式；并求：(b) VI；(c) VI^*；(d) V/I；(e) $\sqrt{I}$。

解答：

(a)
$$|V| = \sqrt[+]{VV^*} = \sqrt[+]{(3-j4)(3+j4)} = \sqrt[+]{9+16} = 5,$$

$$\theta_V = \tan^{-1}(-4/3) = -53.1^\circ,$$

$$V = |V|e^{j\theta_V} = 5e^{-j53.1^\circ} = 5\angle -53.1^\circ,$$

$$|I| = \sqrt[+]{2^2 + 3^2} = \sqrt[+]{13} = 3.61.$$

因为 $I = (-2 - j3)$ 位于复平面的第三象限（见图 1-18），所以

$$\theta_I = 180^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 236.3^\circ,$$

$$I = 3.61\angle 236.3^\circ.$$

(b)
$$VI = 5e^{-j53.1^\circ} \times 3.61e^{j236.3^\circ} = 18.05e^{j(236.3^\circ - 53.1^\circ)} = 18.05e^{j183.2^\circ}.$$

(c)
$$VI^* = 5e^{-j53.1^\circ} \times 3.61e^{-j236.3^\circ} = 18.05e^{-j289.4^\circ} = 18.05e^{j70.6^\circ}.$$

(d)
$$\frac{V}{I} = \frac{5e^{-j53.1^\circ}}{3.61e^{j236.3^\circ}} = 1.39e^{-j289.4^\circ} = 1.39e^{j70.6^\circ}.$$

(e)
$$\sqrt{I} = \sqrt{3.61e^{j236.3^\circ}} = \pm\sqrt{3.61}e^{j236.3^\circ/2} = \pm 1.90e^{j118.15^\circ}.$$

■

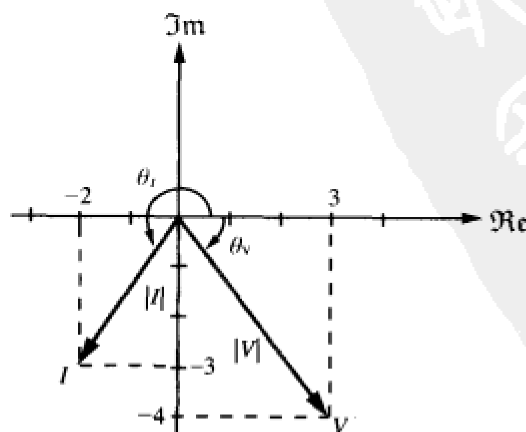


图 1-18　复平面中的复数 V 和 I（例 1-3）

练习 1.3 以极坐标形式写出下列复数表达式的结果

$$z_1 = (4 - \text{j}3)^2, \quad z_2 = (4 - \text{j}3)^{1/2}$$

答案：$z_1 = 25\angle{-73.7°}$，$z_2 = \pm\sqrt{5}\angle{-18.4°}$。（参见●）

练习 1.4 证明$\sqrt{2\text{j}} = \pm(1 + \text{j})$。（参见●）

1.7 相量回顾

对于求解线性系统中激励为时间周期函数的问题，相量分析是一个极其有用的数学工具。许多工程问题具有线性微积分的形式。如果激励（也常称为力函数，force function）随时间按正弦规律变化，当采用相量表示随时间变化的变量时，就可以把微积分方程转换成线性代数方程，不再有正弦函数出现，从而大大简化求解。对于想求解的变量，如电路中的电压、电流等，先由代数方程求得其相量解，再从相量转换回时域，就得到所要的答案。

对于力函数为任意时间周期（非正弦）函数的线性系统，如方波或脉冲序列的情况，也可以用相量技术进行分析。将力函数展开成正弦分量的傅里叶级数，可以针对感兴趣的变量，应用相量法单独求解力函数中的每个傅里叶级数分量的贡献。根据叠加原理，由所有傅里叶分量给出的解的和，与不使用傅里叶级数及相量的帮助、而直接在时域中求解所得的结果应该是完全相同的。显然，相量－傅里叶级数法的优点在于简单。不仅如此，即使是非周期激励的情况，如单个脉冲激励，可以用傅里叶积分表示这些激励函数，因此也一样可以使用叠加原理。

24

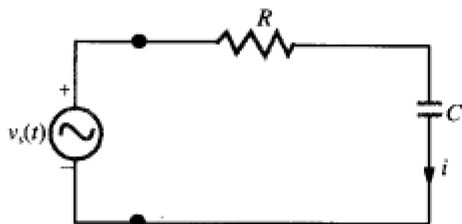


图 1-19 外加电压源 $v_s(t)$ 的 RC 电路

图 1-19 所示简单 RC 电路中的正弦时变电压源为

$$v_s(t) = V_0\sin(\omega t + \phi_0), \tag{1.55}$$

其中，V_0为幅值，ω 是角频率，ϕ_0为参考相位。应用基尔霍夫电压定律，可得以下回路方程：

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\,\text{d}t = v_s(t) \quad （时域） \tag{1.56}$$

为了得到电流 $i(t)$的表达式，可以在时域中直接求解式（1.56），但由于力函数$v_s(t)$是正弦函数，求解比较烦琐。另外一种方法就是按以下步骤，利用相量技术的优点来求解 $i(t)$

步骤 1：选用余弦参照

这是指把力函数表示成余弦函数形式。因此，所有的时变量，例如电路中的电流、R 和 C 两端的电压等，也将具有余弦参照。即

$$v_s(t) = V_0\sin(\omega t + \phi_0) = V_0\cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t - \phi_0\right) = V_0\cos\left(\omega t + \phi_0 - \frac{\pi}{2}\right), \tag{1.57}$$

其中利用了 $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$以及 $\cos(-x) = \cos x$。

步骤2：将时变量表示成相量

任何余弦时变函数 $z(t)$ 都可以表示成以下形式

$$z(t)=\Re\mathfrak{e}[\tilde{Z}e^{j\omega t}] \tag{1.58}$$

其中，$\tilde{Z}$ 是不随时间变化的函数，称为瞬时函数 $z(t)$ 的相量（phasor）。为了区别瞬时量和其对应的相量，在字符上加波浪号“～”表示相量。式（1.57）中的电压 $v_s(t)$ 可以表示成以下形式

$$v_s(t)=\Re\mathfrak{e}[V_0e^{j(\omega t+\phi_0-\pi/2)}]=\Re\mathfrak{e}[V_0e^{j(\phi_0-\pi/2)}e^{j\omega t}]=\Re\mathfrak{e}[\tilde{V}_se^{j\omega t}], \tag{1.59}$$

其中

$$\tilde{V}_s=V_0e^{j(\phi_0-\pi/2)} \tag{1.60}$$

25 对应时间函数 $v_s(t)$ 的相量 $\tilde{V}_s$，包含了幅值和相位的信息，但却与时间 t 无关。下面用相量 $\tilde{I}$ 来定义未知变量 $i(t)$，

$$i(t)=\Re\mathfrak{e}(\tilde{I}e^{j\omega t}), \tag{1.61}$$

如果求解的方程包含导数或积分，则利用下述两个特性

$$\frac{di}{dt}=\frac{d}{dt}[\Re\mathfrak{e}(\tilde{I}e^{j\omega t})]=\Re\mathfrak{e}\left[\frac{d}{dt}(\tilde{I}e^{j\omega t})\right]=\Re\mathfrak{e}[j\omega\tilde{I}e^{j\omega t}], \tag{1.62}$$

及

$$\int i\,dt=\int\Re\mathfrak{e}(\tilde{I}e^{j\omega t})\,dt=\Re\mathfrak{e}\left(\int\tilde{I}e^{j\omega t}dt\right)=\Re\mathfrak{e}\left(\frac{\tilde{I}}{j\omega}e^{j\omega t}\right) \tag{1.63}$$

可见，对时间函数 $i(t)$ 求微分，等效于将其相量 $\tilde{I}$ 乘以 $j\omega$，求积分则等效于将其相量 $\tilde{I}$ 除以 $j\omega$。

步骤3：将微分/积分方程重写成相量形式

将式（1.59）、(1.61)、(1.63) 代入式（1.56）得

$$R\,\Re\mathfrak{e}(\tilde{I}e^{j\omega t})+\frac{1}{C}\,\Re\mathfrak{e}\left(\frac{\tilde{I}}{j\omega}e^{j\omega t}\right)=\Re\mathfrak{e}(\tilde{V}_se^{j\omega t}) \tag{1.64}$$

由于 R 和 C 都是实数量，并且$\Re\mathfrak{e}(\,)$运算满足分配律，所以式（1.64）简化为

$$\tilde{I}\left(R+\frac{1}{j\omega C}\right)=\tilde{V}_s\quad（相量形式） \tag{1.65}$$

时间因子 $e^{j\omega t}$ 因出现在所有三项中而从公式中消失了。式（1.65）就是等效式（1.56）的相量形式。

步骤4：求解相量方程

从式（1.65）可得电流相量 $\tilde{I}$ 为

$$\tilde{I}=\frac{\tilde{V}_s}{R+1/(j\omega C)} \tag{1.66}$$

在进行下一步之前，需先将式（1.66）的右端转换成 $I_0e^{j\theta}$ 的形式（这里 I_0 为实数

量）。使用恒等式 $\mathrm{j}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2}$ 可得

$$\tilde{I}=V_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\phi_0-\pi/2)}\left[\frac{\mathrm{j}\omega C}{1+\mathrm{j}\omega RC}\right]=V_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\phi_0-\pi/2)}\left[\frac{\omega C\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2}}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_1}}\right]=\frac{V_0\omega C}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\phi_0-\phi_1)},\tag{1.67}$$

其中，相角 $\phi_0=\tan^{-1}(\omega RC)$，位于复平面的第一象限。 26

步骤 5：求瞬时值

为求得 $i(t)$，应用式（1.61）即可。将式（1.67）给定的 $\tilde{I}$ 乘以 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$，然后取实部得：

$$i(t)=\mathfrak{Re}[\tilde{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathfrak{Re}\left[\frac{V_0\omega C}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\phi_0-\phi_1)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]=\frac{V_0\omega C}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}\cos(\omega t+\phi_0-\phi_1)\tag{1.68}$$

总之，把所有时变量转换成相量，对感兴趣的瞬变量 $i(t)$，解得其相量 $\tilde{I}$，然后转换回时域，即得 $i(t)$的表达式。表 1-5 给出了部分时域函数及其对应的相量。

表 1-5 时域正弦函数 $z(t)$ 及余弦参照下的相量等效 $\tilde{Z}$，其中 $z(t)=\mathfrak{Re}[\tilde{Z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$

$z(t)$		$\tilde{Z}$
$A\cos\omega t$	↔	A
$A\cos(\omega t+\phi_0)$	↔	$A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_0}$
$A\cos(\omega t+\beta x+\phi_0)$	↔	$A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta x+\phi_0)}$
$A\mathrm{e}^{-\alpha x}\cos(\omega t+\beta x+\phi_0)$	↔	$A\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta x+\phi_0)}$
$A\sin\omega t$	↔	$A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}$
$A\sin(\omega t+\phi_0)$	↔	$A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\phi_0-\pi/2)}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(z_1(t))$	↔	$\mathrm{j}\omega\tilde{Z}_1$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[A\cos(\omega t+\phi_0)]$	↔	$\mathrm{j}\omega A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_0}$
$\int z_1(t)\mathrm{d}t$	↔	$\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\tilde{Z}_1$
$\int A\sin(\omega t+\phi_0)\mathrm{d}t$	↔	$\frac{1}{\mathrm{j}\omega}A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\phi_0-\pi/2)}$

例 1-4 *RL* 电路

图 1-20 所示电路中的电压源为

$$v_s(t)=5\sin(4\times10^4t-30°)\quad(\mathrm{V})\tag{1.69}$$

试求电感两端的电压表达式。

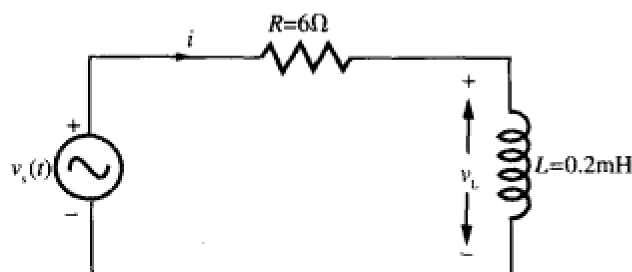


图 1-20 RL 电路（例 1-4）

解答：RL 电路的回路电压方程为

$$Ri + L\frac{di}{dt} = v_s(t) \tag{1.70}$$

在将方程（1.70）转换成相量方程前，先把式（1.69）表示成余弦形式

$$v_s(t) = 5\sin(4\times10^4 t - 30°) = 5\cos(4\times10^4 t - 120°) \quad (\text{V}) \tag{1.71}$$

其中，t 的系数为角频率，$\omega = 4\times10^4$（rad/s）。对应 $v_s(t)$ 的电压相量为

$$\tilde{V}_s = 5e^{-j120°} \quad (\text{V}),$$

对应方程（1.70）的相量方程为

[27]

$$R\tilde{I} + j\omega L\tilde{I} = \tilde{V}_s \tag{1.72}$$

求解 $\tilde{I}$ 得

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_s}{R + j\omega L} = \frac{5e^{-j120°}}{6 + j4\times10^4\times2\times10^{-4}} = \frac{5e^{-j120°}}{6+j8} = \frac{5e^{-j120°}}{10e^{j53.1°}} = 0.5e^{-j173.1°} \quad (\text{A})$$

电感两端的电压相量同 $\tilde{I}$ 的关系为

$$\tilde{V}_L = j\omega L\tilde{I} = j4\times10^4\times2\times10^{-4}\times0.5e^{-j173.1°} = 4e^{j(90°-173.1°)} = 4e^{-j83.1°} \quad (\text{V}),$$

因此，相应的瞬时电压 $v_L(t)$ 为

$$v_L(t) = \Re e[\tilde{V}_L e^{j\omega t}] = \Re e[4e^{-j83.1°}e^{j4\times10^4 t}] = 4\cos(4\times10^4 t - 83.1°) \quad (\text{V})$$ ■

复习题

Q1.12 相量法的好处在哪里？在什么情况下使用？试描述其使用过程。

Q1.13 当激励（力函数）为周期性非正弦波形时，譬如一系列脉冲时，如何使用相量法？

练习 1.5 一 RL 串联电路中的电压源为 $v_s(t) = 150\cos\omega t$（V）。当 $R = 400\Omega$，$L = 3\text{mH}$，$\omega = 10^5\text{rad/s}$ 时，求：（a）电流相量 $\tilde{I}$；（b）瞬时电流 $i(t)$。

答案：（a）$\tilde{I} = 150/(R + j\omega L) = 0.3\angle{-36.9°}$（A），（b）$i(t) = 0.3\cos(\omega t - 36.9°)$（A）。（参见光盘）

练习 1.6 电压相量为 $\tilde{V} = j5\text{V}$。求 $v(t)$。

答案：$v(t) = 5\cos(\omega t + \pi/2) = -5\sin\omega t$（V）。（参见光盘）

本章要点

- 电磁学研究电、磁现象及其工程应用。

- 国际单位制包括表 1-1 所列 6 个基本量纲。所有其他物理量的单位可以用这 6 个基本量纲的单位表示。
- 自然界的 4 个基本力是核力、弱相互作用力、电磁力、引力。
- 电场量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 的源是电荷 q。在材料中，$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$ 的关系为 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$，这里 ε 是材料的介电常数。在真空中，$\varepsilon=\varepsilon_0\approx(1/36\pi)\times10^{-9}(\text{F/m})$。
- 磁场量 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的源是电流 I。在材料中，$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$ 的关系为 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$，这里 μ 是材料的磁导率。在真空中，$\mu=\mu_0=4\pi\times10^{-7}$（H/m）。
- 电磁学包括三个分支：（1）静电学，对应静止电荷；（2）静磁学，对应恒定电流；（3）电动力学，对应时变电流。
- 行波具有空间波长 λ，时间周期 T 以及相速 $u_p=\lambda/T$。
- 电磁波由振荡的电场和磁场构成，其在真空中的传播速度为光速 $c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$。电磁波谱中有伽马射线、X 射线、可见光、红外线以及无线电波。
- 相量分析是求解时变周期激励问题的有效数学工具。

28

重要术语汇总

请解释下列术语的意义或给出定义

国际单位制	基本量纲	库仑定律	电场强度 $\boldsymbol{E}$
电荷守恒定律	线性叠加原理	电偶极子	电极化
介电常数 ε	相对介电常数 ε_r	电通密度 $\boldsymbol{D}$	静电学
静磁学	磁通密度 $\boldsymbol{B}$	磁导率 μ	光速 c
非磁性材料	磁场强度 $\boldsymbol{H}$	电动力学	电导率 σ
理想电介质	理想导体	构造参数	瞬态波
连续时谐波	波幅	波的周期 T	波长 λ
参考相位 ϕ_0	相速（传播速度）u_p	波的频率 f	角速度 ω
相位常数（波数）β	相位超前与滞后	衰减系数	衰减常数 α
电磁波谱	微波波段	复数	欧拉恒等式
共轭复数	力函数	相量	瞬时函数

习题

1.4　行波

1.1* 空气中沿 x 方向传播的声波，频率为 4kHz，在 $x=0,t=25\mu\text{s}$ 处的压差为 $p(x,t)=5\text{N/m}^2$。如果 $p(x,t)$ 的参考相位为 42°，求 $p(x,t)$ 的完整表达式。空气中声速为 330m/s。

1.2 对于例 1-1 中描述的压力波，绘出：(a) $t=0$ 时，$p(x,t)$ 关于 x 的曲线；(b) $x=0$ 处，$p(x,t)$ 关于 t 的曲线。注意采用适当的 x、t 比例，以便至少画出两个周期的波。

1.3* 已知沿绳子传播的一个时谐波由每分钟振动120次的振荡器产生。若观测到一个最

---

* 答案见附录 D。

29

大值点在10s内移动了250cm，则其波长是多少？

1.4 已知两个波 $y_1(t)$、$y_2(t)$ 具有相同的幅值、频率，但 $y_2(t)$ 比 $y_1(t)$ 超前60°相角。若

$$y_1(t)=4\cos(2\pi\times10^3t)$$

写出 $y_2(t)$ 的表达式，并绘出二者在0ms～2ms时间范围内的波形。

1.5* 海洋波浪的高度用以下函数描述

$$y(x,t)=1.5\sin(0.5t-0.6x)\quad(\text{m})$$

试确定相速以及波长，并示意性地绘出在 $t=2\text{s}$ 时 $y(x,t)$ 关于 x 的曲线（x 从 $0\sim2\lambda$）。

1.6 波 $y_1(x,t)$ 沿绳子的正 x 方向传播

$$y_1(x,t)=A\cos(\omega t-\beta x)$$

其中 $x=0$ 对应固定在墙上的一端，如图1-21所示。当波 $y_1(x,t)$ 到达墙端时，产生反射波 $y_2(x,t)$。因此在绳子上任意点，垂直位移 y_s 等于入射波和反射波之和，即

$$y_s(x,t)=y_1(x,t)+y_2(x,t)$$

(a) 写出 $y_2(x,t)$ 的表达式。注意墙端点是不能动的，记清传播方向。

(b) 在 $\omega t=\pi/4$ 和 $\omega t=\pi/2$ 两个时刻，绘出 $-2\lambda\leqslant x\leqslant0$ 范围内 $y_1(x,t)$、$y_2(x,t)$、$y_s(x,t)$ 关于 x 的曲线。

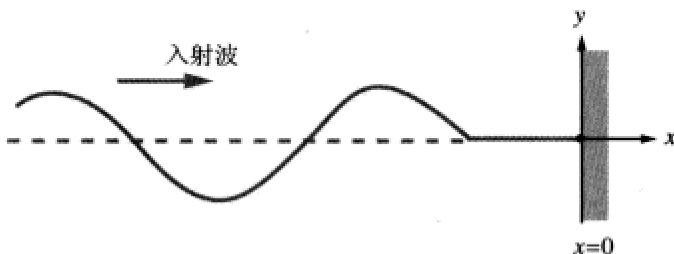


图1-21 一端固定在墙上的绳子上的波（习题1.6）

1.7* 绳子上的两个波分别为

$$y_1(x,t)=3\cos(20t-30x)\quad(\text{cm})$$
$$y_2(x,t)=-3\cos(20t+30x)\quad(\text{cm})$$

其中 x 的单位为cm。当它们的叠加 $|y_s|=|y_1+y_2|$ 为最大值时，称两波发生相长干涉；当叠加为最小值时，则称发生相消干涉。试确定

(a) 波 $y_1(x,t)$、$y_2(x,t)$ 各沿哪个方向传播？

(b) 在 $t=(\pi/50)\text{s}$ 时，在 x 轴的何处发生相长干涉？对应的 $|y_s|$ 是多少？

(c) 在 $t=(\pi/50)\text{s}$ 时，在 x 轴的何处发生相消干涉？对应的 $|y_s|$ 是多少？

1.8 对于沿绳子的负 x 方向传播的正弦波 $y(x,t)$，已知 $y_{max}=20\text{cm}$，$\lambda=30\text{cm}$，$f=5\text{Hz}$，求下述两种情况下的 $y(x,t)$ 表达式

(a) 在 $x=0$ 处，$y(x,0)=0$；

30

(b) 在 $x=7.5\text{cm}$ 处，$y(x,0)=0$。

1.9* 一个振荡器在30s内振动了20次，产生的正弦波沿绳子传播，其波峰在5s钟内沿绳子移动了2.8m。试确定其波长。

1.10 绳子的垂直位移为以下时谐函数

解答见CD-ROM。

$$y(x,t)=5\cos(12\pi t-12\pi x) \quad (\mathrm{m})$$

其中 x 为沿绳子的水平距离，单位为 m。假定在绳子上 $x=5\mathrm{m}$ 处黏附有一微小颗粒，试求其垂直速度的时间函数。

1.11* 对于以下两个波

$$y_1(t)=6\cos\omega t$$

$$y_2(t)=6\sin(\omega t+30°)$$

试问 $y_2(t)$ 是超前还是滞后 $y_1(t)$？相应的相位角度是多少？

1.12 有一电磁波在传输线上传播，其电压为

$$v(z,t)=3e^{-\alpha z}\sin(2\pi\times10^9 t-10\pi z) \quad (\mathrm{V})$$

其中 z 为到发电机的距离，单位为 m。

(a) 试确定波的频率、波长、相速。

(b) 在 $z=2\mathrm{m}$ 处，测得波的幅值为 1V，求 α。

1.13* 某电磁波在海水中传播，在 10m 深处测得电场的幅值为 19.025(V/m)，在 100m 处测得幅值为 12.13(V/m)。求海水的衰减常数。

1.6 复数

1.14 计算下列复数，将结果表示为直角坐标形式

(a) $z_1=3e^{j\pi/4}$

(b) $z_2=\sqrt{3}e^{j3\pi/4}$

(c) $z_3=2e^{-j\pi/2}$

(d) $z_4=j^3$

(e) $z_5=j^{-4}$

(f) $z_6=(1-j)^3$

(g) $z_7=(1-j)^{1/2}$

1.15* 复数 z_1 及 z_2 如下

$$z_1=3-j2$$

$$z_2=-4+j2$$

(a) 用极坐标形式表示 z_1 和 z_2。

(b) 分别应用式（1.41）和式（1.43）两种方法求 $|z_1|$。

(c) 以极坐标形式求乘积 z_1z_2。

(d) 以极坐标形式求比值 z_1/z_2。

(e) 以极坐标形式计算 z_1^3。

1.16 如果 $z=-2+j3$，以极坐标形式确定

(a) $1/z$

(b) z^3

(c) $|z|^2$

(d) $\mathfrak{Im}\{z\}$

(e) $\mathfrak{Im}\{z^*\}$

1.17* 对于以下情况

(a) $z_1=2+j3$，$z_2=1-j2$。

31

(b) $z_1=2$，$z_2=-j2$。

(c) $z_1=3\angle 30^\circ$，$z_2=3\angle -30^\circ$。

(d) $z_1=3\angle 30^\circ$，$z_2=3\angle -150^\circ$。

用极坐标形式分别计算 $t=z_1+z_2$，$s=z_1-z_2$。

1.18 已知两复数

$z_1=5\angle -60^\circ$

$z_2=2\angle 45^\circ$

(a) 以极坐标形式求乘积 z_1z_2。

(b) 以极坐标形式求乘积 $z_1z_2^*$。

(c) 以极坐标形式求比值 z_1/z_2。

(d) 以极坐标形式求比值 z_1^*/z_2^*。

(e) 以极坐标形式求 $\sqrt{z_1}$。

1.19* 如果 $z=3-j4$，求 $\ln(z)$。

1.20 如果 $z=3-j4$，求 e^z。

1.7 相量

1.21* 如图1-19所示，电压源

$$v_s(t)=10\cos(2\pi\times10^3t-30^\circ)\quad(\text{V})$$

带 RC 串联负载，$R=1\text{M}\Omega$，$C=100\text{pF}$。试确定电容两端的电压 $v_c(t)$。

1.22 求以下时间函数的相量

(a) $v(t)=3\cos(\omega t-\pi/4)\quad(\text{V})$

(b) $v(t)=12\sin(\omega t+\pi/4)\quad(\text{V})$

(c) $i(x,t)=4e^{-3x}\sin(\omega t-\pi/6)\quad(\text{A})$

(d) $i(t)=-2\cos(\omega t+3\pi/4)\quad(\text{A})$

(e) $i(t)=2\sin(\omega t+\pi/3)+3\cos(\omega t-\pi/6)\quad(\text{A})$

1.23* 求对应以下相量的时域正弦函数

(a) $\tilde{V}=-3e^{j\pi/3}\quad(\text{V})$

(b) $\tilde{V}=j6e^{j\pi/4}\quad(\text{V})$

(c) $\tilde{I}=(3+j4)\quad(\text{A})$

(d) $\tilde{I}=-3+j2\quad(\text{A})$

(e) $\tilde{I}=j\quad(\text{A})$

(f) $\tilde{I}=2e^{j3\pi/4}\quad(\text{A})$

1.24 RLC 串联电路连接到电压源 $v_s(t)=V_0\cos(\omega t+\pi/3)\quad(\text{V})$。

(a) 用电流 $i(t)$，R、L、C 以及 $v_s(t)$ 写出电压回路方程。

(b) 求对应的相量方程。

(c) 解方程求电流相量 $\tilde{I}$ 表达式。

32

1.25～1.29 附加习题——题目及完整解答见光盘。

第2章 传 输 线

2.1 概述

在大多数学校的电气工程课程安排中，在电磁学之前，往往先开设一门或几门电路方面的课程。本书利用这一背景，建立电路理论与电磁学之间的桥梁。传输线就是这个桥梁，它也是本章的主题。经过采用等效电路对传输线建模，就可以由基尔霍夫电压、电流定律推导出波动方程，而波动方程的解答可以使学生对波的传播、驻波及功率传输等概念有深入了解。这些概念的熟悉可使后面章节材料的学习容易许多。

从概念上讲，传输线（transmission line）可以包含所有在两点之间传输能量或信息的媒介和结构，如人体内的神经纤维、传导声波的流体和传导机械压力波的固体等，但本章仅讨论用于传导电磁信号的传输线。这类传输线包括电话线，将音频视频信号送往电视机、将数据送往计算机显示器的同轴电缆、承载光波以高速率传输数据的光纤等。基本上讲，传输线就是一个双端口网络，每个端口有两个端子，如图2-1所示。一个端口为发送端，另外一个为接收端。连接到发送端的激励源可以是任何具有输出电压的电路，如雷达发射器、放大器或者工作在发送模式的计算机端口。根据电路理论，任何这种类型的激励源，都可以用一个发电机电压 V_g 和一个发电机电阻 R_g 相串联的戴维南等效发电机电路来表示，如图2-1所示。发电机电压可以包括数字脉冲、调制的时变正弦信号或任何其他波形的信号。在交流信号的情况下，发电机电路可以用一个电压相量 $\tilde{V}_g$ 和一个阻抗 Z_g 表示。



图2-1　传输线为一个双端口网络，其发送端接发电机电路，接收端接负载

传输线接收端所连的电路称负载电路，或简称负载（load）。负载可以是在雷达中的天线、处于接收模式的计算机端口、放大器的输入端或任何可以等效为负载电阻 R_L（交流时为负载阻抗 Z_L）的输出电路。

2.1.1 波长的作用

在低频电路中，通常用电线把电路元件连接成希望的电路结构。例如，在图2-2所示的电路中，一对电线把发电机连接到简单的 RC 负载。联想前面关于传输线构成的定义，我们就会问：位于端子 AA' 和端子 BB' 间的一对电线是否构成一条传输线

呢？如果是的话，其重要性又体现在何处？在平时求解电路电流及元件两端的电压时，根本就没考虑连接元件的电线。可是这一对电线确实构成了一条传输线！但其对电路电流与电压的影响取决于其长度 l 及发电机所提供的信号的频率 f（在后面将看到，传输线长度 l 同 AA' 与 BB' 间所传输波的波长 λ 二者的比值才是决定性的因素）。如果发电机电压是按余弦规律变化的，则输入端口 AA' 上的电压为

$$V_{AA'} = V_g(t) = V_0 \cos\omega t \quad (\mathrm{V}), \tag{2.1}$$

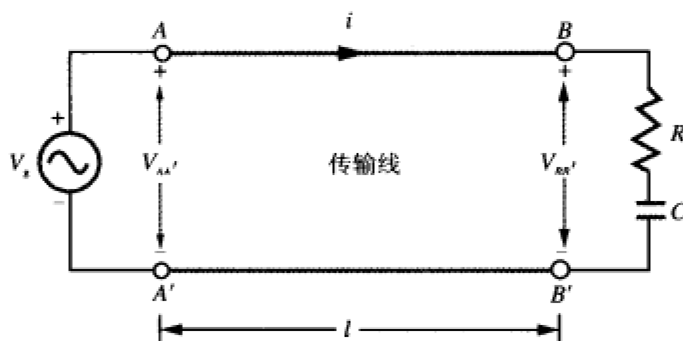


图 2-2 发电机经长度为 l 的传输线连接到 RC 电路

其中，$\omega = 2\pi f$ 是角频率，如果假定电流流过电线的速度为光速 $c = 3\times10^8\mathrm{m/s}$，则输出端口 BB' 的电压将相对 AA' 端口延迟 l/c 的时间。若假定传输线没有显著的欧姆损耗，则

$$V_{BB'}(t) = V_{AA'}(t - l/c) = V_0\cos[\omega(t - l/c)] \quad (\mathrm{V}) \tag{2.2}$$

让我们来比较工作在 $f = 1\mathrm{kHz}$ 频率下的超低频电子电路在 $t = 0$ 时刻的 $V_{BB'}$ 和 $V_{AA'}$。对于典型的导线长度 5cm，由式（2.1）和式（2.2）可得 $V_{AA'} = V_0$，$V_{BB'} = V_0\cos(2\pi fl/c) = 0.999999999998V_0$。因此，在实际电路中，这种传输线长度可以忽略，端口 AA' 可以认为同端口 BB' 是相同的。相反，如果是一条 20km 的电话线上载有 1kHz 的语音信号，则经过同样的计算可得 $V_{BB'} = 0.91V_0$。可见，$\omega l/c$ 的数值才是决定性因素！根据式（1.27），行波的传播速度 u_p 同其振荡频率 f、波长 λ 之间符合以下关系

$$u_p = f\lambda \quad (\mathrm{m/s}) \tag{2.3}$$

在以上讨论中，$u_p = c$，因此，相位系数为

$$\frac{\omega l}{c} = \frac{2\pi fl}{c} = 2\pi\frac{l}{\lambda} \quad (\mathrm{rad}) \tag{2.4}$$

36

当 l/λ 很小时，传输线的影响可以忽略；但当 $l/\lambda \geq 0.01$ 时，可能就不仅要考虑相位延迟引起的延时，而且还要考虑可能存在的由负载反射回发电机的反射信号。此外，可能还要考虑传输线上的**功率损耗**（power loss）以及**色散效应**（dispersive effect）。色散传输线的特点在于波速与频率 f 之间的关系不是常数。这意味着方波脉冲的形状经传输线传播之后将发生变形，因为由傅里叶级数分解可知，方波是由各种不同频率的分量组成的，它们在传输线上将以不同的速度传播（见图 2-3）。在高速数据传输中，保持脉冲形状是极其重要的。对端口之间的传输线如此，对高速集成电路中传输线的设计、制造与 IC 设计浑然一体的情况也是如此。例如，当频率为 10GHz

时，在空气中的波长是 $\lambda=3\text{cm}$，而在半导体材料中则是 1cm 的数量级。因此，即使设备之间的连接线长度只有毫米数量级，其影响也是很显著的，其存在必须考虑到整个电路的设计中去。

无色散线

短色散线

长色散线

图 2-3 无色散线无论长度多少，都不会引起传输的信号畸变；而色散线则导致传输的信号发生形状畸变，因为不同频率的分量以不同的速度传播。畸变的程度与色散线的长度成正比

2.1.2 传播模式

图 2-4 所示为常用传输线的一些例子。传输线可以分成两种基本类型

金属 2b 2a 电介质分隔

(a) 同轴电缆

d 2a

(b) 双线线路

金属 w d 电介质分隔

(c) 平行板线路

金属 电介质分隔

(d) 带状传输线

金属带导体 w d 金属接地层 电介质分隔

(e) 微带线

TEM传输线

金属

(f) 矩形波导管

同心电介质层

(g) 光纤

金属 金属接地层 电介质分隔

(h) 共面波导

高阶传输线

图 2-4 横向电磁波（TEM）传输线及高阶传输线的例子

- **横向电磁（TEM）传输线**：在这种传输线上传播的电磁波，其特点是电场、磁场都完全垂直于传播方向。这称为TEM模式。图2-5所示的同轴电缆是一个很好的例子。其中，电力线位于内、外层导体之间，沿径向；磁力线则构成环行，环绕着内导体；因此两者都不存在沿传输线长度的方向（即波传播的方向）。TEM传输线的其他例子还有图2-4所示的双线线路以及平行板线路等。尽管微带线的场不满足TEM模式的精确定义，但其非横向分量的场相比于横向分量是微不足道的，因此微带线也可以归为TEM类。TEM线的一个共同特点是它们由两个平行的传导面构成。

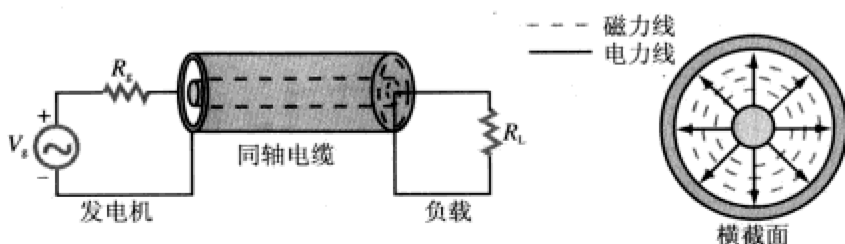


图2-5 在同轴电缆中，电力线位于内外层导体之间，方向沿径向，而磁力线形成圆环，环绕内导体

- **高阶传输线**：这种传输线上传播的电磁波至少有一个主导的场分量是沿着传播方向的。空腔波导管、介质棒、光纤等属于这一类型。

本章只处理TEM模式的传输线。这一方面是因为，相比高阶传输线，处理TEM传输线要求的严谨数学推导很少；另一方面，TEM传输线在实际中更为常用。首先建立传输线的集中参数模型，然后应用基尔霍夫电压、电流定律推导传输线的两个基本方程，即**电报方程**（telegrapher's equation）。组合这两个方程，得到传输线上任意一点的电压和电流的波动方程。针对正弦稳态问题对波动方程求解，所得的一组公式可以解决大量实际问题。在本章的较后位置，将介绍一种做图技术，即**史密斯圆图**（Smith chart），它可免去繁重的复数计算，使许多传输线问题的求解变得容易。

37
38

2.2 集中参数模型

在绘制电子线路原理图时，采用特定的符号表示电阻、电容、电感、二极管等元件。这些符号代表的是元件的功能，而不是其形状、尺寸或其他属性。这里用同样的方法来处理传输线：不论实际的传输线形状如何，都采用平行导线结构来表示，如图2-6a所示。因此，图2-6a可以代表同轴电缆、双线线路或者其他TEM线。

回到我们所熟悉的电子电路，当分析含晶体管的电路时，我们用一个包含电源、电阻及电容的等效电路来代替晶体管的功能。这里用同样的方法处理传输线：将传输线沿 z 方向放置，并分割成长度为 Δz 的小段，如图2-6b所示，然后用等效电路表示每个小段，如图2-6c所示。传输线的这种表示形式称**集中参数电路**（lumped-element circuit）模型，它包括四个基本元件，对应着四个**传输线参数**（transmission line parameter），分别是

R'：两导体每单位长度的合成电阻，单位为 Ω/m；
L'：两导体每单位长度的合成电感，单位为 H/m；
G'：绝缘介质每单位长度的电导，单位为 S/m；
C'：两导体每单位长度的电容，单位为 F/m。

尽管不同类型和尺寸的传输线具有不同的传输线参数表达式，但图 2-6c 所示的等效模型却适用于所有传输 TEM 模式电磁波的传输线。传输线参数符号上的一撇“′”，用以表示该参数是差分量，是每单位长度的数值。

39

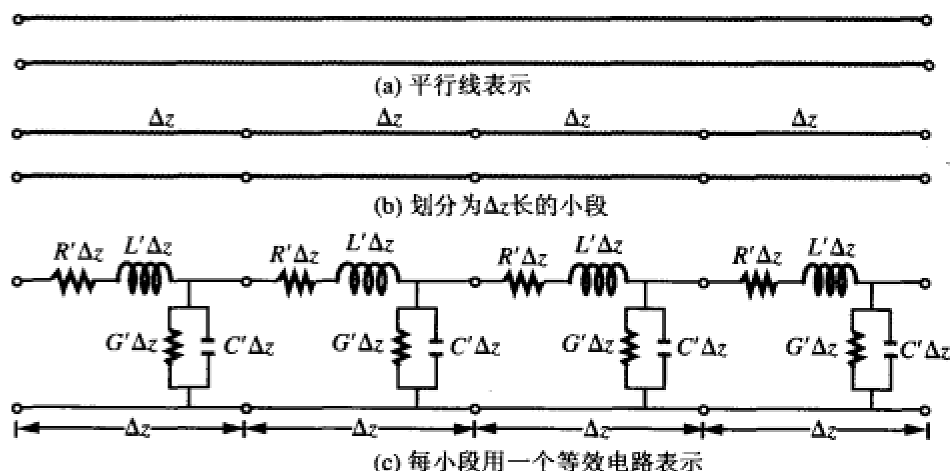


图 2-6 不管传输线的实际形状如何，都用图（a）所示的平行线结构表示 TEM 模式的传输线。为了分析电压和电流之间的关系，将线细分为图（b）所示的小段，然后每段用图（c）所示的等效电路表示

表 2-1 给出了图 2-4a ~ 图 2-4c 所示三种 TEM 传输线的参数 R'、L'、G'、C'的表达式。这些传输线的参数表达式都是两组参数的函数：（1）定义传输线横截面尺度的几何参数；（2）构成传输线的导体及绝缘材料的电磁构造参数。不同形状传输线的几何参数如下

表 2-1 三种传输线的传输线参数 R'、L'、G'、C'

参数	同轴电缆	双线线路	平行板电路	单位
R'	$\frac{R_s}{2\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$	$\frac{R_s}{\pi a}$	$\frac{2R_s}{w}$	Ω/m
L'	$\frac{\mu}{2\pi}\ln(b/a)$	$\frac{\mu}{\pi}\ln\left[(d/2a)+\sqrt{(d/2a)^2-1}\right]$	$\frac{\mu d}{w}$	H/m
G'	$\frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}$	$\frac{\pi\sigma}{\ln\left[(d/2a)+\sqrt{(d/2a)^2-1}\right]}$	$\frac{\sigma w}{d}$	S/m
C'	$\frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$	$\frac{\pi\varepsilon}{\ln\left[(d/2a)+\sqrt{(d/2a)^2-1}\right]}$	$\frac{\varepsilon w}{d}$	F/m

注：（1）尺寸定义参见图 2-4；（2）ε、μ 和 σ 为导体之间的绝缘材料的参数；（3）$R_s=\sqrt{\pi f\mu_c/\sigma_c}$；（4）$\mu_c$ 和 σ_c 为导体的参数；（5）如果 $(d/2a)^2\gg1$，则 $\ln\left[(d/2a)+\sqrt{(d/2a)^2-1}\right]\approx\ln(d/a)$。

同轴电缆(图 2-4a)

a = 内层导体的外半径，单位为 m

b = 外层导体的内半径，单位为 m

双线线路(图 2-4b)

a = 每线的半径，单位为 m

b = 两线中心距，单位为 m

平行板线路(图 2-4c)

w = 每板宽度，单位为 m

40

d = 板间绝缘厚度，单位为 m

构造参数对于三种传输线是相同的，分为两组：μ_c 和 σ_c 分别是导体的磁导率和电导率；ε、μ 和 σ 则分别是分隔导体的绝缘材料的介电常数、磁导率和电导率。附录 B 列出了不同材料的构造参数。从本章来讲，读者没有必要关心表 2-1 所列表达式的出处。在后续的章节，将针对任意两导体结构的一般情况，给出传输线参数 R'、L'、G'、C' 的计算公式。

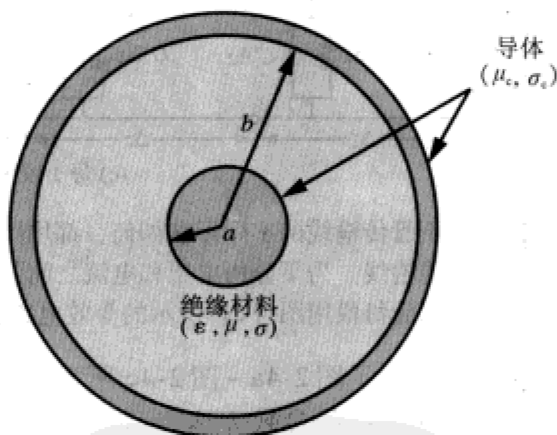


图 2-7 内导体半径为 a、外导体半径为 b 的同轴电缆的横截面图。导体的磁导率为 μ_c、电导率为 σ_c，导体之间的填充材料的介电常数为 ε、磁导率为 μ、电导率为 σ

图 2-6c 的集中参数模型，代表了任何 TEM 传输线上与电压、电流相关的物理过程。尽管还存在另外一些等效模型，但它们同集中参数模式是可以互相替代的，从所有这些模型出发，导出的都是完全相同的一组电报方程（它是后面所有结论的源头）。因此，以下仅探讨图 2-6c 所示的模型。它包括两个串联元件 R'、L'，以及两个并联元件 G'、C'。为了对集中参数模型提供一个物理解释，下面研究图 2-7 所示同轴电缆的一小段。该传输线包括一根半径为 a 的内导体、一根半径为 b 的外部导电圆柱体，中间由介电常数为 ε、磁导率为 μ、电导率为 σ 的材料隔离。两金属导体所用材料的

41

电导率为 σ_c，磁导率为 μ_c。在传输线的发送端，将两导体连接到电压源时，导体中将有电流流过，该电流将主要沿内导体的外表面以及外导体的内表面分布。传输线参数 R' 代表内外导体每单位长度的合成电阻。第 7 章推出了 R' 的计算式（7.96），式子如下

$$R' = \frac{R_s}{2\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \quad (\Omega/\text{m}), \tag{2.5}$$

其中，R_s 代表导体的表面电阻，称为本征电阻，由式（7.72a）给定为

$$R_s = \sqrt{\frac{\pi f \mu_c}{\sigma_c}} \quad (\Omega) \tag{2.6}$$

可见，本征电阻的数值不仅依赖于导体材料的特性（σ_c和μ_c），还跟导体所传输的波的频率f有关。对于理想导体（$\sigma_c=\infty$）或电导率很高以致$(f\mu_c/\sigma_c)\ll1$的材料，R_s接近于零，所以R'也接近于零。

现在来看每单位长度电感L'。将安培定律用到电感的定义中，可以获得同轴电缆单位长度的电感表达式：

$$L'=\frac{\mu}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\quad(\mathrm{H/m})\tag{2.7}$$

具体的推导见第5章的式（5.99）。

每单位长度的并联电导G'用以考虑内外导体间流过的电流，这种电流是由绝缘材料的电导率σ非零引起的。在集中参数模型中，G'之所以是并联元件，完全是因为它的电流是从一个导体流到另外一个导体的。其表达式由式（4.76）给出为

$$G'=\frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}\quad(\mathrm{S/m})\tag{2.8}$$

如果分隔内外导体的材料是理想电介质，即$\sigma=0$，则有$G'=0$。

最后一个传输线参数是每单位长度的电容C'。当符号相反、等值的电荷放在任何两个非接触的导体上时，就会在它们之间引起电位差。电容定义为电荷对电位差之比。对于同轴电缆的情况，式（4.117）给出的C'为

$$C'=\frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}\quad(\mathrm{F/m})\tag{2.9}$$

所有TEM模式的传输线都满足以下关系

$$L'C'=\mu\varepsilon,\tag{2.10}$$

以及

$$\frac{G'}{C'}=\frac{\sigma}{\varepsilon}\tag{2.11}$$

42

如果导体之间的绝缘媒介是空气，则相应的传输线称为架空线（air line），如同轴架空线、双线架空线等。对于架空线，$\varepsilon=\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}\,\mathrm{F/m}$，$\mu=\mu_0=4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{H/m}$，$\sigma=0,G'=0$。

复习题

Q2.1 什么是传输线？什么情况下需考虑传输线的影响？

Q2.2 色散传输线与非色散传输线的区别是什么？这种差别有什么实际意义？

Q2.3 TEM模式的传输线是由什么构成的？

Q2.4 在传输线研究中，采用集中参数电路模型的目的是什么？传输线参数R'、L'、G'、C'是如何同传输线的物理特性、电磁构造特性相关的？

练习2.1 利用表2-1，计算双线架空线的传输线参数。假定双线分隔的距离为2cm，每线半径为1mm，导线可以作理想导体处理，即$\sigma_c=\infty$。

答案：$R'=0$，$L'=1.20(\mu\mathrm{H/m})$，$G'=0,C'=9.29(\mathrm{pF/m})$。（参见●）

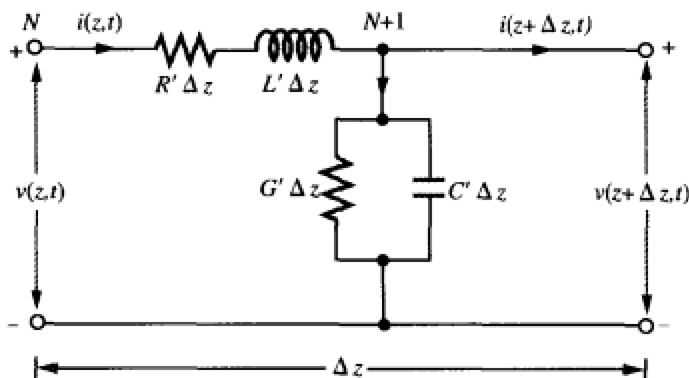
练习2.2 一根同轴架空线，内导体直径为0.6cm，外导体直径为1.2cm，导体材料为铜材（请从附录B查取铜的μ_c和σ_c）。求频率为1MHz时该传输线的参数。

答案：$R'=2.08\times10^{-2}(\Omega/\mathrm{m})$，$L'=0.14(\mu\mathrm{H/m})$，$G'=0,C'=80.3(\mathrm{pF/m})$。（参见●）

2.3　传输线方程

传输线通常在一端连接电源，另外一端连接负载。在考虑完整电路之前，需先导出传输线的电压及电流方程，将二者表示成时间 t、空间位置 z 的函数形式。利用图2-6c所示的集中参数模型，先考虑图2-8所示的一小段长度 Δz。用 $v(z,t)$ 和 $i(z,t)$ 表示该小段左端（节点 N）的瞬时电压和电流，用 $v(z+\Delta z,t)$ 和 $i(z+\Delta z,t)$ 表示右端（节点 $N+1$）的电压和电流。应用基尔霍夫电压定律，考虑到串联电阻 $R'\Delta z$ 与电感 $L'\Delta z$ 的压降，有

$$v(z,t)-R'\Delta z i(z,t)-L'\Delta z\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}-v(z+\Delta z,t)=0 \tag{2.12}$$



43

图2-8　双导体传输线一小段 Δz 的等效电路

将各项除以 Δz，并重新整理，可得

$$-\left[\frac{v(z+\Delta z,t)-v(z,t)}{\Delta z}\right]=R'i(z,t)+L'\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \tag{2.13}$$

在 $\Delta z\to 0$ 的极限情况下，式（2.13）变为以下偏微分方程形式

$$-\frac{\partial v(z,t)}{\partial z}=R'i(z,t)+L'\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \tag{2.14}$$

同样，在图2-8的节点 $N+1$ 应用基尔霍夫电流定律，可得

$$i(z,t)-G'\Delta z v(z+\Delta z,t)-C'\Delta z\frac{\partial v(z+\Delta z,t)}{\partial t}-i(z+\Delta z,t)=0 \tag{2.15}$$

将各项除以 Δz 并取极限 $\Delta z\to 0$，由式（2.15）得到第二个偏微分方程

$$-\frac{\partial i(z,t)}{\partial z}=G'v(z,t)+C'\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \tag{2.16}$$

式（2.14）和式（2.16）给出的一阶偏微分方程，是时域形式的传输线方程（transmission line equation），也称电报方程。

除了最后一节，本章的主要兴趣将集中在正弦稳态问题上。因此，利用1.7节介绍的cos参考相量表示法，定义

$$v(z,t)=\Re\mathfrak{e}[\tilde{V}(z)e^{j\omega t}], \tag{2.17a}$$

$$i(z,t)=\mathfrak{Re}[\tilde{I}(z)e^{j\omega t}],\qquad(2.17b)$$

其中，$\tilde{V}(z)$和$\tilde{I}(z)$是相量，可以是实数或复数。将式（2.17a）和式（2.17b）代入方程（2.14）与方程（2.16），并利用式（1.62）所给的性质，即时域中的$\partial/\partial t$在相量域中等效于乘以$j\omega$，可以得到下面一对方程

$$-\frac{d\tilde{V}(z)}{dz}=(R'+j\omega L')\tilde{I}(z),\qquad(2.18a)$$

$$-\frac{d\tilde{I}(z)}{dz}=(G'+j\omega C')\tilde{V}(z)\qquad(2.18b)$$

这就是相量形式的电报方程。

2.4 波在传输线上的传播

方程（2.18a）和（2.18b）的两个一阶耦合方程，可以进行组合求解，导出两个无耦合的二阶波动方程，一个是关于$\tilde{V}(z)$的，另一个是关于$\tilde{I}(z)$的。为了导出$\tilde{V}(z)$的方程，对方程（2.18a）两端对z求导，得

$$-\frac{d^2\tilde{V}(z)}{dz^2}=(R'+j\omega L')\frac{d\tilde{I}(z)}{dz},\qquad(2.19)$$

将方程（2.18b）代入方程（2.19），消除$d\tilde{I}(z)/dz$，得

$$\frac{d^2\tilde{V}(z)}{dz^2}-(R'+j\omega L')(G'+j\omega C')\tilde{V}(z)=0,\qquad(2.20)$$

或

$$\frac{d^2\tilde{V}(z)}{dz^2}-\gamma^2\tilde{V}(z)=0,\qquad(2.21)$$

其中

$$\gamma=\sqrt{(R'+j\omega L')(G'+j\omega C')}\qquad(2.22)$$

44

采用上面的方法处理方程（2.18a）和方程（2.18b）同样的步骤，只是顺序相反，可以得到

$$\frac{d^2\tilde{I}(z)}{dz^2}-\gamma^2\tilde{I}(z)=0\qquad(2.23)$$

方程（2.21）和方程（2.23）分别称为$\tilde{V}(z)$和$\tilde{I}(z)$的**波动方程**（wave equation），其中γ称为传输线的**复传播常数**（complex propagation constant）。γ有一个实部α，称为传输线的**衰减常数**（attenuation constant），单位为Np/m；一个虚部β，称为相位常数，单位为rad/m。所以

$$\gamma=\alpha+j\beta\qquad(2.24)$$

其中

$$\alpha=\mathfrak{Re}(\gamma)=\mathfrak{Re}\left(\sqrt{(R'+j\omega L')(G'+j\omega C')}\right)\quad(\text{Np/m}),\qquad(2.25a)$$

$$\beta=\mathfrak{Im}(\gamma)=\mathfrak{Im}\left(\sqrt{(R'+j\omega L')(G'+j\omega C')}\right)\quad(\text{rad/m})\qquad(2.25b)$$

在式（2.25a）和式（2.25b）中，取平方根的正值，以得到正的α和β。对于无源

传输线，α 要么为零，要么为正。大多数传输线，以及本章考虑的所有传输线，都是无源的。激光的有源区是有源传输线的一个例子，其中的 α 为负。

波动方程（2.21）和（2.23）具有以下形式的行波解

$$\tilde{V}(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z} \quad (V), \tag{2.26a}$$

$$\tilde{I}(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{\gamma z} \quad (A), \tag{2.26b}$$

其中，$e^{-\gamma z}$项表示沿正 z 方向传播的波，$e^{\gamma z}$项表示沿负 z 方向传播的波，这一点在后面将进行证明。要验证以上解的正确性很容易，只需将式（2.26a）和式（2.26b）以及它们的二阶导数代入方程（2.21）和（2.23）即可。此时，式（2.26a）和（2.26b）给出的解包含有4个未知数，即沿正 z 方向传播的波的幅值(V_0^+, I_0^+)，以及沿负 z 方向传播的波的幅值(V_0^-, I_0^-)。很容易建立电流波的幅值 I_0^+ 或 I_0^- 分别同电压波幅值 V_0^+ 或 V_0^- 之间的关系：先将式（2.26a）代入式（2.18a），然后求取 $\tilde{I}(z)$得

$$\tilde{I}(z) = \frac{\gamma}{R' + j\omega L'}[V_0^+ e^{-\gamma z} - V_0^- e^{\gamma z}] \tag{2.27}$$

比较上式与式（2.26b）的对应项，可以得到

$$\frac{V_0^+}{I_0^+} = Z_0 = \frac{-V_0^-}{I_0^-}, \tag{2.28}$$

其中

$$Z_0 = \frac{R' + j\omega L'}{\gamma} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \quad (\Omega), \tag{2.29}$$

称为传输线的特征阻抗（characteristic impedance）。需要指出的是：Z_0等于各个行波独自的电压幅值与电流幅值之比（对于沿负 z 方向传播的波，还需加个负号），而不是等于总的电压 $\tilde{V}(z)$同总的电流 $\tilde{I}(z)$之比，除非两个波只有一个存在。利用 Z_0，式（2.27）可以重写为

45

$$\tilde{I}(z) = \frac{V_0^+}{Z_0}e^{-\gamma z} - \frac{V_0^-}{Z_0}e^{\gamma z} \tag{2.30}$$

在后面几节里，将在传输线的负载端以及发送端施加边界条件，以获得剩余波的幅值 V_0^+、V_0^- 的表达式。通常，二者都将是包含幅值和相角的复数量。即

$$V_0^+ = |V_0^+|e^{j\phi^+}, \tag{2.31a}$$

$$V_0^- = |V_0^-|e^{j\phi^-} \tag{2.31b}$$

把这个定义代入式（2.26a），并用式（2.24）替换 γ，可以转换回时域而得到表达式 $v(z,t)$，即线上的瞬时电压

$$\begin{aligned} v(z,t) &= \mathfrak{Re}(\tilde{V}(z)e^{j\omega t}) = \mathfrak{Re}[(V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z})e^{j\omega t}] \\ &= \mathfrak{Re}[\,|V_0^+|e^{j\phi^+}e^{j\omega t}e^{-(\alpha+j\beta)z} + |V_0^-|e^{j\phi^-}e^{j\omega t}e^{(\alpha+j\beta)z}] \\ &= |V_0^+|e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \phi^+) + |V_0^-|e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z + \phi^-) \end{aligned} \tag{2.32}$$

利用1.4节所复习的行波知识，可以从式（2.32）中辨识出第一项为沿正 z 方向传播的行波（t 和 z 的系数具有相反的符号），而第二项则为沿负 z 方向传播的行波（t 和

z 的系数具有相同的符号），二者以式（1.30）所给定的相同的相速 u_p 传播

$$u_p = f\lambda = \frac{\omega}{\beta} \tag{2.33}$$

系数 $e^{-\alpha z}$ 表示沿正 z 方向传播的波的衰减，$e^{\alpha z}$ 表示沿负 z 方向传播的波的衰减。两个波在传输线上沿相反方向传播，产生**驻波**（standing wave）。为了从物理意义上理解驻波，将先分析相对简单、但却十分重要的特例，即**无损线**（lossless line）的情况（$\alpha=0$），然后推广其结论到到更加一般化的**有损传输线**（lossy transmission line）的情况（$\alpha\neq0$）。事实上，接下来的几节都将用于研究无损传输线，因为在实际中，很多传输线都可以设计成具有很低的损耗。

例 2-1 架空线

架空线是采用空气作为两导体间的电介质的一种传输线，具有 $G'=0$ 的特点。另外，其导体采用高电导率的材料，有 $R'\approx0$。对于在 700MHz 下特征阻抗为 50Ω，相位常数为 20rad/m 的情况，求该传输线每米的电感以及电容。

解答：已知 $Z_0=50\Omega$， $\beta=20\text{rad/m}$， $f=700\text{MHz}=7\times10^8\text{Hz}$

因为 $R'=G'=0$，故式（2.25b）和式（2.29）简化为

$$\beta = \Im\text{m}\left(\sqrt{(j\omega L')(j\omega C')}\right) = \Im\text{m}\left(j\omega\sqrt{L'C'}\right) = \omega\sqrt{L'C'},$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega L'}{j\omega C'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

二者的比值为

$$\frac{\beta}{Z_0} = \omega C',$$

或

$$C' = \frac{\beta}{\omega Z_0} = \frac{20}{2\pi\times7\times10^8\times50} = 9.09\times10^{-11}(\text{F/m}) = 90.9(\text{pF/m})$$

46

从 $Z_0=\sqrt{L'/C'}$ 可得

$$L' = Z_0^2C' = (50)^2\times90.9\times10^{-12} = 2.27\times10^{-7}(\text{H/m}) = 227(\text{nH/m})$$ ■

练习 2.3 证明式（2.26a）确实是波动方程（2.21）的一个解。（参见●）

练习 2.4 一双线架空线的参数为：$R'=0.404(\text{m}\Omega/\text{m})$，$L'=2.0(\mu\text{H/m})$，$G'=0$，$C'=5.56(\text{pF/m})$。若运行在 5kHz，试确定：（a）衰减常数 α；（b）相位常数 β；（c）相速 u_p；（d）特征阻抗 Z_0。（参见●）

答案：（a）$\alpha=3.37\times10^{-7}(\text{Np/m})$；（b）$\beta=1.05\times10^{-4}(\text{rad/m})$；（c）$u_p=3.0\times10^8(\text{m/s})$；（d）$Z_0=(600-j2.0)\Omega=600\angle{-0.19^\circ}\ \Omega$。

2.5 无损传输线

根据上节，传输线有两个基本特性，即传播常数 γ 和特征阻抗 Z_0，二者都是由角频率 ω 以及传输线参数 R'、L'、G' 和 C' 决定的。在许多实际应用中，通过采用极高电导率的导体及可忽略电导率的介电材料（用于分隔导体），可使传输线达到最小的欧姆损耗。结果 R'、G' 呈现很小的数值，以致 $R'\ll\omega L'$ 及 $G'\ll\omega C'$。这就是传输线

可以看成无损线的条件。基于这一条件，可以将式（2.22）中的R'、G'设置为0，从而有

$$\gamma=\alpha+\mathrm{j}\beta=\mathrm{j}\omega\sqrt{L'C'},\tag{2.34}$$

这意味着

$$\alpha=0\quad（无损线），$$
$$\beta=\omega\sqrt{L'C'}\quad（无损线）。\tag{2.35}$$

将无损线条件应用于式（2.29），得到特征阻抗为

$$Z_0=\sqrt{\frac{L'}{C'}}\quad（无损线），\tag{2.36}$$

它变成了一个实数。利用式（2.35）所给的无损线的β，得到波长λ、相速u_p如下

$$\lambda=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{2\pi}{\omega\sqrt{L'C'}},\tag{2.37}$$

$$u_p=\frac{\omega}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{L'C'}}\tag{2.38}$$

利用所有TEM传输线共同满足的关系式（2.10），式（2.35）和式（2.28）可重写为

$$\beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\quad(\mathrm{rad/m}),\tag{2.39}$$

$$u_p=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\quad(\mathrm{m/s}),\tag{2.40}$$

其中，μ、ε分别是分隔导体的绝缘材料的磁导率和介电常数。用于这种目的的材料，其磁导率往往为$\mu=\mu_0$，即真空中的磁导率（$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\mathrm{H/m}$），而介电常数则用相对介电常数表示，即

47

$$\varepsilon_r=\varepsilon/\varepsilon_0,\tag{2.41}$$

这里，$\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}\mathrm{F/m}\approx(1/36\pi)\times10^{-9}(\mathrm{F/m})$，是真空中的介电常数。因此，式（2.40）变成为

$$u_p=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}}=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}\tag{2.42}$$

这里，$c=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=3\times10^8\mathrm{m/s}$，为真空中的光速。如果导体之间的绝缘材料为空气，则$\varepsilon_r=1$、$u_p=c$。考虑到式（2.41）以及λ和u_p之间的关系式（2.33），可以得到波长为

$$\lambda=\frac{u_p}{f}=\frac{c}{f}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}=\frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}},\tag{2.43}$$

这里，$\lambda_0=c/f$，是空气中对应频率f的波长。注意，因为u_p和λ都依赖于ε_r，因此，在选择传输线的绝缘材料时，不仅要考虑材料的机械特性，也要考虑其电特性。

当媒介的相速与频率无关时，称为**非色散的**（nondispersive）媒介。这显然是无损TEM传输线的特征。这个特征对于脉冲形式的数据传输是极其重要的。单个脉冲或脉冲序列是由许多不同频率的傅里叶分量构成的，当脉冲在传输线上传播时，如

果所有频率的分量（起码应包含那些主导分量）具有相同的相速，那么脉冲的形状就会保持不变。相反，在色散媒介上传播的脉冲，其形状将逐渐变形，随着离开媒介的距离的增加，脉冲的长度也增加（展开），因次，在不丢失数据信息的条件下，限制了媒介能够传输数据的最大速率（它跟单个脉冲的长度以及相邻脉冲的间隔有关）。

表 2-2 列出了一般情况的有损线及几种无损线的 γ、Z_0 和 u_p 的表达式。其中无损线的表达式由表 2-1 所给的 L'、C' 方程得来。

表 2-2 传输线的特征参数

	传播常数 $\gamma=\alpha+j\beta$	相速 u_p	特征阻抗 Z_0
一般情况	$\gamma=\sqrt{(R'+j\omega L')(G'+j\omega C')}$	$u_p=\omega/\beta$	$Z_0=\sqrt{\dfrac{(R'+j\omega L')}{(G'+j\omega C')}}$
无损线（通式）($R'=G'=0$)	$\alpha=0, \beta=\omega\sqrt{\varepsilon_r}/c$	$u_p=c/\sqrt{\varepsilon_r}$	$Z_0=\sqrt{L'/C'}$
无损同轴电缆	$\alpha=0, \beta=\omega\sqrt{\varepsilon_r}/c$	$u_p=c/\sqrt{\varepsilon_r}$	$Z_0=(60/\sqrt{\varepsilon_r})\ln(b/a)$
无损双线线路	$\alpha=0, \beta=\omega\sqrt{\varepsilon_r}/c$	$u_p=c/\sqrt{\varepsilon_r}$	$Z_0=(120/\sqrt{\varepsilon_r})\cdot\ln[(d/2a)+\sqrt{(d/2a)^2-1}]$ $Z_0\simeq(120/\sqrt{\varepsilon_r})\ln(d/a)$，当 $d\gg a$ 时
无损平行板线路	$\alpha=0, \beta=\omega\sqrt{\varepsilon_r}/c$	$u_p=c/\sqrt{\varepsilon_r}$	$Z_0=(120\pi/\sqrt{\varepsilon_r})(d/w)$

注：(1) $\mu=\mu_0$，$\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$，$c=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$，$\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\simeq(120\pi)\Omega$，其中 ε_r 为绝缘材料的相对介电常数；(2) 对于同轴电缆，a、b 是内外导体的半径；(3) 对于双线线路，a = 导线半径，d = 导线中心距；(4) 对于平行板线路，w = 板宽，d = 板间距。

练习 2.5 一无损传输线，在 1GHz 时的 $\lambda=20.7$cm。求绝缘材料的 ε_r。

答案：$\varepsilon_r=2.1$。（参见●）

练习 2.6 一无损传输线，其电介质绝缘材料的 $\varepsilon_r=4$。如果线路电容为 $C'=10$(pF/m)，求 (a) 相速 u_p；(b) 线路电感 L'；(c) 特征阻抗 Z_0。

答案：(a) $u_p=1.5\times10^8$(m/s)；(b) $L'=4.45$(μH/m)；(c) $Z_0=667.1\Omega$。（参见●）

2.5.1 电压反射系数

因为无损线的 $\gamma=j\beta$，线路总电压、总电流的表达式 (2.26a)、(2.30) 变为

$$\tilde{V}(z)=V_0^+e^{-j\beta z}+V_0^-e^{j\beta z}, \tag{2.44a}$$

$$\tilde{I}(z)=\frac{V_0^+}{Z_0}e^{-j\beta z}-\frac{V_0^-}{Z_0}e^{j\beta z} \tag{2.44b}$$

以上表达式包括两个未知数 V_0^+ 和 V_0^-，分别对应入射波和反射波的电压幅值。为了确定 V_0^+ 和 V_0^-，有必要考虑无损传输线的整个电路，包括输入端口的发电机，以及输出端口的负载，如图 2-9 所示。线路长度为 l，终结于一个任意的负载阻抗 Z_L。为方便起见，选择负载位置作为空间坐标 z 的参考点，对应 $z=0$。在 $z=-l$ 的发送端，线路连接到一个电压相量为 $\tilde{V}_g$、内阻抗为 Z_g 的电压源。在负载端，负载阻抗 Z_L 把两端的电压相量 $\tilde{V}_L$ 和流过其中的电流相量 $\tilde{I}_L$ 关联在一起

48

$$Z_L = \frac{\tilde{V}_L}{\tilde{I}_L} \tag{2.45}$$

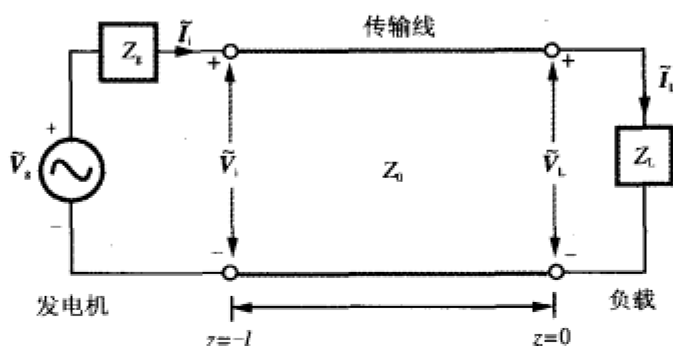


图 2-9 长度为 l 的传输线，一端连到发电机电路，另外一端连到负载 Z_L。负载位于 $z=0$ 处，发电机位于 $z=-l$ 处

这里的电压 $\tilde{V}_L$、电流 $\tilde{I}_L$ 分别等于在 $z=0$ 处由式（2.44a）给定的线路总电压 $\tilde{V}(z)$，及由式（2.44b）给定的电流 $\tilde{I}(z)$ 的数值

$$\tilde{V}_L = \tilde{V}(z=0) = V_0^+ + V_0^-, \tag{2.46a}$$

$$\tilde{I}_L = \tilde{I}(z=0) = \frac{V_0^+}{Z_0} - \frac{V_0^-}{Z_0} \tag{2.46b}$$

将它们代入式（2.45）得

$$Z_L = \left(\frac{V_0^+ + V_0^-}{V_0^+ - V_0^-}\right) Z_0 \tag{2.47}$$

求解 V_0^- 得

$$V_0^- = \left(\frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}\right) V_0^+ \tag{2.48}$$

49 在负载处，反射电压波与入射电压波二者的幅值之比，定义为电压反射系数（voltage reflection coefficient），以 Γ 表示。由式（2.48）得

$$\Gamma = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{Z_L/Z_0 - 1}{Z_L/Z_0 + 1} \quad \text{（无量纲）}, \tag{2.49a}$$

考虑到式（2.28），电流的幅值比为

$$\frac{I_0^-}{I_0^+} = -\frac{V_0^-}{V_0^+} = -\Gamma \tag{2.49b}$$

可以看出，Γ 决定于单个参数，即用传输线的特性阻抗 Z_0 进行归一化后的负载阻抗 Z_L。式（2.36）表明，无损线的 Z_0 是个实数。但 Z_L 通常却是复数量，譬如 RL 串联电路的情况，其 $Z_L = R + j\omega L$。因此，通常 Γ 也是复数

$$\Gamma = |\Gamma| e^{j\theta_r}, \tag{2.50}$$

其中，$|\Gamma|$ 为 Γ 的模，θ_r 为其相角。注意 $|\Gamma| \leq 1$。

如果 $Z_L = Z_0$，则称负载同线路是匹配的，因为此时将不会有来自负载的反射（$\Gamma = 0$ 及 $V_0^- = 0$）。另一方面，当负载开路时（$Z_L = \infty$），有 $\Gamma = 1$ 及 $V_0^- = V_0^+$；当负载短路时（$Z_L = 0$），则有 $\Gamma = -1$ 及 $V_0^- = -V_0^+$。

例 2-2 串联 *RC* 负载的反射系数

一个 100Ω 的传输线，连接到一个由 50Ω 的电阻与 10pF 的电容相串联的负载。当信号为 100MHz 时，求在负载处的反射系数。

解答：已知量如下（见图 2-10）

$$R_L = 50\Omega, \quad C_L = 10\text{pF} = 10^{-11}\text{F},$$
$$Z_0 = 100\Omega, \quad f = 100\text{MHz} = 10^8\text{Hz}$$

负载阻抗为

$$Z_L = R_L - j/\omega C_L = 50 - j\frac{1}{2\pi \times 10^8 \times 10^{-11}} = (50 - j159)(\Omega)$$

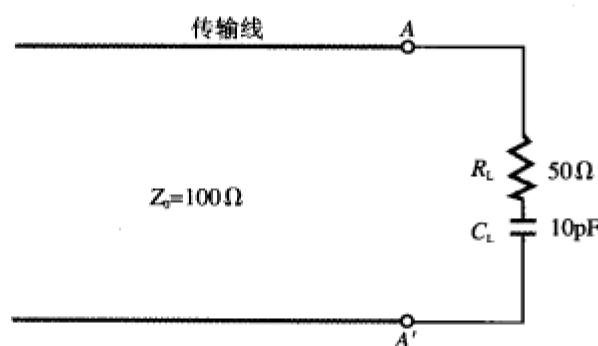


图 2-10 *RC* 负载（例 2-2）

50

由式（2.49a）得到电压反射系数为

$$\Gamma = \frac{Z_L/Z_0 - 1}{Z_L/Z_0 + 1} = \frac{0.5 - j1.59 - 1}{0.5 - j1.59 + 1} = \frac{-0.5 - j1.59}{1.5 - j1.59} = \frac{-1.67e^{j72.6°}}{2.19e^{-j46.7°}} = -0.76e^{j119.3°}$$

将负号用 $e^{-j180°}$ 替换，Γ 的结果可以转换成正幅值的形式：

$$\Gamma = 0.76e^{j119.3°}e^{-j180°} = 0.76e^{-j60.7°} = 0.76\angle{-60.7°},$$

或

$$|\Gamma| = 0.76, \quad \theta_r = -60.7°$$

■

例 2-3 纯无功负载的 |Γ|

证明对于纯无功负载，$|\Gamma| = 1$。

解答：纯无功负载的负载阻抗为

$$Z_L = jX_L$$

由式（2.49a）得到反射系数为

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{jX_L - Z_0}{jX_L + Z_0} = \frac{-(Z_0 - jX_L)}{(Z_0 + jX_L)} = \frac{-\sqrt{Z_0^2 + X_L^2}e^{-j\theta}}{\sqrt{Z_0^2 + X_L^2}e^{j\theta}} = -e^{-j2\theta},$$

其中，$\theta = \tan^{-1}X_L/Z_0$。因此

$$|\Gamma| = |-e^{-j2\theta}| = [(e^{-j2\theta})(e^{-j2\theta})^*]^{1/2} = 1$$ ■

练习 2.7　50Ω 的无损线端接一个负载阻抗 $Z_L = (30 - j200)\Omega$。计算负载处的电压反射系数。

答案：$\Gamma = 0.93\angle{-27.5°}$。（参见❀）

练习 2.8　一 150Ω 的无损线，端接一个阻抗为 $Z_L = -j30\Omega$ 的电容，试计算 Γ。

答案：$\Gamma = 1\angle{-157.4°}$。（参见❀）

2.5.2　驻波

将关系 $V_0^- = \Gamma V_0^+$ 代入式（2.44a）和（2.44b）可得

$$\tilde{V}(z) = V_0^+(e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}), \tag{2.51a}$$

$$\tilde{I}(z) = \frac{V_0^+}{Z_0}(e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z}), \tag{2.51b}$$

其中只包含一个有待确定的未知数，即 V_0^+。在求取 V_0^+ 之前，先看看以上公式所表示的物理意义。从推导 $\tilde{V}(z)$ 的幅值 $|\tilde{V}(z)|$ 表达式着手。将式（2.50）代入式（2.51a），并利用关系 $|\tilde{V}(z)| = [\tilde{V}(z)\tilde{V}^*(z)]^{1/2}$，其中 $\tilde{V}^*(z)$ 为 $\tilde{V}(z)$ 的共轭复数，可得

$$\begin{aligned} |\tilde{V}(z)| &= \{[V_0^+(e^{-j\beta z} + |\Gamma|e^{j\theta_r}e^{j\beta z})] \cdot [(V_0^+)^*(e^{j\beta z} + |\Gamma|e^{-j\theta_r}e^{-j\beta z})]\}^{1/2} \\ &= |V_0^+|[1 + |\Gamma|^2 + |\Gamma|(e^{j(2\beta z+\theta_r)} + e^{-j(2\beta z+\theta_r)})]^{1/2} \\ &= |V_0^+|[1 + |\Gamma|^2 + 2|\Gamma|\cos(2\beta z + \theta_r)]^{1/2}, \end{aligned} \tag{2.52}$$

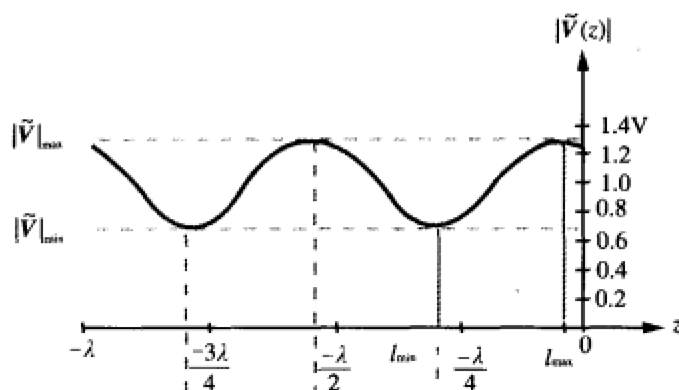
其中应用了恒等式

51

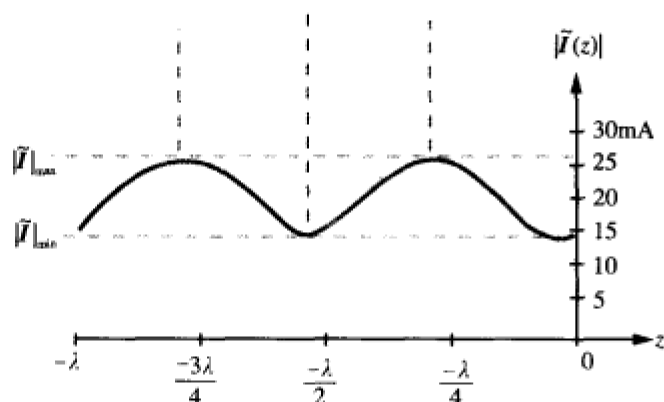
$$e^{jx} + e^{-jx} = 2\cos x \tag{2.53}$$

其中，x 为任意实数。对式（2.51b）应用相同的步骤，可以得到电流 $\tilde{I}(z)$ 的幅值 $|\tilde{I}(z)|$，其形式同 $|\tilde{V}(z)|$ 类似。

$|\tilde{V}(z)|$ 及 $|\tilde{I}(z)|$ 随 z 变化的曲线如图 2-11 所示。其中 z 为传输线上的位置，以负载端为 $z=0$；线路相关参数为 $|V_0^+| = 1\text{V}$，$|\Gamma| = 0.3$，$\theta_r = 30°$，$Z_0 = 50\Omega$。这种正弦模式称为驻波，它是由两个波的干涉（interference）引起的。在线路上，驻波电压 $|\tilde{V}(z)|$ 波型取得最大值的点时，其入射波与反射波同相（in phase），即式（2.52）中 $2\beta z + \theta_r = -2n\pi$，因此二者是相长干涉的，相应的值为 $(1+|\Gamma|)|V_0^+| = 1.3\text{V}$。而 $|\tilde{V}(z)|$ 取得最小值的点时，则发生相消干涉，入射波与反射波反相（in phase opposition），即 $2\beta z + \theta_r = -(2n+1)\pi$，相应的数值为 $|\tilde{V}(z)| = (1-|\Gamma|)|V_0^+| = 0.7\text{V}$。尽管入射波和反射波的重复周期都是 λ，驻波波型的重复周期却是 $\lambda/2$。驻波波型把 $\tilde{V}(z)$ 的幅值在空间上的变化情况，表示成了 z 的函数。如果观测任一固定点 z 处的瞬时电压随时间的变化，例如，观测驻波波型中最大值点的电压，将发现其随 $\cos\omega t$ 变化，幅值为 1.3V（即 $v(t)$ 将在 −1.3V ~ +1.3V 之间振荡）。同样，$v(z,t)$ 在任何点 z 处随时间的振荡，其振荡幅值将等于该处的 $|\tilde{V}(z)|$。



(a) $|\tilde{V}(z)|$随z变化的模式



(b) $|\tilde{I}(z)|$随z变化的模式

图 2-11　无损线上的驻波电压幅值、电流幅值的模式

(a) 电压幅值 $|\tilde{V}(z)|$；(b) 电流幅值 $|\tilde{I}(z)|$。其中无损线的特征阻抗为 $Z_0=50\Omega$，负载反射系数为 $\Gamma=0.3e^{j30^\circ}$。入射波的幅值为 $|V_0^+|=1\text{V}$。驻波比为 $S=|\tilde{V}|_{max}/|\tilde{V}|_{min}=1.3/0.7=1.86$

仔细观察图 2-11 的电压和电流驻波波型，将发现两个波型是反相的（当一个为最大时，另外一个则为最小。反之亦然）。出现这一现象的原因在于，式（2.51a）的第二项前面是正号“+”，而式（2.51b）的第二项前面为负号“−”。

图 2-11 中的驻波波型，其 $\Gamma=0.3e^{j30^\circ}$，是典型情况。波型的峰−峰值变化量取决于$|\Gamma|$，$|\Gamma|$的范围为 0~1。对于负载匹配的特殊情况（$Z_L=Z_0$），在任何 z 位置，都有$|\Gamma|=0$、$|\tilde{V}(z)|=|V_0^+|$，如图 2-12a 所示。没有反射波时，就不会有干涉和驻波出现。另外一个极端是$|\Gamma|=1$，对应于负载短路（$\Gamma=-1$）和开路（$\Gamma=1$）两种情况，它们的驻波波型如图 2-12b、图 2-12c 所示。二者的最大值都是 $2|V_0^+|$，最小值都是 0，但波型在 z 轴上彼此位移了 $\lambda/4$ 的距离。

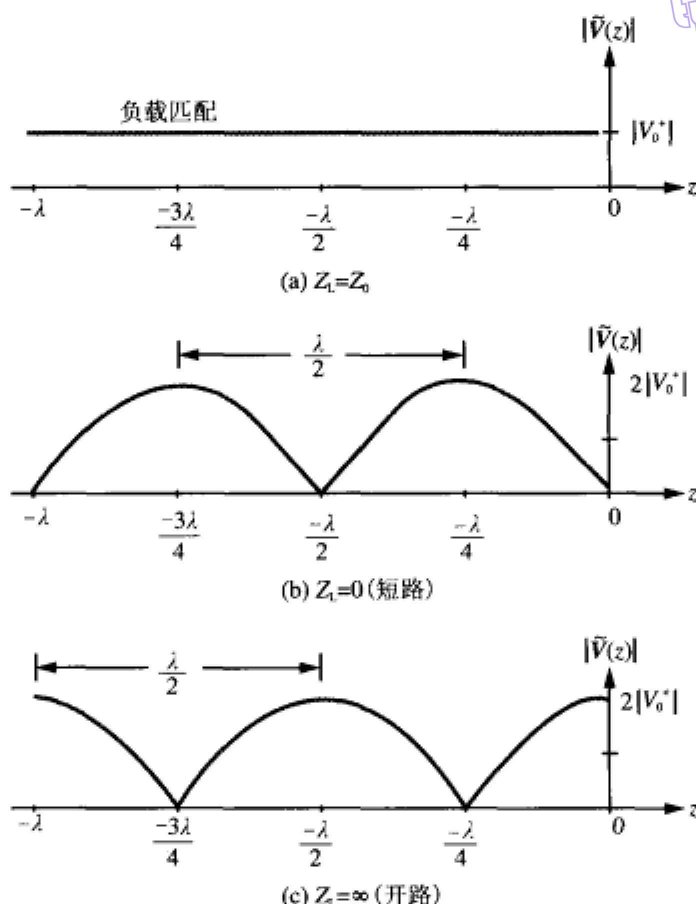


图 2-12　电压驻波波型

(a) 负载匹配；(b) 负载短路；(c) 负载开路

下面讨论电压幅值的最大值和最小值。从式（2.52）可见，当 cos 的参数等于0或 2π的整数倍时，$|\tilde{V}(z)|$为最大值。因为负载位于 $z=0$ 处，因此线上的位置 z 总是负的，如果用 $l_{max}=-z$ 表示$|\tilde{V}(z)|$的最大值点到负载的距离，则有

$$|\tilde{V}(z)|=|\tilde{V}|_{max}=|V_0^+|[1+|\Gamma|],\tag{2.54}$$

这发生在

$$2\beta z+\theta_r=-2\beta l_{max}+\theta_r=-2n\pi\tag{2.55}$$

其中，$n=0$ 或正整数。从式（2.55）中求解 l_{max}，得

$$-z=l_{max}=\frac{\theta_r+2n\pi}{2\beta}=\frac{\theta_r\lambda}{4\pi}+\frac{n\lambda}{2},\quad\begin{cases}n=1,2,\cdots & \text{当 } \theta_r<0 \text{ 时},\\ n=0,1,2,\cdots & \text{当 } \theta_r\geqslant 0 \text{ 时},\end{cases}\tag{2.56}$$

其中，应用了关系式 $\beta=2\pi/l$。θ_r为电压反射系数的相角，范围为 $-\pi\sim\pi$。如果 $\theta_r\geqslant0$，则第一个电压最大值出现在 $l_{max}=\theta_r l/4\pi$处，对应 $n=0$；若 $\theta_r<0$，则第一个合理的最大值出现在 $l_{max}=(\theta_r l/4\pi)+\lambda/2$ 处，对应 $n=1$。负的 l_{max}对应比负载端点更远的位置，没有物理意义。如前所述，传输线上电压最大的点，对应着电流最小的点，反

之亦然。

同样，$|\tilde{V}(z)|$最小值发生的位置 $l_{min}=-z$ 对应着式（2.52）中 cos 的参数等于 $-(2n+1)\pi$，因此

$$|\tilde{V}|_{min}=|V_0^+|[1-|\Gamma|],\text{当}(\theta_r-2\beta l_{min})=-(2n+1)\pi\text{时}, \tag{2.57}$$

53

其中，$-\pi\leqslant\theta_r\leqslant\pi$。第一个最小值对应 $n=0$。最大值的 l_{max} 同其相邻的最小值的 l_{min} 间的距离为 $\lambda/4$。所以，第一个最小值发生在

$$l_{min}=\begin{cases}l_{max}+\lambda/4, & \text{当 } l_{max}<\lambda/4 \text{ 时},\\ l_{max}-\lambda/4, & \text{当 } l_{max}\geqslant\lambda/4 \text{ 时}\end{cases} \tag{2.58}$$

$|\tilde{V}|_{max}$ 同 $|\tilde{V}|_{min}$ 的比值，称**电压驻波比**（voltage standing-wave ratio），用 S 表示。利用式（2.54）和（2.57）可得

$$S=\frac{|\tilde{V}|_{max}}{|\tilde{V}|_{min}}=\frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}\quad\text{（无量纲）} \tag{2.59}$$

电压驻波比常简写成 VSWR 或 SWR，它为负载与传输线间的不匹配程度提供了一种量度。对于匹配的负载，$\Gamma=0$，因此 $S=1$；对于 $|\Gamma|=1$ 的情况，$S=\infty$。

 **M2.1**

复习题

Q2.5　衰减常数 α 代表欧姆损耗。对于图 2-6c 中的模型，为使损耗为零，R'、G'应该取何值？应用式（2.25a）给定的 α 表达式，验证你的答案。

Q2.6　波在传输线上传播的波长 λ 同其在真空中传播的波长 λ_0 有何关系？

Q2.7　在什么情况下负载同传输线是匹配的？其重要性体现在何处？

Q2.8　什么是驻波波形？为何其周期为 $\lambda/2$ 而非 λ？

Q2.9　传输线上电压最大值位置与相邻的电流最大值位置之间的分隔距离是多少？

例 2-4　驻波比

一 50Ω 的传输线接有 $Z_L=(100+j50)\Omega$ 的负载。求电压反射系数以及电压驻波比（SWR）。

解答：根据式（2.49a），有

$$\Gamma=\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0}=\frac{(100+j50)-50}{(100+j50)+50}=\frac{50+j50}{150+j50}$$

将分子分母转换成极坐标形式，并简化得

$$\Gamma=\frac{70.7e^{j45^\circ}}{158.1e^{j18.4^\circ}}=0.45e^{j26.6^\circ}$$

利用式（2.59）中 S 定义，有

$$S=\frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}=\frac{1+0.45}{1-0.45}=2.6$$ ■

例 2-5　Z_L的测量

开槽测试线（slotted-line）探针是用于测量负载阻抗 Z_L的仪器。如图 2-13 所示，

在同轴开槽线的外导体上开有狭长的切口；将一个小探针插入切口，对电场的幅值进行采样，从而得到线上的电压幅值 $|\tilde{V}|$；沿着开槽线的长度方向移动探针，就有可能测得 $|\tilde{V}|_{max}$ 和 $|\tilde{V}|_{min}$ 以及它们相对负载点出现的位置；最后利用式（2.59）就可以得到电压驻波比 S。若将一个50Ω的开槽线连到未知负载，测得 $S=3$；相邻的两个电压最小值距离为30cm，第一个电压最小值距离负载12cm。试确定负载阻抗 Z_L。

54

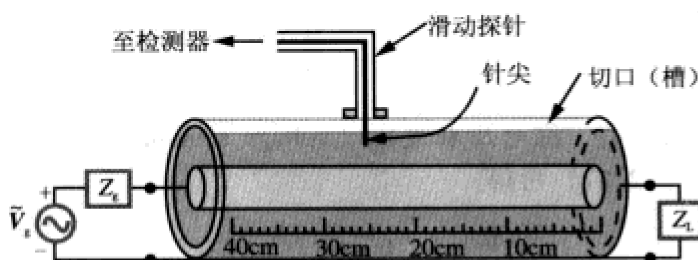


图2-13　开槽同轴线（例2-5）

解答：已知

$$Z_0=50\Omega,\quad S=3,l_{min}=12\text{cm}$$

因为相邻的两个电压最小值相距 $\lambda/2$，所以

$$\lambda=2\times0.3=0.6(\text{m}),$$

及

$$\beta=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{0.6}=\frac{10\pi}{3}\quad(\text{rad/m})$$

利用式（2.59），解出 $|\Gamma|$ 关于 S 的表达式

$$|\Gamma|=\frac{S-1}{S+1}=\frac{3-1}{3+1}=0.5$$

然后，利用式（2.57）所给的电压最小值发生的条件，可求得 θ_r

$$\theta_r-2\beta l_{min}=-\pi,\quad(\text{对应第一个最小值},n=0)$$

由此可得

$$\theta_r=2\beta l_{min}-\pi=2\times\frac{10\pi}{3}\times0.12-\pi=-0.2\pi(\text{rad})=-36°$$

因此

$$\Gamma=|\Gamma|e^{j\theta_r}=0.5e^{-j36°}=0.405-j0.294$$

由式（2.49a）求解 Z_L，得

$$Z_L=Z_0\left[\frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}\right]=50\left[\frac{1+0.405-j0.294}{1-0.405+j0.294}\right]=(85-j67)(\Omega)$$ ■

练习2.9　如果 $\Gamma=0.5\angle{-60°}$，$\lambda=24$cm，求最靠近负载的电压最大值和最小值位置。
答案：$l_{max}=10$cm，$l_{min}=4$cm。（参见◉）

练习2.10　一根140Ω的无损线接负载阻抗 $Z_L=(280+j182)\Omega$。如果 $\lambda=72$cm，求（a）反射系数 Γ；（b）电压驻波比 S；（c）电压最大值的位置；（d）电压最小值的

位置。

答案：(a) $\Gamma=0.5\angle 29^{\circ}$；(b) $S=3.0$；(c) $l_{max}=2.9\text{cm}+n\lambda/2$；(d) $l_{min}=20.9\text{cm}+n\lambda/2$。其中 $n=0,1,2,\cdots$。(参见●)

2.6 无损线的输入阻抗

驻波波型表明，对于不匹配的传输线，其电压、电流的幅值沿传输线位置表现出振荡模式，并且二者彼此反相。这就意味着，电压对电流的比值，即输入阻抗（input impedance）Z_{in}，也将随位置变化。利用式（2.51a）和式（2.51b），得 Z_{in} 为

$$Z_{in}(z)=\frac{\widetilde{V}(z)}{\widetilde{I}(z)}=\frac{V_0^+[e^{-j\beta z}+\Gamma e^{j\beta z}]}{V_0^+[e^{-j\beta z}-\Gamma e^{j\beta z}]}Z_0=Z_0\left[\frac{1+\Gamma e^{j2\beta z}}{1-\Gamma e^{j2\beta z}}\right]\ (\Omega) \tag{2.60}$$

55

注意：$Z_{in}(z)$是在任一点 z 处，总电压（入射与反射波的电压之和）对总电流的比值，它不同于传输线的特征阻抗 Z_0，Z_0是两个波中单独某一个波的电压与电流的比值（$Z_0=V_0^+/I_0^+=-V_0^-/I_0^-$）。

在很多传输线问题中，尤其感兴趣的是线路输入端口处，即 $z=-l$ 处的输入阻抗

$$Z_{in}(-l)=Z_0\left[\frac{e^{j\beta l}+\Gamma e^{-j\beta l}}{e^{j\beta l}-\Gamma e^{-j\beta l}}\right]=Z_0\left[\frac{1+\Gamma e^{-j2\beta l}}{1-\Gamma e^{-j2\beta l}}\right] \tag{2.61}$$

用式（2.49a）替换上式的 Γ，并利用以下关系

$$e^{j\beta l}=\cos\beta l+j\sin\beta l, \tag{2.62a}$$

$$e^{-j\beta l}=\cos\beta l-j\sin\beta l, \tag{2.62b}$$

式（2.61）可重写成 Z_L 的函数形式

$$Z_{in}(-l)=Z_0\left(\frac{Z_L\cos\beta l+jZ_0\sin\beta l}{Z_0\cos\beta l+jZ_L\sin\beta l}\right)=Z_0\left(\frac{Z_L+jZ_0\tan\beta l}{Z_0+jZ_L\tan\beta l}\right) \tag{2.63}$$

从发电机电路的角度看，传输线可以用阻抗 Z_{in} 来代替，如图 2-14 所示。Z_{in} 上的电压相量为

$$\widetilde{V}_i=\widetilde{I}_iZ_{in}=\frac{\widetilde{V}_gZ_{in}}{Z_g+Z_{in}}, \tag{2.64}$$

但从传输线的角度看，在输入端口处，它的电压由式（2.51a）取 $z=-l$ 得到

$$\widetilde{V}_i=\widetilde{V}(-l)=V_0^+[e^{j\beta l}+\Gamma e^{-j\beta l}] \tag{2.65}$$

利用式（2.64）和（2.65）求解 V_0^+ 得

$$V_0^+=\left(\frac{\widetilde{V}_gZ_{in}}{Z_g+Z_{in}}\right)\left(\frac{1}{e^{j\beta l}+\Gamma e^{-j\beta l}}\right) \tag{2.66}$$

至此，针对无损传输线这种特殊情况，对式（2.21）、式（2.23）构成的传输线波动方程的求解已经完成。这个求解过程从式（2.26a）、式（2.26b）的通解出发，有 4 个未知幅值，即 V_0^+、V_0^-、I_0^+、I_0^- 需要求解；然后找到 $Z_0=V_0^+/I_0^+=-V_0^-/I_0^-$ 的

56

规律，将未知数减少为两个电压幅值待求；再应用负载处的边界条件，用参数 Γ 将 V_0^+、V_0^- 联系在一起；最后施加发送端的边界条件，即得到 V_0^+ 的表达式。

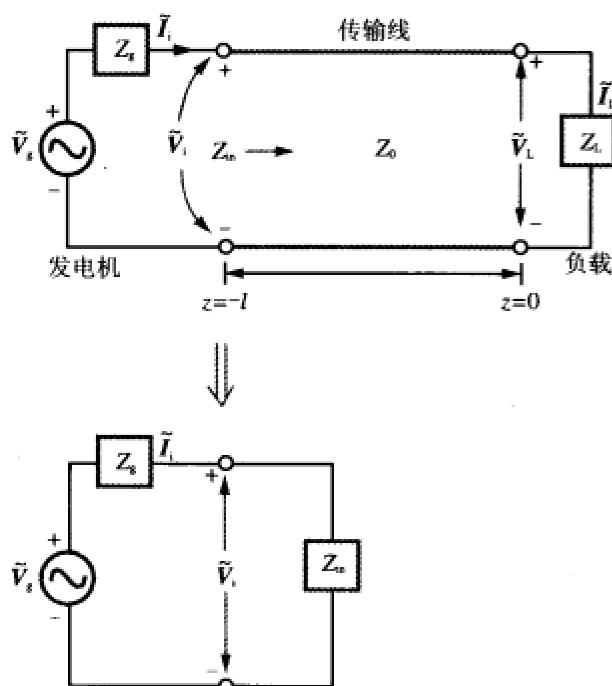


图 2-14　从发电机端看，传输线可以用阻抗 Z_{in} 来代替



M2.2-2.3

例 2-6　$v(z,t)$ 和 $i(z,t)$ 的完全解

一个 1.05GHz 的发生器电路，其串联阻抗为 $Z_g=10\Omega$，电压源为

$$v_g(t)=10\ \sin(\omega t+30°)\quad (\mathrm{V})$$

经阻抗为 50Ω、67cm 长的无损线连接到负载 $Z_L=(100+\mathrm{j}50)\Omega$。线路的相速为 $0.7c$，c 为真空中的光速。求线路上的 $v(z,t)$ 和 $i(z,t)$。

解答：由 $u_p=\lambda f$ 可得

$$\lambda=\frac{u_p}{f}=\frac{0.7\times3\times10^8}{1.05\times10^9}=0.2(\mathrm{m}),$$

及

$$\tan(\beta l)=\tan\left(\frac{2\pi}{\lambda}l\right)=\tan\left(\frac{2\pi}{0.2}\times0.67\right)=\tan 6.7\pi=\tan 0.7\pi=\tan 126°,$$

注意其中减掉了 2π的整数倍。负载处的电压反射系数为

$$\Gamma=\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0}=\frac{(100+\mathrm{j}50)-50}{(100+\mathrm{j}50)+50}=0.45\mathrm{e}^{\mathrm{j}26.6°}$$

参考图 2-14，由式（2.63）得到线路的输入阻抗为

$$Z_{in} = Z_0\left[\frac{Z_L + jZ_0\tan\beta l}{Z_0 + jZ_L\tan\beta l}\right] = Z_0\left[\frac{Z_L/Z_0 + j\tan\beta l}{1 + j(Z_L/Z_0)\tan\beta l}\right]$$

$$= 50\left[\frac{(2 + j1) + j\tan 126°}{1 + j(2 + j1)\tan 126°}\right] = (21.9 + j17.4)(\Omega)$$

将发生器电压表达式写成 cos 形式

$$v_g(t) = 10\sin(\omega t + 30°) = 10\cos(\pi/2 - \omega t - 30°)$$
$$= 10\cos(\omega t - 60°) = \Re\mathfrak{e}[10e^{-j60°}e^{j\omega t}] = \Re\mathfrak{e}[\tilde{V}_g e^{j\omega t}] \quad (V)$$

因此，电压相量 $\tilde{V}_g$ 为

$$\tilde{V}_g = 10e^{-j60°}(V) = 10\angle{-60°} \quad (V)$$

应用式（2.66）得

$$V_0^+ = \left(\frac{\tilde{V}_g Z_{in}}{Z_g + Z_{in}}\right)\left(\frac{1}{e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}}\right) = \left[\frac{10e^{-j60°}(21.9 + j17.4)}{10 + 21.9 + j17.4}\right]$$
$$\cdot [e^{j126°} + 0.45e^{j26.6°}e^{-j126°}]^{-1} = 10.2e^{j159°}(V) = 10.2\angle 159° \quad (V)$$

线路上的电压相量为

$$\tilde{V}(z) = V_0^+(e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}) = 10.2e^{j159°}(e^{-j\beta z} + 0.45e^{j26.6°}e^{j\beta z}),$$

57

瞬时电压 $v(z,t)$ 为

$$v(z,t) = \Re\mathfrak{e}[\tilde{V}(z)e^{j\omega t}] = 10.2\cos(\omega t - \beta z + 159°)$$
$$+ 4.55\cos(\omega t + \beta z + 185.6°) \quad (V)$$

同样，利用式（2.51b）的 V_0^+ 表达式可得

$$\tilde{I}(z) = 0.20e^{j159°}(e^{-j\beta z} - 0.45e^{j26.6°}e^{j\beta z}), i(z,t) = 0.20\cos(\omega t - \beta z + 159°)$$
$$+ 0.091\cos(\omega t + \beta z + 5.6°) \quad (A)$$

■

M2.4

2.7 一些无损线的特例

常常碰到这种无损线，它们要么使用特殊的端接法，要么采用特别的长度因而表现出特别有用的特性。下面对部分这类特殊情况讨论几个例子。

2.7.1 短路线 M2.1D

图 2-15a 所示为端部短路的传输线，$Z_L = 0$。因此，式（2.49a）所定义的电压反射系数 $\Gamma = -1$，式（2.59）所定义的电压驻波比 $S = \infty$。根据式（2.51a）、（2.51b），短路无损线的电压和电流为

$$\tilde{V}_{sc}(z) = V_0^+[e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}] = -2jV_0^+\sin\beta z, \tag{2.67a}$$

$$\tilde{I}_{sc}(z) = \frac{V_0^+}{Z_0}[e^{-j\beta z} + e^{j\beta z}] = \frac{2V_0^+}{Z_0}\cos\beta z \tag{2.67b}$$

电压 $\tilde{V}_{sc}(z)$ 的幅值以 $\sin\beta z$ 的规律变化，因为是短路，其在负载处（$z = 0$）的值为

零，而 $\tilde{I}_{sc}(z)$ 以 $\cos\beta z$ 的规律变化，其在负载处为最大值。两者都以 z 的函数形式，绘制在图 2-15 中。

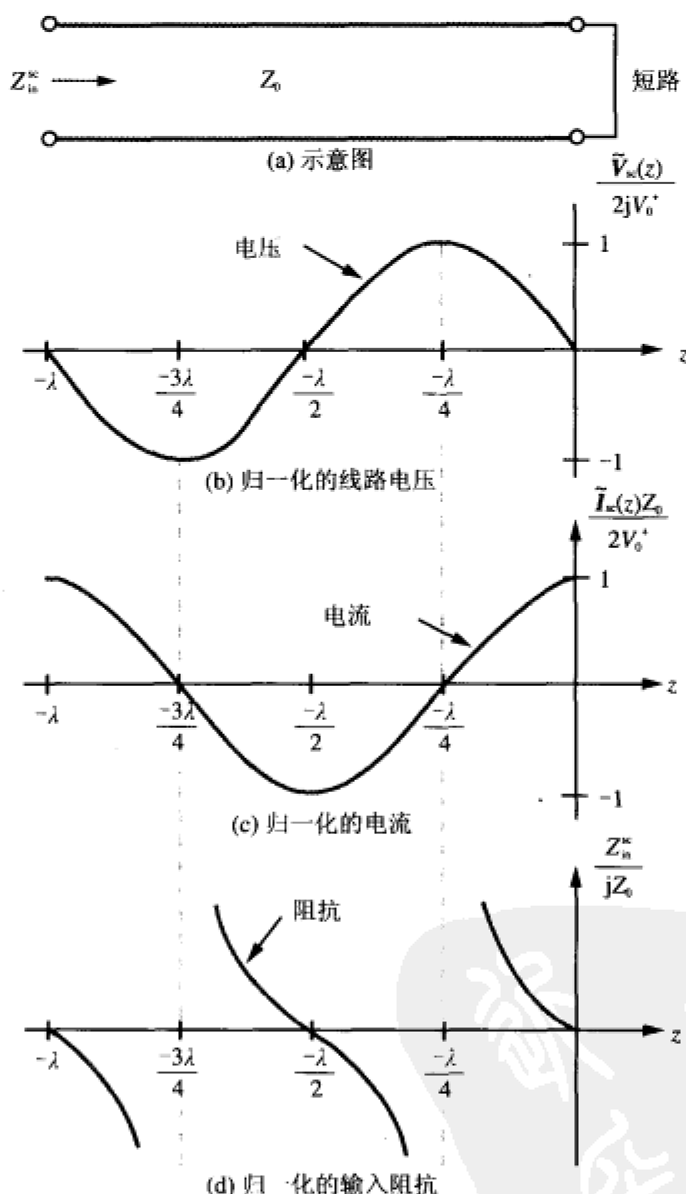


图 2-15　端部短路的传输线

在线路上 $z=-l$ 处，输入阻抗由 $\tilde{V}_{sc}(-l)$ 和 $\tilde{I}_{sc}(-l)$ 的比值确定。定义 Z_{in}^{sc} 为短路线的输入阻抗，则有

$$Z_{in}^{sc}=\frac{\tilde{V}_{sc}(-l)}{\tilde{I}_{sc}(-l)}=jZ_0\tan\beta l \tag{2.68}$$

图 2-15d 所示为 Z_{in}^{sc}/jZ_0 关于 z 的变化曲线。

一般情况下，输入阻抗包含一个实部，即输入电阻 R_{in}，和一个虚部，即输入电

抗 X_{in}

$$Z_{in} = R_{in} + jX_{in} \tag{2.69}$$

在短路无损线的情况下，输入阻抗是纯无功的（$R_{in}=0$）。如果 $\tan\beta l \geqslant 0$，则线路呈感性，其表现类似于一个电抗等于 Z_{in}^{sc} 的电感 L_{eq}。即

$$j\omega L_{eq} = jZ_0 \tan\beta l, \quad 当 \tan\beta l \geqslant 0 时 \tag{2.70a}$$

或

$$L_{eq} = \frac{Z_0 \tan\beta l}{\omega} \quad (H) \tag{2.70b}$$

输入阻抗 Z_{in}^{sc} 可等效为纯电感 L_{eq} 的最短线路长度为

$$l = \frac{1}{\beta}\tan^{-1}\left(\frac{\omega L_{eq}}{Z_0}\right) \quad (m) \tag{2.70c}$$

同样，若 $\tan\beta l \leqslant 0$，则线路呈容性，其表现类似一个等效电容 C_{eq}

$$\frac{1}{j\omega C_{eq}} = jZ_0 \tan\beta l, \quad 当 \tan\beta l \leqslant 0 时, \tag{2.71a}$$

或

$$C_{eq} = -\frac{1}{Z_0 \omega \tan\beta l} \quad (F) \tag{2.71b}$$

因为 l 为正，故满足 $\tan\beta l \leqslant 0$ 的最短线路长度 l，应落在 $\pi/2 \leqslant \beta l \leqslant \pi$ 的范围内。因此，输入阻抗 Z_{in}^{sc} 可等效为纯电容 C_{eq} 的最短线路长度为

$$l = \frac{1}{\beta}\left[\pi - \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega C_{eq} Z_0}\right)\right] \quad (m) \tag{2.71c}$$

以上结果意味着，可通过选择适当的短路线长度，来代替电容和电感，以产生所需要的任何大小的电抗值。这种做法在微波电路及高速集成电路的设计中确实十分普遍，因为制造实际的电容和电感，要比制做短路传输线困难得多。

例 2-7 电抗元件的等效

如图 2-16 所示，一特征阻抗为 50Ω 的短路无损线，工作频率为 2.25GHz，线路波速为 0.75c。试确定其长度，以等效 $C_{ep}=4$pF 的电容。

59

解答：已知

$$u_p = 0.75c = 0.75 \times 3 \times 10^8 = 2.25 \times 10^8 \mathrm{m/s},$$
$$Z_0 = 50\Omega,$$
$$f = 2.25\mathrm{GHz} = 2.25 \times 10^9 \mathrm{Hz},$$
$$C_{eq} = 4\mathrm{pF} = 4 \times 10^{-12}\mathrm{F}$$

相位常数为

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{u_p} = \frac{2\pi \times 2.25 \times 10^9}{2.25 \times 10^8} = 62.8 \quad (\mathrm{rad/m})$$

由式（2.71a）可得

$$\tan\beta l = -\frac{1}{Z_0 \omega C_{eq}} = -\frac{1}{50 \times 2\pi \times 2.25 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-12}} = -0.354$$

只有当参数位于第二或第四象限时，正切函数的值才为负。其第二象限的解为

$$\beta l_1 = 2.8(\text{rad}) \quad 或 \quad l_1 = \frac{2.8}{\beta} = \frac{2.8}{62.8} = 4.46(\text{cm}),$$

第四象限的解为

$$\beta l_2 = 5.94(\text{rad}) \quad 或 \quad l_2 = \frac{5.94}{62.8} = 9.46(\text{cm})$$

其实，应用式（2.71c）也可以得到 l_1 的值。l_2 正好比 l_1 长 $\lambda/2$。事实上，任何长度 $l = 4.46\text{cm} + n\lambda/2$（$n$ 为正整数）都是合要求的解。■

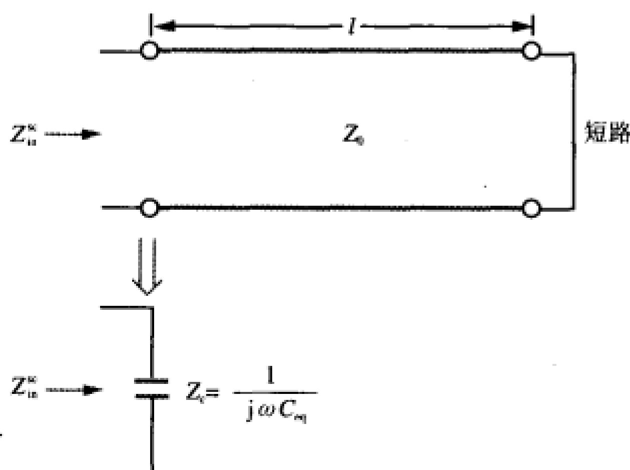


图 2-16 短路线用作等效电容（例 2-7）

2.7.2 开路线 M2.1E

如图 2-17a 所示，因开路的 $Z_L = \infty$，故有 $\Gamma = 1$，$S = \infty$，而电压、电流及输入阻抗则为

$$\widetilde{V}_{oc}(z) = V_0^+[e^{-j\beta z} + e^{j\beta z}] = 2V_0^+\cos\beta z, \tag{2.72a}$$

$$\widetilde{I}_{oc}(z) = \frac{V_0^+}{Z_0}[e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}] = \frac{-2jV_0^+}{Z_0}\sin\beta z, \tag{2.72b}$$

$$Z_{in}^{oc} = \frac{\widetilde{V}_{oc}(-l)}{\widetilde{I}_{oc}(-l)} = -jZ_0\cos\beta l \tag{2.73}$$

图 2-17 绘出了这些量随 z 变化的曲线。

2.7.3 短路与开路测试的应用

网络分析仪是一种射频（RF）仪器，它能够测量接在其输入端口上的任何负载的阻抗。对于无损线，先用其测量短路时的输入阻抗 Z_{in}^{sc}，再用其测量开路时的输入阻抗 Z_{in}^{oc}，组合这两次测量的结果，可以确定线路的特征阻抗 Z_0 及其相位常数 β。对于式（2.68）和式（2.73），相乘可得

$$Z_0 = \sqrt[+]{Z_{in}^{sc}Z_{in}^{oc}}, \tag{2.74}$$

相除可得

$$\tan\beta l = \sqrt{\frac{-Z_{in}^{sc}}{Z_{in}^{oc}}} \tag{2.75}$$

60

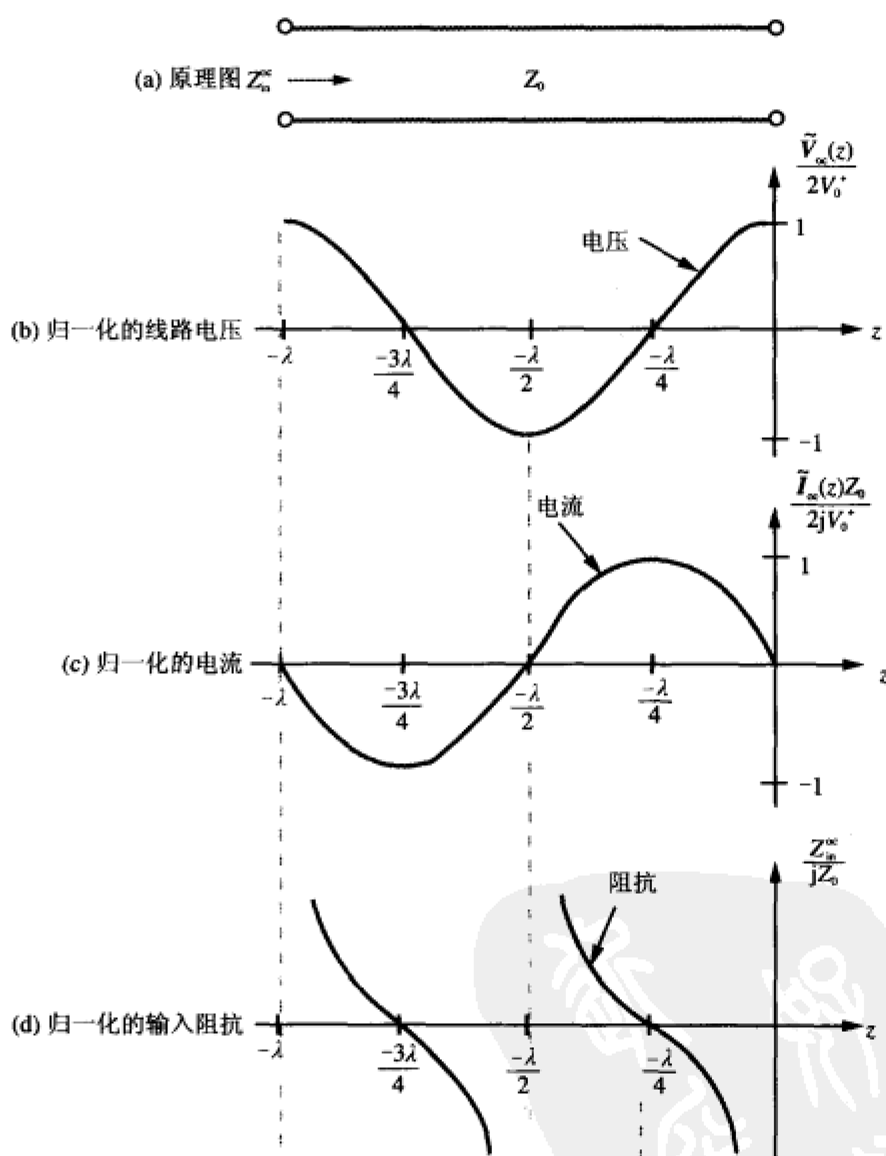


图 2-17 端接开路的传输线

由于正切函数的周期为π rad，这样就可能存在很多结果，为了使结果唯一，应该取长度 l 小于或等于 $\lambda/2$。

例 2-8 Z_0及 β 的测量

一 57cm 长的无损线，在短路时测得输入阻抗 $Z_{in}^{sc}=\mathrm{j}40.42\Omega$，在开路时测得输入阻抗 $Z_{in}^{oc}=-\mathrm{j}121.24\Omega$。另外从其他途径得知其长度介于 3 ~ 3.25 个波长之间。试确定其 Z_0和 β。

解答： 由式（2.74）和式（2.75）得

$$Z_0=\sqrt{Z_{in}^{sc}Z_{in}^{oc}}=\sqrt{(\mathrm{j}40.42)(-\mathrm{j}121.24)}=70\Omega,\quad \tan\beta l=\sqrt{\frac{-Z_{in}^{sc}}{Z_{in}^{oc}}}=\sqrt{\frac{1}{3}}$$

因为 l 介于 $(3\sim3.25)\lambda$，故 $\beta l=(2\pi l/\lambda)$ 介于 $6\pi\text{rad}\sim13\pi/2\text{rad}$。从极坐标系看，这属于第一象限（$0\sim\pi/2$）。因此，前面方程唯一可接受的解是 $\beta l=\pi/6\text{rad}$，再加上 l 中 λ 的整数倍部分（即 2π rad 的整数倍），可得 βl 的真正解为

$$\beta l=6\pi+\frac{\pi}{6}=19.4\quad(\text{rad}),$$

因此有

61

$$\beta=\frac{19.4}{0.57}=34\quad(\text{rad/m})$$

■

2.7.4　长度为 $l=n\lambda/2$ 的线路

如果 $l=n\lambda/2$（n 为整数），则

$$\tan\beta l=\tan[(2\pi/\lambda)(n\lambda/2)]=\tan n\pi=0$$

因此，式（2.63）简化为

$$Z_{in}=Z_L,\quad 对于\quad l=n\lambda/2,\tag{2.76}$$

这意味着，任何半波线（或半波 $\lambda/2$ 整数倍的线）不会改变负载阻抗。因此，发电机通过半波无损线连接到负载，在负载上产生的电压与电流，同没有半波线时是一样的。

2.7.5　四分之一波长变换器

另一种有趣的情况是四分之一波长的线路（或者 $\lambda/4+n\lambda/2$ 的线路，$n=0$ 或正整数），它对应于 $\beta l=(2\pi/\lambda)(\lambda/4)=\pi/2$。根据式（2.63），输入阻抗为

$$Z_{in}=\frac{Z_0^2}{Z_L},\quad 对于\ l=\lambda/4+n\lambda/2\tag{2.77}$$

例2-9展示了四分之一波长变换器的具体应用。

例2-9　四分之一波长变换器

为了使 50Ω 的无损线同 $Z_L=100\Omega$ 的电阻性负载相匹配，使用一根四分之一波长线变换阻抗，以消除馈线的反射，如图2-18所示。试确定四分之一波长变换器的特征阻抗。

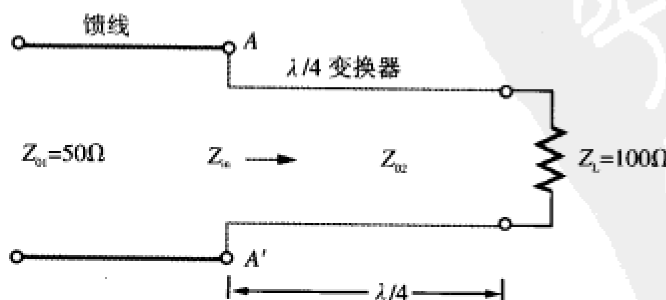


图2-18　例2-9的结构图

解答：为了消除 AA' 端口的反射，从四分之一波长线看进去的输入阻抗 Z_{in} 应该为 Z_{01}，即馈线的特征阻抗。所以 $Z_{in}=50\Omega$。利用式（2.77）

$$Z_{in}=\frac{Z_{02}^2}{Z_L},$$

或

$$Z_{02}=\sqrt{Z_{in}Z_L}=\sqrt{50\times100}=70.7\Omega$$

这种方法虽然消除了馈线上的反射，却无法消除四分之一波长线上的反射。但由于四分之一波长线是无损的，所有入射的功率最终都将传输到负载 Z_L。■

2.7.6　匹配的传输线：$Z_L=Z_0$

对于匹配的无损传输线（$Z_L=Z_0$），有：（1）在线路上的任何地点 z，输入阻抗都为 $Z_{in}=Z_0$；（2）$\Gamma=0$；（3）无论线路长度 l 为多少，入射的功率都可全部送达负载。表 2-3 对驻波的特性进行了总结。

表 2-3　无损传输线上驻波的特性

电压最大值 电压最小值	$\lvert\widetilde{V}\rvert_{max}=\lvert V_0^+\rvert[1+\lvert\Gamma\rvert]$ $\lvert\widetilde{V}\rvert_{min}=\lvert V_0^+\rvert[1-\lvert\Gamma\rvert]$
电压最大值位置（也是电流最小值位置）	$l_{max}=\frac{\theta_r\lambda}{4\pi}+\frac{n\lambda}{2},\quad n=0,1,2,\cdots$
第一个最大值位置（也是第一个电流最小值位置）	$l_{max}=\begin{cases}\frac{\theta_r\lambda}{4\pi}, & 如果\ 0\leqslant\theta_r\leqslant\pi\\ \frac{\theta_r\lambda}{4\pi}+\frac{\lambda}{2}, & 如果\ -\pi\leqslant\theta_r\leqslant0\end{cases}$
电压最小值位置（也是电流最大值位置）	$l_{min}=\frac{\theta_r\lambda}{4\pi}+\frac{(2n+1)\lambda}{4},\quad n=0,1,2,\cdots$
第一个最小值位置（也是第一个电流最大值位置）	$l_{min}=\frac{\lambda}{4}\left(1+\frac{\theta_r}{\pi}\right)$
输入阻抗	$Z_{in}=Z_0\left(\frac{Z_L+jZ_0\tan\beta l}{Z_0+jZ_L\tan\beta l}\right)$
Z_{in} 为实数的位置	在电压最大值处和最小值处
电压最大值点的 Z_{in}	$Z_{in}=Z_0\left(\frac{1+\lvert\Gamma\rvert}{1-\lvert\Gamma\rvert}\right)$
电压最小值点的 Z_{in}	$Z_{in}=Z_0\left(\frac{1-\lvert\Gamma\rvert}{1+\lvert\Gamma\rvert}\right)$
短路线的 Z_{in}	$Z_{in}^{sc}=jZ_0\tan\beta l$
开路线的 Z_{in}	$Z_{in}^{oc}=-jZ_0\cot\beta l$
长度 $l=n\lambda/2$ 线的 Z_{in}	$Z_{in}=Z_L,\quad n=0,1,2,\cdots$
长度 $l=\lambda/4+n\lambda/2$ 线的 Z_{in} 匹配线的 Z_{in}	$Z_{in}=Z_0^2/Z_L,n=0,1,2,\cdots$ $Z_{in}=Z_0$
$\lvert V_0^+\rvert$=入射波的幅值；$\Gamma=\lvert\Gamma\rvert e^{j\theta_r}$（其中 $-\pi<\theta_r<\pi$）；θ_r 的单位为 rad	

 D2.1-2.4

62 ~ 63

复习题

Q2.10 特征阻抗 Z_0 和输入阻抗 Z_{in} 的区别是什么？二者何时相等？

Q2.11 什么是四分之一波变换器？如何应用？

Q2.12 一长度为 l 的无损线采用短路端接。如果 $l<\lambda/4$，请问输入阻抗是感性还是容性？

Q2.13 无限长线路的输入阻抗是多少？

Q2.14 一条无损线采用短路端接时，如果其输入阻抗是感性的，请问改为开路端接时，其输入阻抗是感性还是容性？

练习 2.11 一根 50Ω 的无损线采用 $\varepsilon_r=2.25$ 的绝缘材料。当采用开路端接时，欲用其输入阻抗等效 50MHz 下的 10pF 的电容，则长度应为多少？

答案：$l=5.68\text{cm}$。（参见◉）

练习 2.12 一条 300Ω 的馈线，将连接到一根 3m 长、150Ω 特征阻抗、端接有 150Ω 电阻的线上。两线都为无损线，采用空气绝缘，运行在 50MHz 频率。试确定：（a）3m 线的输入阻抗；（b）馈线上的电压驻波比；（c）为使馈线的 $S=1$，在两线间加接四分之一波长变换器，试确定该变换器的特征阻抗。（参见◉）

答案：（a）$Z_{in}=150\Omega$；（b）$S=2$；（c）$Z_0=212.1\Omega$。

2.8 无损传输线上的功率流动

前面的分析都集中在传输线上波的电压和电流上，下面开始研究伴随着入射波和反射波的功率流动。仍然从无损传输线上的电压、电流通式开始，将式（2.51a）、式（2.51b）重写如下

$$\widetilde{V}(z)=V_0^+(e^{-j\beta z}+\Gamma e^{j\beta z}), \tag{2.78a}$$

$$\widetilde{I}(z)=\frac{V_0^+}{Z_0}(e^{-j\beta z}-\Gamma e^{j\beta z}) \tag{2.78b}$$

在这两个表达式中，第一项都代表入射波的电压或电流，而含有 Γ 的第二项，则代表反射波的电压或电流。在负载处（$z=0$），入射与反射的电压、电流为

$$\widetilde{V}^i=V_0^+,\quad \widetilde{I}^i=\frac{V_0^+}{Z_0},\quad (\text{当 } z=0 \text{ 时}), \tag{2.79}$$

$$\widetilde{V}^r=\Gamma V_0^+,\quad \widetilde{I}^r=-\Gamma\frac{V_0^+}{Z_0},\quad (\text{当 } z=0 \text{ 时}) \tag{2.80}$$

2.8.1 瞬时功率

当入射波到达负载时，伴随波的瞬时功率等于瞬时电压 $v^i(t)$ 和瞬时电流 $i^i(t)$ 的乘积

$$\begin{aligned}P^i(t)&=v^i(t)\cdot i^i(t)=\mathfrak{Re}[\widetilde{V}^i e^{j\omega t}]\cdot\mathfrak{Re}[\widetilde{I}^i e^{j\omega t}]\\&=\mathfrak{Re}[|V_0^+|e^{j\phi^+}e^{j\omega t}]\cdot\mathfrak{Re}\left[\frac{|V_0^+|}{Z_0}e^{j\phi^+}e^{j\omega t}\right]\\&=|V_0^+|\cos(\omega t+\phi^+)\cdot\frac{|V_0^+|}{Z_0}\cos(\omega t+\phi^+)=\frac{|V_0^+|^2}{Z_0}\cos^2(\omega t+\phi^+)\quad(\text{W}),\end{aligned} \tag{2.81}$$

这里利用了式（2.31a），将 V_0^+ 表示成其幅值 $|V_0^+|$ 及相角 ϕ^+ 的形式。

与此类似，在式（2.80）中，以 $|\Gamma|e^{j\theta_r}$ 替换 Γ，然后使用同样的步骤，可以得到负载反射的瞬时功率表达式 64

$$P^r(t)=v^r(t)\cdot i^r(t)=-|\Gamma|^2\frac{|V_0^+|^2}{Z_0}\cos^2(\omega t+\phi^++\theta_r)\quad (\mathrm{W})\qquad (2.82)$$

式（2.82）中的负号，表示反射功率是沿着负 z 方向流动的。

2.8.2 时间平均功率

从实用的角度讲，比起瞬时功率 $P(t)$ 来，人们更关心传输线上流动功率的时间平均值 P_{av}。为了计算 P_{av}，可以使用时域方法或计算简单的相量方法。为了完整起见，两种方法都予以介绍。

时域方法

时间平均功率流等于瞬时功率在一个时间周期 T 内的平均值（这里，$T=1/f=2\pi/\omega$）。对于入射波，时间平均功率为

$$P_{av}^i=\frac{1}{T}\int_0^T P^i(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}P^i(t)\,\mathrm{d}t \qquad (2.83)$$

将入射功率 $P^i(t)$ 的表达式（2.81）代入式（2.83），并进行积分，得到以下结果

$$P_{av}^i=\frac{|V_0^+|^2}{2Z_0}\quad (\mathrm{W}) \qquad (2.84)$$

其中，系数 1/2 是对 $\cos^2(\omega t+\phi^+)$ 积分一个周期的结果。对反射波进行类似的处理可得

$$P_{av}^r=-|\Gamma|^2\frac{|V_0^+|^2}{2Z_0}=-|\Gamma|^2P_{av}^i \qquad (2.85)$$

可见，平均反射功率的幅值，等于平均入射功率的幅值乘以系数 $|\Gamma|^2$。
在图 2-19 中，传递到负载的净平均功率为

$$P_{av}=P_{av}^i+P_{av}^r=\frac{|V_0^+|^2}{2Z_0}[1-|\Gamma|^2]\quad (\mathrm{W}) \qquad (2.86)$$

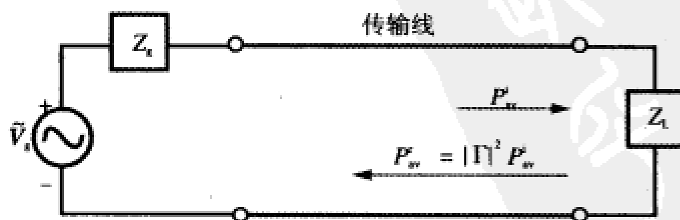


图 2-19 无损线上负载反射的时间平均功率等于入射的时间平均功率乘以 $|\Gamma|^2$

相量方法

对于任何电压相量为 $\tilde{V}$、电流相量为 $\tilde{I}$ 的波，计算时间平均功率的公式为

$$P_{av}=\frac{1}{2}\Re e[\tilde{V}\cdot\tilde{I}^*], \qquad (2.87)$$

其中，$\tilde{I}^*$ 为 $\tilde{I}$ 的共轭复数。将上式用于式（2.79）和式（2.80），可得

$$P_{av}^{i} = \frac{1}{2}\Re e\left[V_0^+ \cdot \frac{V_0^{+*}}{Z_0}\right] = \frac{|V_0^+|^2}{2Z_0}, \tag{2.88}$$

65

$$P_{av}^{r} = \frac{1}{2}\Re e\left[\Gamma V_0^+ \cdot \left(\frac{-\Gamma^* V_0^{+*}}{Z_0}\right)\right] = -|\Gamma|^2 \frac{|V_0^+|^2}{2Z_0} \tag{2.89}$$

它们同式（2.84）、式（2.85）是一样的。

练习 2.13 一根 50Ω 的无损线，端接 $Z_L = (100 + j50)\,\Omega$ 的负载阻抗，试计算平均入射功率中被负载反射的分量所占的比例。

答案：20%。（参见❀）

练习 2.14 对于练习 2.13 中的线路，如果 $|V_0^+| = 1\text{V}$，平均反射功率的幅值是多少？

答案：$P_{av}^{r} = 2$（mW）。（参见❀）

复习题

Q2.15 根据式（2.82），反射功率的瞬时值依赖反射系数的相角 θ_r，而根据式（2.85），平均反射功率则跟 θ_r 无关。请予以解释。

Q2.16 无损线传递给电抗负载的平均功率是多少？

Q2.17 在入射功率中，多大比例传送给了匹配的负载？

Q2.18 证明

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right)dt = \frac{1}{2},$$

与 ϕ 值无关。

2.9 史密斯圆图

在计算机与可编程计算器出现之前，人们发明了几种作图方法以帮助求解传输线问题。史密斯圆图由 P. H. Smith 于 1939 年发明，它是传输线的电路设计和分析中用的最多的作图技术，到现在人们还在继续用它。尽管发明者的初始目的，是想提供一个作图工具，以帮助复阻抗的计算，但目前史密斯圆图已经成为 CAD 软件表现微波电路性能的主要展示手段。从本节及下一节的材料将会看到，史密斯圆图不仅可以避免烦琐的复数运算，它还可以使阻抗匹配电路的设计变得相对容易。史密斯圆图对有损和无损传输线都适用，但以下的讨论只限于无损线的情况。

2.9.1 参数方程

通常，反射系数 Γ 为复数量，包含模 $|\Gamma|$ 和相位 θ_r，或一个实部 Γ_r 和一个虚部 Γ_i，

$$\Gamma = |\Gamma|e^{j\theta_r} = \Gamma_r + j\Gamma_i, \tag{2.90}$$

其中，

$$\Gamma_r = |\Gamma|\cos\theta_r, \tag{2.91a}$$

$$\Gamma_i = |\Gamma|\sin\theta_r \tag{2.91b}$$

史密斯圆图作在复平面 Γ 上。在图 2-20 中，点 A 代表反射系数 $\Gamma_A = 0.3 + j0.4$，

对应于

$$|\Gamma_A| = [(0.3)^2 + (0.4)^2]^{1/2} = 0.5$$

66

及

$$\theta_r = \tan^{-1}(0.4/0.3) = 53°$$

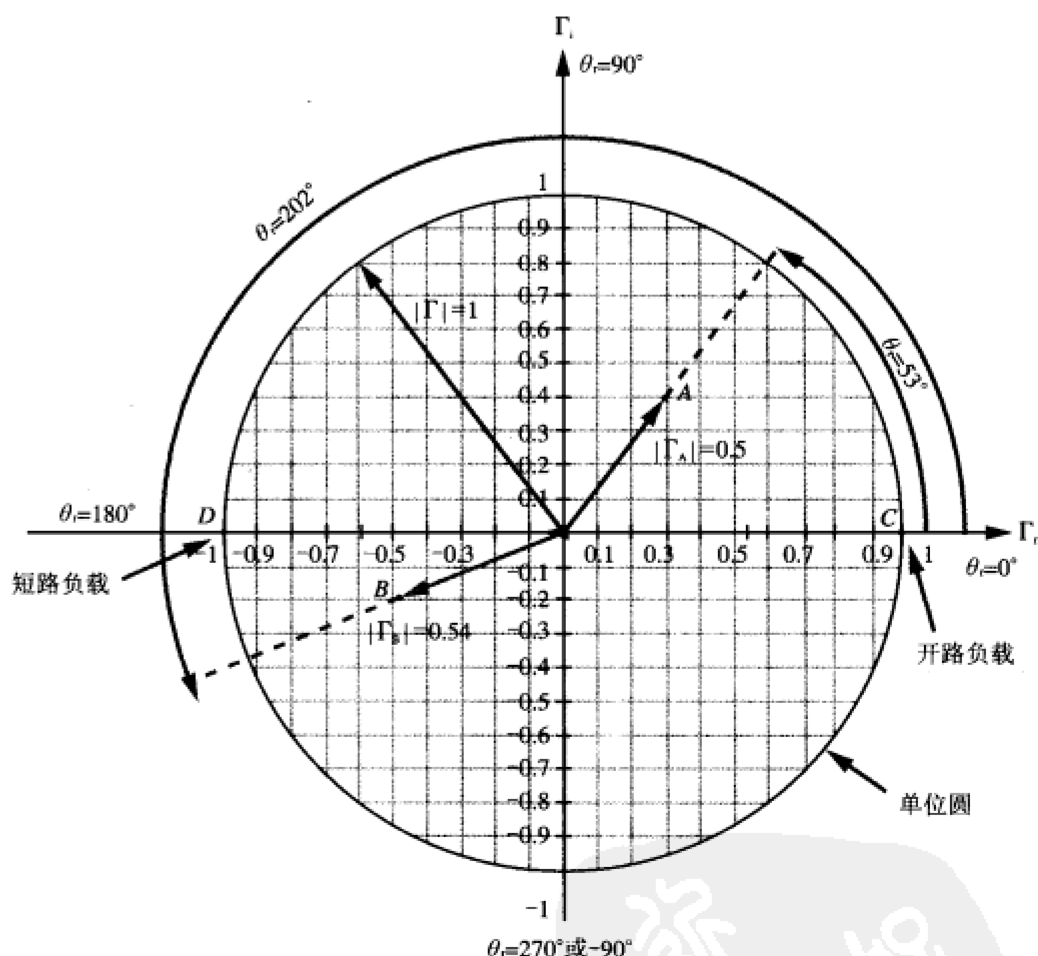


图 2-20 复平面 Γ。点 *A* 位于 $\Gamma_A = 0.3 + j0.4 = 0.5e^{j53°}$，点 *B* 位于 $\Gamma_B = -0.5 - j0.2 = |0.54|e^{j202°}$；单位圆对应于 $|\Gamma| = 1$；在点 *C*，$\Gamma = 1$，对应开路负载，而在点 *D*，$\Gamma = -1$，对应短路负载

同样，点 *B* 代表 $\Gamma_B = -0.5 - j0.2$，对应于 $|\Gamma_B| = 0.54$，$\theta_r = 202°$（或 $\theta_r = (202° - 360°) = -158°$）。注意到当 Γ_r和 Γ_i同为复数时，θ_r将在 $\Gamma_r - \Gamma_i$平面的第三象限，因此，当使用 $\theta = \tan^{-1}(\Gamma_i/\Gamma_r)$计算 θ_r时，有时需要加或减 180°才能得到正确的 θ_r的值。

图 2-20 中的单位圆（unit circle）对应于 $|\Gamma| = 1$。由于传输线的 $|\Gamma| \leq 1$，因此在 $\Gamma_r - \Gamma_i$平面上，只有单位圆内的部分才有物理意义。在后面作图时，只绘制包含单位圆的内部区域。

在史密斯圆图上，阻抗用归一化的数值表示。采用线路的特征阻抗 Z_0作为归一

67

化的基准；归一化后的阻抗用小写字母表示，例如，$z = Z/Z_0$。因此，归一化的负载阻抗（normalized load impedance）为

$$z_L = Z_L/Z_0 \quad (\text{无量纲}), \tag{2.92}$$

而由式（2.49a）给出的反射系数 Γ 则可以写成

$$\Gamma = \frac{Z_L/Z_0 - 1}{Z_L/Z_0 + 1} = \frac{z_L - 1}{z_L + 1} \tag{2.93}$$

式（2.93）的逆形式为

$$z_L = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \tag{2.94}$$

通常，归一化的负载阻抗 z_L 为复数，包括一个归一化的负载电阻 r_L 和一个归一化的负载电抗 x_L

$$z_L = r_L + jx_L \tag{2.95}$$

将式（2.90）和式（2.95）代入式（2.94）得

$$r_L + jx_L = \frac{(1 + \Gamma_r) + j\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r) - j\Gamma_i}, \tag{2.96}$$

由此可以求得用 Γ_r 和 Γ_i 表示的 r_L、x_L。这只需将式（2.96）右端的分子、分母，分别乘以分母的共轭复数，然后把结果分离成实部和虚部。结果如下

$$r_L = \frac{1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2}, \tag{2.97a}$$

$$x_L = \frac{2\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \tag{2.97b}$$

上式指出，对于给定的一组 Γ_r 和 Γ_i，有唯一的一组 r_L 和 x_L 相对应。然而，对于仅仅给定 r_L 的情况，譬如 $r_L = 2$，有很多 Γ_r 和 Γ_i 的组合，都可以给出同样的 r_L。例如，$(\Gamma_r, \Gamma_i) = (0.33, 0)$ 能使 $r_L = 2$；$(\Gamma_r, \Gamma_i) = (0.5, 0.29)$ 也能，类似满足要求的组合有无穷多个。如果将对应 $r_L = 2$ 的所有可能的 Γ_r、Γ_i 组合，都绘制在 $\Gamma_r - \Gamma_i$ 平面上，则将得到一个圆，图 2-21 中标记为 $r_L = 2$ 的圆即是。对应其他 r_L 数值，可以绘出类似的圆。它们都位于 $|\Gamma| = 1$ 区域的内部，且通过共同的点 $(\Gamma_r, \Gamma_i) = (1, 0)$。经过适当的代数运算，将式（2.97a）进行重新整理，就可以得到 $\Gamma_r - \Gamma_i$ 平面上对应给定值 r_L 的圆的参数方程（parametric equation）

$$\left(\Gamma_r - \frac{r_L}{1 + r_L}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1 + r_L}\right)^2 \tag{2.98}$$

而在 x-y 平面上以 (x_0, y_0) 为中心、a 为半径的标准圆方程为

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2. \tag{2.99}$$

比较以上两式（2.98）和式（2.99）可知，r_L 圆的中心位于 $\Gamma_r = r_L/(1 + r_L)$、$\Gamma_i = 0$ 处，半径则为 $1/(1 + r_L)$。在图 2-21 中，最大的圆对应 $r_L = 0$，它就是 $|\Gamma| = 1$ 的单位圆。这一点是显然的，因为当 $r_L = 0$ 时，无论 x_L 为何值，总有 $|\Gamma| = 1$。

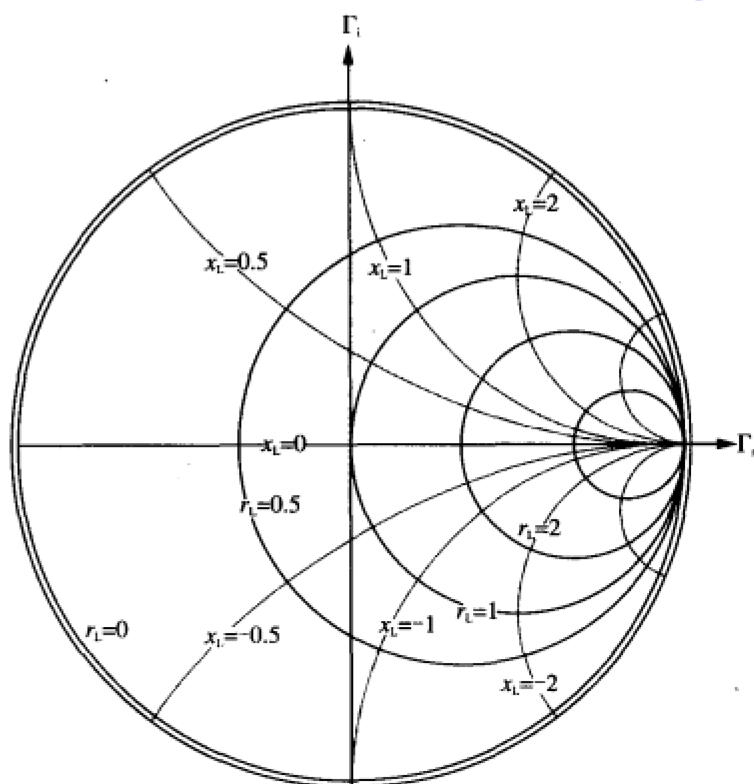


图 2-21 区域 $|\Gamma|\leqslant 1$ 中 r_L 和 x_L 的圆族

对式（2.97b）给定的 x_L 作类似的分析和处理，同样得到一个圆方程

$$(\Gamma_r-1)^2+\left(\Gamma_i-\frac{1}{x_L}\right)^2=\left(\frac{1}{x_L}\right)^2, \tag{2.100}$$

但在 $\Gamma_r-\Gamma_i$ 平面上，x_L 圆同 r_L 圆的特性有所不同。首先，归一化的 x_L 既可以正，也可以负，而归一化的 r_L 则不能取负值（因为负电阻没有物理意义）。因此，方程（2.100）包含两族圆，一族对应正的 x_L，另外一族对应负的 x_L。其次，对应给定的一个 x_L 圆，仅仅部分轨迹落在单位圆的范围之内，如图 2-21 所示。选取部分 r_L 和 x_L 数值，根据式（2.98）、式（2.100）这两个圆参数方程，画出相应的圆族，所得的就是史密斯圆图，如图 2-22 所示。史密斯圆图上的任何点，都代表一个归一化的负载阻抗，有一个电压反射系数与之对应。例如图 2-22 中的 P 点，其 $z_L=2-j1$，$\Gamma=0.45e^{-j26.6°}$。其中的幅值 $|\Gamma|=0.45$，可以用 P 点到史密斯圆图中心（原点 O）的距离除以史密斯圆图中心到单位圆周的距离（即 $|\Gamma|=1$ 的单位圆的半径）来获得。在史密斯圆图的圆周上，标有三种同心的尺度。最内层标有“angle of reflection coefficient in degrees”（以角度表示的反射系数角），这是 θ_r 的尺度。对于点 P，$\theta_r=-26.6°$，图 2-22 已经将其标出。另外两个尺度的意义和用途在下面介绍。

68

69

70

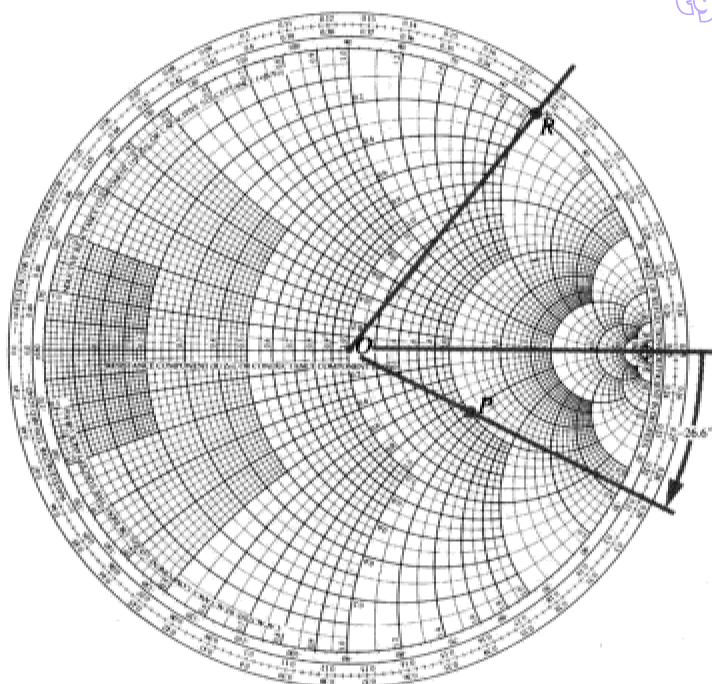


图 2-22 点 P 代表归一化的负载阻抗 $z_L=2-j1$。反射系数的幅值 $|\Gamma|=\overline{OP}/\overline{OR}=0.45$，角度 $\theta_r=-26.6°$。点 R 是 $r_L=0$ 圆（即 $|\Gamma|=1$ 圆）上的任意点

练习 2.15 在史密斯圆图上，求对应下列归一化负载阻抗的 Γ 值（a）$z_L=2+j0$；（b）$z_L=1-j1$；（c）$z_L=0.5-j2$；（d）$z_L=-j3$；（e）$z_L=0$（短路）；（f）$z_L=\infty$（开路）；（g）$z_L=1$（匹配的负载）。

答案：（a）$\Gamma=0.33$；（b）$\Gamma=0.45\angle{-63.4°}$；（c）$\Gamma=0.83\angle{-50.9°}$；（d）$\Gamma=1\angle{-36.9°}$；（e）$\Gamma=-1$；（f）$\Gamma=1$；（g）$\Gamma=0$。（参见◉）

2.9.2 输入阻抗

根据式（2.61），从离负载 l 的远处往负载方向看的输入阻抗为

$$Z_{in}=Z_0\left[\frac{1+\Gamma e^{-j2\beta l}}{1-\Gamma e^{-j2\beta l}}\right]\quad(\Omega)\tag{2.101}$$

为了使用史密斯圆图，阻抗都需要相对特征阻抗 Z_0 进行归一化。因此，归一化的输入阻抗（normalized input impedance）为

$$z_{in}=\frac{Z_{in}}{Z_0}=\frac{1+\Gamma e^{-j2\beta l}}{1-\Gamma e^{-j2\beta l}}\quad（无量纲）\tag{2.102}$$

其中，$\Gamma=|\Gamma|e^{j\theta_r}$ 为负载处的电压反射系数。定义

$$\Gamma_l=\Gamma e^{-j2\beta l}=|\Gamma|e^{j\theta_r}e^{-j2\beta l}=|\Gamma|e^{j(\theta_r-2\beta l)}\tag{2.103}$$

为移相的（phase-shifted）电压反射系数，意指 Γ_l 同 Γ 具有相同的幅值，但相对 Γ 移相了 $2\beta l$ 的弧度。用 Γ_l 作变量，式（2.102）变为

$$z_{in}=\frac{1+\Gamma_l}{1-\Gamma_l}\tag{2.104}$$

式（2.104）在形式上同式（2.94）给出的 z_L 是相同的

$$z_L = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} \tag{2.105}$$

形式相同意味着，若将 Γ 转换成 Γ_l，则 z_L 转换为 z_{in}。在史密斯圆图上，将 Γ 转换成 Γ_l 时，$|\Gamma|$ 不变，只需将相角 θ_r 减 $2\beta l$ rad，对应于在史密斯圆图上进行顺时针旋转。旋转完整一圈对应 2π rad 的相角变化，该变化量所对应的长度 l 可由下式给出

$$2\beta l = 2\frac{2\pi}{\lambda}l = 2\pi, \tag{2.106}$$

即 $l=\lambda/2$。在图 2-22 中，史密斯圆图的圆周最外层的尺度，称**到发电机的波长数**（wavelengths toward generator，简称 WTG）尺度，以表示沿传输线向发电机的运动，以波长 λ 为单位。即 l 是用波长来测量，完整的一圈对应 $l=\lambda/2$。在某些传输线问题中，有可能需沿着传输线从某点出发，向靠近负载的方向移动，这种情况相位是增加的，对应于沿逆时针方向旋转。为了方便这种需要，在史密斯圆图的圆周上加入了第三个尺度（位于 θ_r 尺度和 WTG 尺度之间），称为**到负载的波长数**（wavelengths toward load，简称 WTL）尺度。

为了说明如何用史密斯圆图求 Z_{in}，考虑一个 50Ω 的无损线端接负载阻抗 $Z_L=(100-j50)\ \Omega$ 的情况。我们想知道离负载的距离为 $l=0.1\lambda$ 处的 Z_{in}。首先将负载阻抗归一化，为 $z_L=Z_L/Z_0=2-j1$，并画在史密斯圆图上，如图 2-23 中的点 *A*。在 WTG 尺度上，点 *A* 位于 0.287λ 处。利用圆规，过点 *A* 画圆，圆心为史密斯圆图的中心。由于史密斯圆图的中心是 Γ_r 轴和 Γ_i 轴的交点，因此该圆上的所有点，都具有相同的 $|\Gamma|$ 值。所以称该圆为等 $|\Gamma|$ 圆（constant-$|\Gamma|$ circle），一般的情况下，称为 SWR 圆（SWR circle）。后一个名称源于电压驻波比（SWR）同 $|\Gamma|$ 的关系式（2.59） 71

$$S = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} \tag{2.107}$$

可见，$|\Gamma|$ 和 S 之间具有对应关系，一个 $|\Gamma|$ 对应一个特定的 S。如前所述，为将 z_L 转换成 z_{in}，需维持 $|\Gamma|$ 不变，即保持在 SWR 圆上，并将 Γ 的相角减少 $2\beta l$ rad。这一角度的移动，等效于在 WTG 尺度上，往发电机方向移动 l 的距离或 l/λ 个波长（此处 $l=0.1\lambda$）。因为 *A* 点位于 0.287λ 处，需移动到 WTG 尺度的 $0.287\lambda+0.1\lambda=0.387\lambda$ 处。通过该新位置画一径向射线，同 SWR 圆交于点 *B*，*B* 点即代表 z_{in}，其值为 $z_{in}=0.6-j0.66$。最后，对 z_{in} 进行反归一化，即乘以 $Z_0=50\Omega$，得到 $Z_{in}=(30-j33)\Omega$。这一结果可以应用式（2.101）的解析计算予以核实。在 SWR 圆上点 *A* 到点 *B* 之间的点，代表着传输线上的各点。 72

练习 2.16 一长度为 l 的无损线，端接一归一化的负载阻抗 z_L，试利用史密斯圆图，确定以下情况下的归一化输入阻抗（a）$l=0.25\lambda$，$z_L=1+j0$；（b）$l=0.5\lambda$，$z_L=1+j1$；（c）$l=0.3\lambda$，$z_L=1-j1$；（d）$l=1.2\lambda$，$z_L=0.5-j0.5$；（e）$l=0.1\lambda$，$z_L=0$（短路）；（f）$l=0.4\lambda$，$z_L=j3$；（g）$l=0.2\lambda$，$z_L=\infty$（开路）。

答案：（a）$z_{in}=1+j0$；（b）$z_{in}=1+j1$；（c）$z_{in}=0.76+j0.84$；（d）$z_{in}=0.59+j0.66$；（e）$z_{in}=0+j0.73$；（f）$z_{in}=0+j0.72$；（g）$z_{in}=0-j0.32$。（参见●）

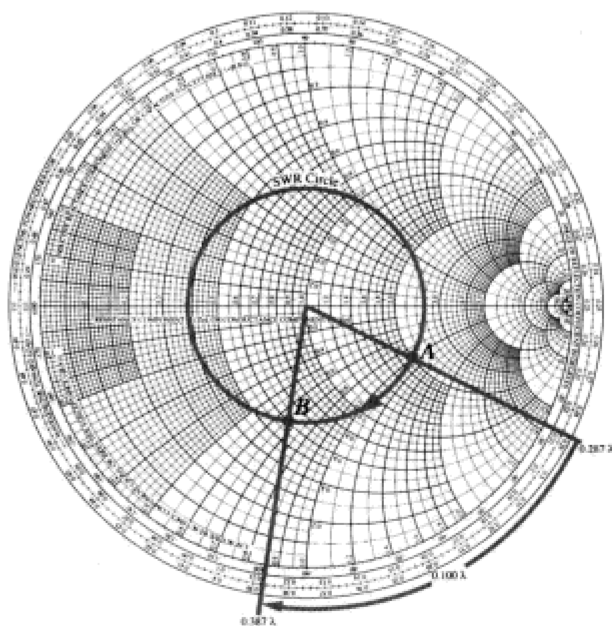


图 2-23 点 A 代表 WTG 尺度上 0.287λ 处的归一化负载 $z_L=2-j1$。点 B 代表离负载 0.1λ 处的线路输入，在该点，$z_{in}=0.6-j0.66$

2.9.3 SWR、电压最大值与最小值

考虑 $z_L=2+j1$ 的负载。在图 2-24 的史密斯圆图上，画出了通过 z_L（点 A）的 SWR 圆，它交实轴（Γ_r）于两个点，记为 P_{max} 和 P_{min}。在这两点上，$\Gamma_i=0$，$\Gamma=\Gamma_r$。此外，在实轴上，负载阻抗的虚部 $x_L=0$。根据 Γ 的定义

$$\Gamma=\frac{z_L-1}{z_L+1},\tag{2.108}$$

点 P_{max} 和 P_{min} 对应以下特殊情况

$$\Gamma=\Gamma_r=\frac{r_L-1}{r_L+1}\quad（对\ \Gamma_i=0），\tag{2.109}$$

其中，P_{min} 对应 $r_L<1$ 的情况，而 P_{max} 对应 $r_L>1$ 的情况。将 $|\Gamma|$ 表示成 S 的函数，重写式（2.107）得

$$|\Gamma|=\frac{S-1}{S+1}\tag{2.110}$$

对点 P_{max} 和 P_{min}，有 $|\Gamma|=\Gamma_r$；所以

$$\Gamma_r=\frac{S-1}{S+1}\tag{2.111}$$

式（2.109）和式（2.111）在形式上的相似性表明：$S=r_L$。然而，根据定义，$S\geq1$，所以只有点 P_{max}（对应 $r_L>1$）满足相似性条件。在图 2-24 中，在点 P_{max} 处 $r_L=2.6$，所以，$S=2.6$。换句话说，在 SWR 圆与实轴 Γ_r 的右侧交点 P_{max} 点处，S 在数值上等于 r_L。

点 P_{max} 和 P_{min} 也分别表示线路上电压幅值 $|\tilde{V}|$ 最大点和最小点离负载的距离。分

析一下式（2.103）所给Γ_l的定义，很容易证明以上结论。在点P_{max}处，Γ_l的总相角，即（$\theta_r - 2\beta l$），等于0（$\theta_r > 0$时）或2π（$\theta_r < 0$时）。这正好是达到$|\tilde{V}|_{max}$的条件，如式（2.55）所示。同样，在点P_{min}处Γ_l的总相角等于π，正好是达到$|\tilde{V}|_{min}$的条件。所以，对于图2-24所示由SWR圆代表的传输线，其负载到最近的电压最大点的距离是$l_{max} = 0.037\lambda$，通过顺时针移动点A（即对应的负载的位置）到点P_{max}得到；而负载到最近的电压最小点的距离则是$l_{min} = 0.287\lambda$，对应于顺时针从点A旋转到点P_{min}。因为$|\tilde{V}|_{max}$的位置就是$|\tilde{I}|_{min}$的位置，$|\tilde{V}|_{min}$的位置也就是$|\tilde{I}|_{max}$的位置，所以史密斯圆图是确定线路上所有的最大值点、最小值点距离的方便工具（驻波波型具有$\lambda/2$的周期）。 73

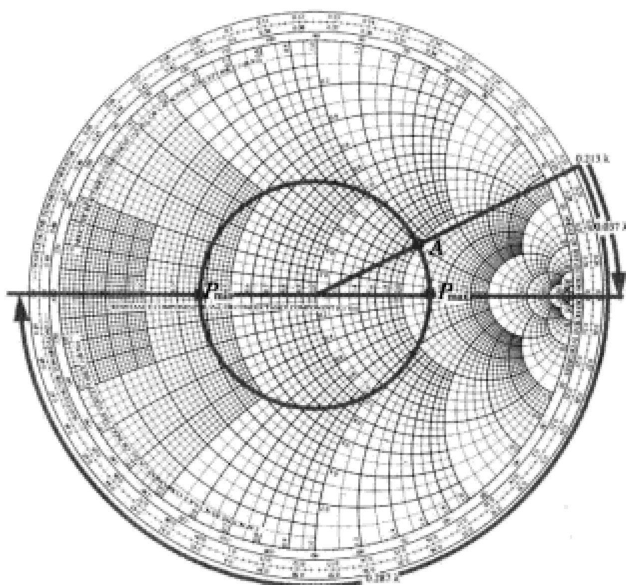


图2-24　点A代表归一化的负载$z_L = 2 + j1$。驻波比为$S = 2.6$（P_{max}处），负载到第一个电压最大点的距离为$l_{max} = (0.25 - 0.213)\lambda = 0.037\lambda$，而到第一个最小点的距离为$l_{min} = (0.037 + 0.25)\lambda = 0.287\lambda$

2.9.4　阻抗到导纳的变换

在求解某些传输线问题时，用导纳运算比用阻抗更为方便。通常，阻抗都是复数，包含电阻R和电抗X两部分

$$Z = R + jX \quad (\Omega) \tag{2.112}$$ 74

Z的导纳（admittance）Y定义为Z的倒数

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} \quad (\mathrm{S}) \tag{2.113}$$

Y的实部称为电导（conductance）G，虚部称为电纳（susceptance）B。所以

$$Y = G + jB \quad (\mathrm{S}) \tag{2.114}$$

比较式（2.114）和式（2.113），有

$$G=\frac{R}{R^2+X^2}\quad (\mathrm{S}), \tag{2.115a}$$

$$B=\frac{-X}{R^2+X^2}\quad (\mathrm{S}) \tag{2.115b}$$

归一化阻抗 z 定义为 Z 与线路特征阻抗 Z_0 的比值。采用同样的概念来定义归一化导纳（normalized admittance）y，即

$$y=\frac{Y}{Y_0}=\frac{G}{Y_0}+\mathrm{j}\frac{B}{Y_0}=g+\mathrm{j}b\quad (\text{无量纲}), \tag{2.116}$$

其中，$Y_0=1/Z_0$，是线路的特征导纳（characteristic admittance）；小写的 g、b 分别表示 y 的归一化电导（normalized conductance）和归一化电纳（normalized susceptance），公式为

$$g=\frac{G}{Y_0}=GZ_0\quad (\text{无量纲}), \tag{2.117a}$$

$$b=\frac{B}{Y_0}=BZ_0\quad (\text{无量纲}) \tag{2.117b}$$

当然，归一化导纳 y 等于归一化阻抗 z 的倒数

$$y=\frac{Y}{Y_0}=\frac{Z_0}{Z}=\frac{1}{z} \tag{2.118}$$

相应，根据式（2.105），归一化的负载导纳 y_L 为

$$y_L=\frac{1}{z_L}=\frac{1-\Gamma}{1+\Gamma}\quad (\text{无量纲}) \tag{2.119}$$

下面考虑距负载 $l=\lambda/4$ 处的归一化输入阻抗 z_{in}。根据式（2.102）和 $2\beta l=4\pi l/\lambda=4\pi/4\lambda=\pi$，因此

$$z_{in}(l=\lambda/4)=\frac{1+\Gamma e^{-j\pi}}{1-\Gamma e^{-j\pi}}=\frac{1-\Gamma}{1+\Gamma}=y_L \tag{2.120}$$

这就是说，在史密斯圆图上，旋转 $\lambda/4$ 的距离，z_L 就转换成了 y_L。在图 2-25 中，代表 z_L 和 y_L 的点，落在 SWR 圆的同一直径的两端，彼此相对。事实上，史密斯圆图上的这种变换，可用于求取任何归一化阻抗对应的归一化导纳，反之亦然。

史密斯圆图既可以使用归一化阻抗来运算，也可以使用归一化导纳来运算。当用作阻抗图时，史密斯圆图由 r_L 和 x_L 圆族构成，两种圆族分别表示归一化阻抗 z_L 的归一化电阻和电抗。当用作导纳图时，r_L 圆族变成 g_L 圆族，x_L 圆族变成 b_L 圆族，g_L 和 b_L 分别是归一化负载导纳 y_L 的归一化电导和电纳。

例 2-10 史密斯圆图的计算

一根 50Ω 的无损线，端接一负载阻抗 $Z_L=(25+j50)\,\Omega$。利用史密斯圆图求：（a）电压反射系数；（b）电压驻波比；（c）第一个电压最大和最小值到负载的位置；（d）线路的输入阻抗，假定线路长度为 3.3λ；（e）线路的输入导纳。

75

解答：（a）归一化负载阻抗为

$$z_L=\frac{Z_L}{Z_0}=\frac{25+j50}{50}=0.5+j1,$$

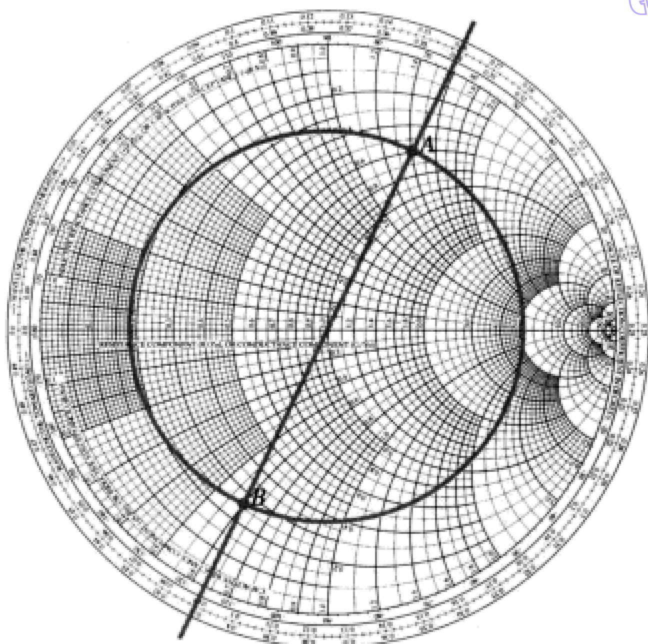


图 2-25 点 *A* 代表归一化负载 $z_L = 0.6 + j1.4$。其对应的归一化导纳为 $y_L = 0.25 - j0.6$，位于点 *B*

在图 2-26 的史密斯圆图中，标记为点 *A*。利用直尺，从圆图的中心 *O* 点出发，画过点 *A* 的射线，直到圆图的外圆周。该射线与标记为“angle of reflection coefficient in degrees”（角度表示的反射系数角）的尺度相交，角度为 $\theta_r = 83°$。接下来，用直尺测量点 *O* 到点 *A* 的线段长度 d_A，以及点 *O* 到点 *O'* 的线段长度 $d_{O'}$。这里 *O'* 为 $r_L = 0$ 圆上的任一点，长度 $d_{O'}$ 等于 $|\Gamma| = 1$ 圆的半径。从而得到 Γ 的幅值为 $|\Gamma| = d_A / d_{O'} = 0.62$。所以 76

$$\Gamma = 0.62 e^{j83°} = 0.62 \angle 83° \quad (2.121)$$

(b) 使用圆规，过 *A* 点、以 *O* 为圆心画 SWR 圆，交 Γ_r 轴于点 *B* 和点 *C*。点 *B* 的 r_L 值为 4.26，这也是 *S* 的数值。所以 77

$$S = 4.26$$

(c) 第一个电压最大值点位于 SWR 圆上的点 *B*，对应 WTG 尺度上 0.25λ 的位置。代表负载的点 *A*，位于 WTG 尺度的 0.135λ 处。所以，从负载到第一个电压最大值点的距离为

$$l_{max} = (0.25 - 0.135)\lambda = 0.115\lambda$$

第一个电压最小值位于点 *C*。在 WTG 尺度上，在 *A*、*C* 两点间移动，可得

$$l_{min} = (0.5 - 0.135)\lambda = 0.365\lambda,$$

它比 l_{max} 远 0.25λ 的距离。

(d) 因为线路长度为 3.3λ，从其中减掉 0.5λ 的整数倍，剩余 0.3λ。从 WTG 尺度上的负载点 0.135λ 出发，线路的输入点位于 (0.135 + 0.3)λ = 0.435λ 处。该位置对应于 SWR 圆上的点 *D*，测得相应的归一化阻抗为

$$z_{in} = 0.28 - j0.40,$$

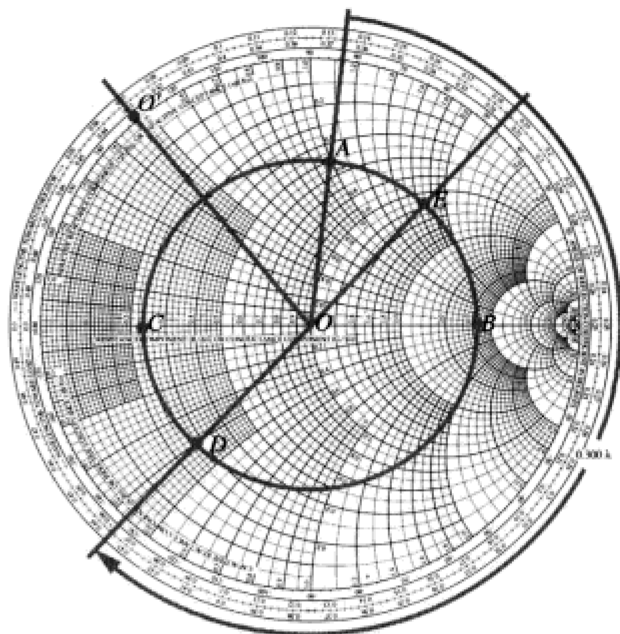


图 2-26　例 2-10 的解答。点 A 代表 WTG 尺度上 0.135λ 处的归一化负载 $z_L = 0.5 + j1$。在点 A，$\theta_r = 83°$，$|\Gamma| = d_A/d_{O'} = \overline{OA}/\overline{OO'} = 0.62$。在点 B，驻波比为 $S = 4.26$。由 A 到 B 的距离可得 $l_{max} = 0.115\lambda$，由 A 到 C 的距离可得 $l_{min} = 0.365\lambda$。点 D 代表归一化输入阻抗 $z_{in} = 0.28 - j0.40$，而点 E 则代表归一化输入导纳 $y_{in} = 1.15 + j1.7$

因此

$$Z_{in} = z_{in} Z_0 = (0.28 - j0.40)50 = (14 - j20)\quad (\Omega)$$

(e) 求归一化输入导纳 y_{in} 时，在 SWR 圆上，从 z_{in} 出发，移动 0.25λ 的距离，到达 z_{in} 的镜像点 E。读取点 E 的坐标得

$$y_{in} = 1.15 + j1.7,$$

对应的输入导纳为

$$Y_{in} = y_{in} Y_0 = \frac{y_{in}}{Z_0} = \frac{1.15 + j1.7}{50} = (0.023 + j0.034)\quad (S)$$ ■

例 2-11　利用史密斯圆图求 Z_L

本例类似例 2-5，但这里采用史密斯圆图求解。

对于一根 50Ω 的传输线，假定其电压驻波比为 $S = 3$，第一个电压最小点位于离负载 5cm 处，相邻两个最小点的间距为 20cm，求负载阻抗。

解答：相邻最小值点间距为 $\lambda/2$，因此 $\lambda = 40$cm。以波长为单位时，第一个最小值点位于

$$l_{min} = \frac{5}{40} = 0.125\lambda$$

图 2-27 的史密斯圆图上的点 A 对应 $r_L = S = 3$。利用圆规，绘出经过点 A 的恒 S 圆。

点 B 对应电压最小值点位置。从点 B 出发，逆时针方向沿 WTL 尺度往负载方向移动 0.125λ，到达点 C，即负载位置。点 C 处的归一化负载阻抗为

$$z_L = 0.6 - j0.8$$

乘以 $Z_0 = 50\Omega$，得

$$Z_L = 50(0.6 - j0.8) = (30 - j40) \quad (\Omega)$$

■

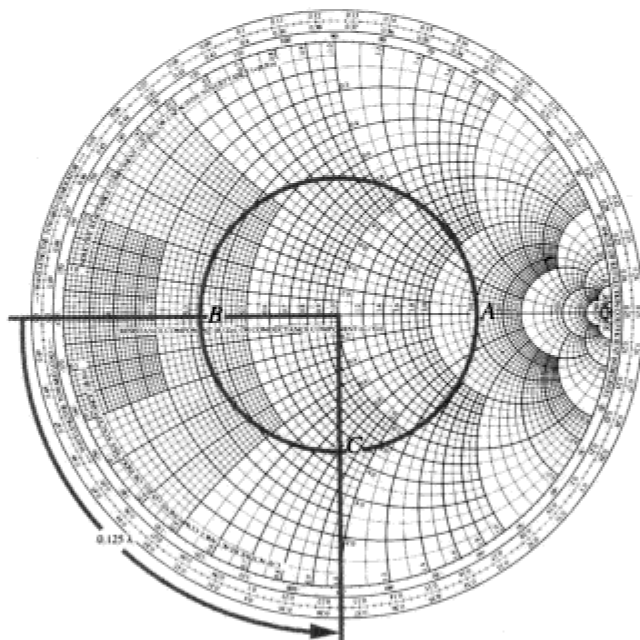


图 2-27 例 2-11 的解答。点 A 处 $S=3$，点 B 表示电压最小点的位置，点 C 代表沿 WTL 尺度与点 B 相距 0.125λ 的负载。在 C 点，$z_L = 0.6 - j0.8$

复习题

Q2.19 史密斯圆图的最外圆周代表 $|\Gamma|$ 取什么数值？圆图上的哪点代表负载匹配？

Q2.20 什么是 SWR 圆？在 SWR 圆上，什么物理量对于各点都是常数？ 78

Q2.21 绕史密斯圆图一整圈对应多长的线路长度？为什么？

Q2.22 在 SWR 圆上，对应线路上电压最大和最小值位置的点在何处？为什么？

Q2.23 给定归一化阻抗 z_L，如何应用史密斯圆图求对应的归一化导纳 $y_L = 1/z_L$？ 79

2.10 阻抗匹配

传输线往往一端同发电机电路相连，另一端同负载相连。负载可以是天线或具有等效输入阻抗 Z_L 的任何电路。当传输线的特征阻抗 $Z_0 = Z_L$ 时，称传输线同负载是**匹配的**。这时，在线路的负载端不会发生反射。由于传输线的主要用途是输送功率或发送代码信号（如数据），匹配的负载可以使传送到负载的功率最大。

负载匹配传输线的最简单方法，是将负载设计成具有阻抗 $Z_L = Z_0$。但不幸的是，在实际应用中，这往往不可行，因为负载电路还需满足其他要求。另外一种解决方案是，在负载与传输线之间，加入**阻抗匹配网络**（impedance-matching network），如

图 2-28 所示。匹配网络的目的在于，消除传输线与网络接口 MM' 处的反射。这一目的的实现，靠的是对匹配网络进行设计，使其从传输线一侧看进去的阻抗等于 Z_0。如果网络是无损的，则进入到网络的全部功率最终都将进入负载。匹配网络可以由集中参数元件（为避免欧姆损耗，只使用电容和电感）或具有适当长度与端接的传输线段组成。这里介绍后一种配置，即**单短分支匹配网络**（single-stub matching network）。

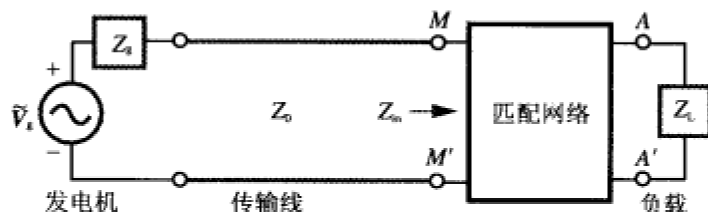


图 2-28 匹配网络的作用在于，转换负载阻抗 Z_L，使得从传输线看进去的网络输入阻抗 Z_{in} 等于传输线的 Z_0

匹配网络意在使负载阻抗 $Z_L = R_L + jX_L$ 与无损线的特征阻抗 Z_0 匹配。这意味着，网络必须能够把位于负载处的负载阻抗实部 R_L，转换成位于接口 MM' 处（图 2-28）的 Z_0，把负载处的虚部 X_L，转换成 MM' 处的 0。为完成这两个转换，匹配网络至少要有两个自由度，即两个可调节的参数。图 2-29 所示的单短分支匹配网络，包括了两小段传输线，一段长度为 d，将负载连接到馈线的 MM' 接口处；另外一段长度为 l，在 MM' 接口处同第一段并联。这第二小段线称为**短分支**（stub），通常以短路或开路端接。图 2-29 所示的短分支采用了短路端接。

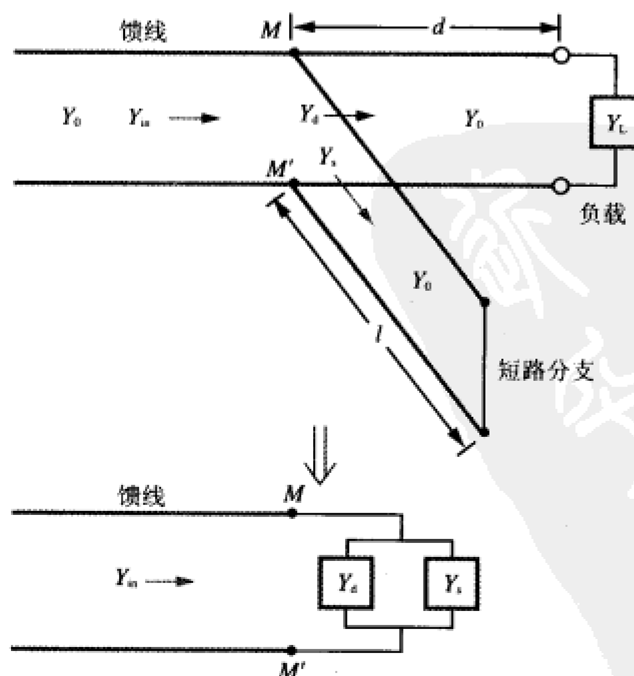


图 2-29 短路分支匹配网络

所要求的两个自由度由短分支的长度 l 以及负载到分支点的距离 d 提供。由于在 MM' 接口处，短分支是以并联的形式加入线路的，因此也称为**并联短分支**（shunt stub），这种情况采用导纳比用阻抗容易处理。匹配过程包括两个基本步骤。第一步，选择距离 d，转换负载导纳 $Y_L=1/Z_L$，使得从 MM' 处看进去的输入导纳为 $Y_d=Y_0+jB$ 的形式，其中 Y_0 为馈线的特征导纳。第二步，选择短分支的长度 l，使它从 MM' 处看进去的输入导纳 Y_s 等于 $-jB$。这样，在 MM' 处，两导纳的并联之和就为 Y_0，到达了阻抗匹配目的。这一过程用例 2-12 进一步说明。

例 2-12 单短分支匹配

一根 50Ω 的传输线连接到负载阻抗为 $Z_L=(25-j50)\Omega$ 的天线上。求匹配的短路分支的接入位置及长度。

80

解答：

归一化的负载阻抗为

$$z_L=\frac{Z_L}{Z_0}=\frac{25-j50}{50}=0.5-j1,$$

它位于图 2-30 的史密斯圆图的 A 点。接下来，画过点 A 的恒 S 圆。在进行匹配时，用导纳比用阻抗方便。归一化负载导纳 Y_L 位于 B 点，可通过将点 A 旋转 0.25λ 得到，或作连接点 A 和中心点 O 的直线，求得点 A 在 S 圆上的镜像点即是。在点 B 处 y_L 的数值为

$$y_L=0.4+j0.8,$$

它位于 WTG 尺度的 0.115λ 位置。在导纳图中，r_L 圆族变成了 g_L 圆族，x_L 圆族变成了 b_L 圆族。为了达到匹配，需从负载往发电机移动距离 d，则该处端接负载的传输线的归一化输入导纳 y_d（图 2-29）的实部应该等于 1。在史密斯圆图上，S 圆与 $g_L=1$ 圆的两个交点，即**匹配点**（matching point）C（图 2-30）和 D（图 2-31），都可以满足以上要求，它们给图 2-29 中的距离 d 提供了两种可能的解答。

点 C 的解答（图 2-30）：在点 C 有

$$y_d=1+j1.58,$$

它位于 WTG 尺度的 0.178λ 处。点 B 到点 C 的距离为

$$d_1=(0.178-0.115)\lambda=0.063\lambda$$

从发电机往接口点看，短路分支及负载线二者并联的归一化输入导纳为

$$y_{in}=y_s+y_d,$$

其中，y_s 是短分支的归一化输入导纳。为使馈线同并联组合电路匹配，需使 $y_{in}=1+j0$。因此

$$1+j0=y_s+1+j1.58,$$

或

$$y_s=-j1.58$$

81

短路对应的归一化导纳为 $-j\infty$，它位于史密斯圆图上的 E 点，在 WTG 尺度上的读数为 0.25λ。归一化输入导纳 $-j1.58$ 则位于 F 点，在 WTG 尺度上的读数为 0.34λ。因此

82

$$l_1 = (0.34 - 0.25)\lambda = 0.09\lambda$$

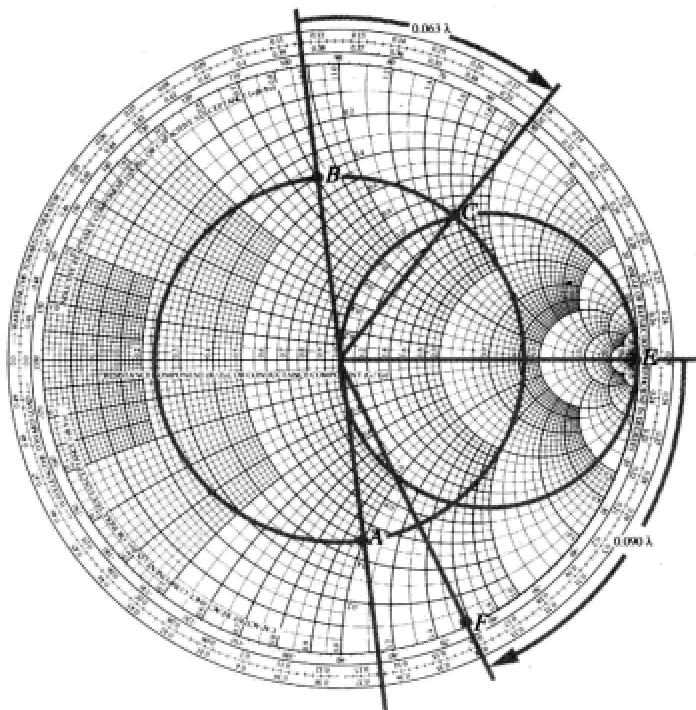


图 2-30　例 2-12 对应点 C 的解答。点 A 为归一化负载 $z_L = 0.5 - j1$；点 B 为 $y_L = 0.4 + j0.8$。点 C 是 SWR 圆与 $g_L = 1$ 圆的交点（上部）。从 B 到 C 的距离是 $d_1 = 0.063\lambda$。短路分支的长度（从点 E 到点 F）为 $l_1 = 0.090\lambda$

点 D 的解答（图 2-31）：在点 D 有

$$y_d = 1 - j1.58,$$

点 B 到点 D 的距离为

$$d_2 = (0.322 - 0.115)\lambda = 0.207\lambda$$

83

短分支所需的归一化输入导纳为 $y_s = +j1.58$，它则位于 G 点，在 WTG 尺度上的读数为 0.16λ。沿 WTG 尺度顺时针从点 E 旋转到点 G，包含 0.25λ 的半圈，再加上额外的 0.16λ，所以

$$l_2 = (0.25 + 0.16)\lambda = 0.41\lambda$$ ■

复习题

Q2.24　通过匹配网络使任意负载同无损线匹配，网络最少应该提供的自由度是多少？

Q2.25　在单短分支匹配网络中，其两个自由度是什么？

Q2.26　当传输线通过单短分支网络匹配负载时，不会有波反射回发电机。由负载以及由短路分支反射的波，当它们到达图 2-29 中的 MM' 接口时，会发生什么情况？

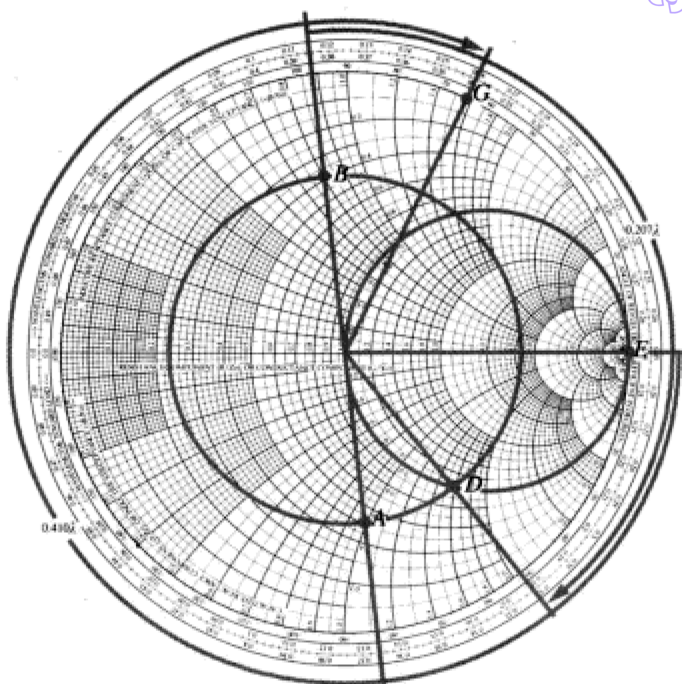


图 2-31 例 2-12 对应点 D 的解答。点 D 是 SWR 圆与 $g_L=1$ 圆的第二个交点（下部）。B 到 D 的距离是 $d_2=0.207\lambda$，E 到 G 的距离为 $l_2=0.410\lambda$

2.11 传输线上的瞬态过程

前面对传输线上波传播的讨论，都集中于稳态条件下的单一频率、时谐信号的分析。所介绍的工具，如阻抗匹配技术，史密斯圆图技术等，都十分有用，具有广泛的应用范围。但它们不适合于处理电话线、计算机网络等场合中的数据信号和宽频信号。对于这类信号，有必要分析其随时间变化的瞬态行为。在传输线上，一个电压脉冲的**瞬态响应**（transient response），就是在传输线两端考虑其多重反射（回声）的情况下，该脉冲在传输线发送端和接收端之间来回传播的时间记录。

先考虑脉冲幅值为 V_0，持续时间为 τ 的单个矩形脉冲的简单情况。图 2-32a 所示，脉冲的幅度在 $t=0$ 之前为 0，在 $0\leqslant t\leqslant\tau$ 内为 V_0，以后又恢复为 0。该脉冲在数学上可以用两个阶跃函数的和表示如下

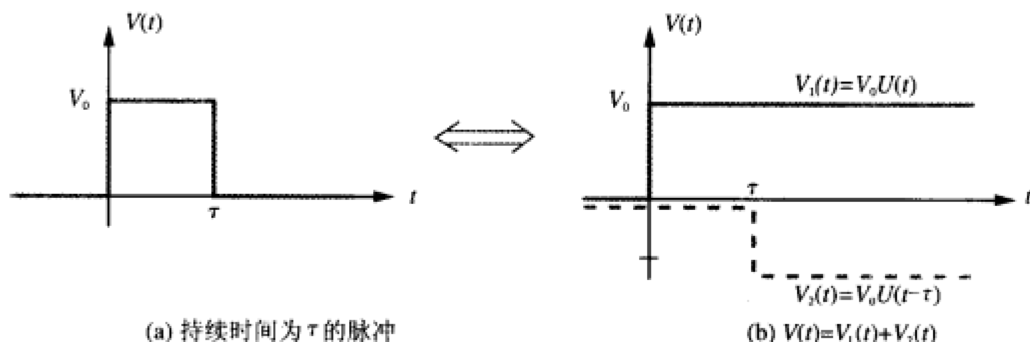
$$V(t)=V_1(t)+V_2(t)=V_0U(t)-V_0U(t-\tau), \tag{2.122}$$

其中，阶跃函数 $U(x)$ 定义如下

$$U(x)=\begin{cases}1 & 对于\ x\geqslant 0,\\ 0 & 对于\ x<0\end{cases} \tag{2.123}$$

第一个分量，$V_1(t)=V_0U(t)$，代表一个幅值为 V_0，在 $t=0$ 时刻开通，并一直维持的直流电压；而第二个分量 $V_2(t)=-V_0U(t-\tau)$，则代表一个幅值为 $-V_0$，在 $t=\tau$ 时刻开通，也一直维持的直流电压。从图 2-32b 可以看到，这两个分量的和在 $0\leqslant t\leqslant\tau$ 内为 V_0，在 $t>\tau$ 时为 0。将一个脉冲表示为两个阶跃函数，就可以用两个直

流信号的叠加来分析传输线上脉冲传播的瞬态行为。因此，若能找到描述单个阶跃函数瞬态行为的基本工具，则可以将该工具分别用于脉冲的两个分量，最后再将结果相加即可。



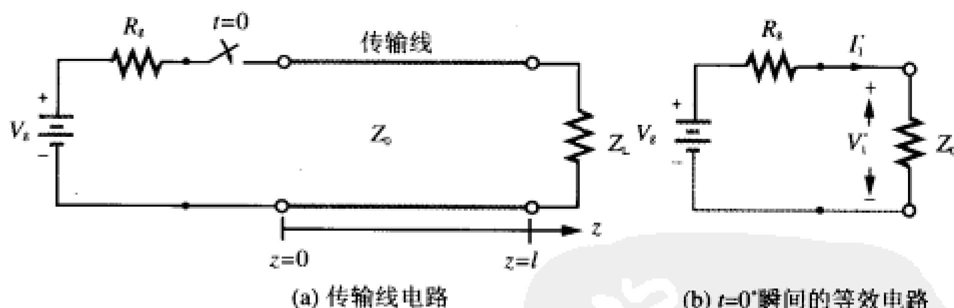
(a) 持续时间为 τ 的脉冲　　(b) $V(t)=V_1(t)+V_2(t)$

图 2-32　持续时间为 t 的矩形脉冲可以用极性相反、彼此位移 τ 的两个阶跃函数之和表示

2.11.1　瞬态响应

在图 2-33a 中，一个电压源为 V_g、串联电阻为 R_g 的发电机，连接到一根长度为 l、特征阻抗为 Z_0 的无损传输线。在线路的 $z=l$ 位置，端接纯电阻负载 Z_L。可见，在该电路中，所有阻抗都是实数。

84



(a) 传输线电路　　(b) $t=0^+$ 瞬间的等效电路

图 2-33　在（a）中电路开关闭合后的瞬间 $t=0^+$，该电路可以用（b）中的等效电路代替

发电机电路和传输线间的开关在 $t=0$ 时刻闭合。在开关闭合瞬间，传输线等效于接在发电机电路上、阻抗为其特征阻抗 Z_0 的负载。这是因为，当线路上没有信号时，负载阻抗 Z_L 不会影响到线路的输入阻抗。表示*初始状况*（initial condition）的电路如图 2-33b 所示。在传输线输入端的*初始电流*（initial current）I_1^+ 及对应的*初始电压*（initial voltage）V_1^+ 为

$$I_1^+=\frac{V_g}{R_g+Z_0}, \tag{2.124a}$$

$$V_1^+=I_1^+Z_0=\frac{V_gZ_0}{R_g+Z_0} \tag{2.124b}$$

在开关闭合以后的瞬间，V_1^+ 和 I_1^+ 的组合，构成了一个波，以速度 $u_p=1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ 沿线路传播。上标“+”用来表示该波沿 z 的正方向传播。当电路参数 $R_g=4Z_0$，$Z_L=2Z_0$

85

时，在三个不同瞬间，波的瞬态响应如图 2-34 所示。第一个瞬态响应的时刻是 $t_1 = T/2$，其中 $T = l/u_p$，是波走完整个线路所需要的时间。此时，波已经走完一半的线路，因此，在线路的一半上，电压为 V_1^+，而在线路的另外一半，电压仍然为 0，如图 2-34a 所示。在时刻 $t = T$，波到达负载处（$z = l$），由于 $Z_L \neq Z_0$，不匹配导致反射波出现，其幅值为

$$V_1^- = \Gamma_L V_1^+, \tag{2.125}$$

其中

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \tag{2.126}$$

为负载的反射系数。对于图 2-34 所示的具体情况，因 $Z_L = 2Z_0$，有 $\Gamma_L = 1/3$。在第一次反射之后，线路上的电压由两个波之和构成，它们就是初始波 V_1^+ 和反射波 V_1^-。在 $t = 3T/2$ 时刻，传输线上的电压如图 2-34b 所示。在线路的前半部分（$0 \leqslant z \leqslant l/2$），$V(z, 3T/2)$ 等于 V_1^+，而在后半部分（$l/2 \leqslant z \leqslant l$），$V(z, 3T/2)$ 则等于（$V_1^+ + V_1^-$）。 86

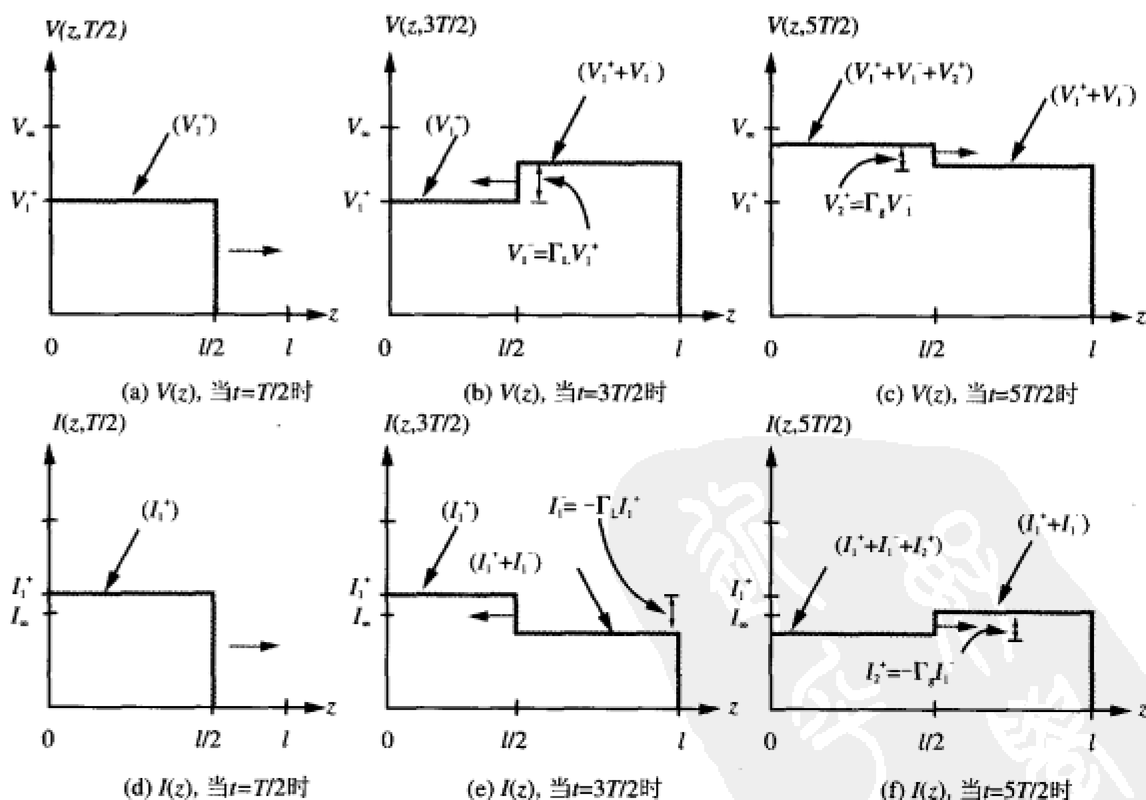


图 2-34 在单位阶跃电压作用下，无损线上的电压、电流在 $t = T/2$、$t = 3T/2$、$t = 5T/2$ 等三个时刻的分布。电路参数为 $R_g = 4Z_0$，$Z_L = 2Z_0$；对应的反射系数为 $\Gamma_L = 1/3$，$\Gamma_g = 3/5$

在 $t = 2T$ 瞬间，反射波 V_1^- 到达线路的发射端。如果 $R_g \neq Z_0$，则发射端（$z = 0$）的不匹配将产生反射，其幅值 V_2^+ 为

$$V_2^+ = \Gamma_g V_1^- = \Gamma_g \Gamma_L V_1^+, \tag{2.127}$$

其中

$$\Gamma_g = \frac{R_g - Z_0}{R_g + Z_0} \tag{2.128}$$

为发电机电阻 R_g 的反射系数。对于 $R_g = 4Z_0$，有 $\Gamma_g = 0.6$。在 $t = 2T$ 之后，随着时间的变化，V_2^+ 波向负载端前进，并将自己叠加到原有的电压条件上。所以，在 $t = 5T/2$ 时刻，线路前半部分的电压为

$$V(z, 5T/2) = V_1^+ + V_1^- + V_2^+ = (1 + \Gamma_L + \Gamma_L\Gamma_g)V_1^+ \quad (0 \leqslant z \leqslant l/2), \tag{2.129a}$$

而线路后半部分的电压则为

$$V(z, 5T/2) = V_1^+ + V_1^- = (1 + \Gamma_L)V_1^+ \quad (l/2 \leqslant z \leqslant l) \tag{2.129b}$$

电压分布如图 2-34c 所示。

以上仅仅考虑了电压波 $V(z,t)$ 的瞬态响应。电流 $I(z,t)$ 对应的瞬态响应如图 2-34d ~ 图 2-34f所示。除了一处重要差别外，电流响应过程与前面分析的电压 $V(z,t)$ 的响应过程基本相同。这个差别就是：在线路两端的反射电压，都通过该端的反射系数与入射电压相联系；而反射电流则不同，它通过负的反射系数与入射电流相联系。波反射的这一特性对应于式（2.49b）。因此有

$$I_1^- = -\Gamma_L I_1^+, \tag{2.130a}$$

$$I_2^+ = -\Gamma_g I_1^- = \Gamma_g \Gamma_L I_1^+, \tag{2.130b}$$

等等关系。

多重反射过程会一直持续下去，当 t 趋向 ∞ 时，$V(z,t)$ 的终了值在传输线上各处相等，为

$$\begin{aligned} V_\infty &= V_1^+ + V_1^- + V_2^+ + V_2^- + V_3^+ + V_3^- + \cdots \\ &= V_1^+[1 + \Gamma_L + \Gamma_L\Gamma_g + \Gamma_L^2\Gamma_g + \Gamma_L^2\Gamma_g^2 + \Gamma_L^3\Gamma_g^2 + \cdots] \\ &= V_1^+[(1 + \Gamma_L)(1 + \Gamma_L\Gamma_g + \Gamma_L^2\Gamma_g^2 + \cdots)] \\ &= V_1^+(1 + \Gamma_L)[1 + x + x^2 + \cdots], \end{aligned} \tag{2.131}$$

其中，$x = \Gamma_L\Gamma_g$。最后一个方括号中的级数是以下函数的二项式级数展开

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \cdots, \text{对} |x| < 1 \tag{2.132}$$

因此，式（2.131）可以改写成紧凑形式

$$V_\infty = V_1^+ \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L\Gamma_g} \tag{2.133}$$

利用式（2.124b）、式（2.126）以及式（2.128）分别代替 V_1^+、Γ_L 和 Γ_g，以上结果进一步简化成

$$V_\infty = \frac{V_g Z_L}{R_g + Z_L} \tag{2.134}$$

V_∞ 称线路上的稳态电压（steady-state voltage），其表达式正好等于基于直流分析得出的结果，即把图 2-33a 的电路中的传输线看成发电机与负载之间的简单连线时的负载电压。对应的稳态电流（steady-state current）为

87

$$I_\infty = \frac{V_\infty}{Z_L} = \frac{V_g}{R_g + Z_L} \tag{2.135}$$

 M2.5-2.9

2.11.2 弹射图

对电压和电流波在线路上的来回反射进行追踪是件十分乏味的事情。弹射图（bounce diagram）作为一个图形展示工具，使得上述工作变得相对简单。图 2-35a、图2-35b中的水平轴表示沿传输线的位置，垂直轴则代表时间。图 2-35a 对应 $V(z,t)$，图2-35b则对应 $I(z,t)$。图 2-35a 中弹射图上的曲折线，用来表示电压波在线路上的行进情况。入射波 V_1^+ 起始于 $z=t=0$，沿正 z 轴方向行进，直到在时刻 $t=T$ 到达负载位置 $z=l$。在弹射图的最顶端，在发电机侧标明了反射系数 $\Gamma=\Gamma_g$，在负载侧标明 $\Gamma=\Gamma_L$。在曲折线的第一根直线段的终点，画出第二根线，以代表反射电压波 $V_1^- = \Gamma_L V_1^+$。每个新直线段的幅值，等于前一直线段的幅值及其终点的反射系数的乘积。在图 2-35b 中电流 $I(z,t)$ 的弹射图遵从同样的绘制过程，只是在顶部的反射系数 Γ_L、Γ_g的前面要加个负号“-”。

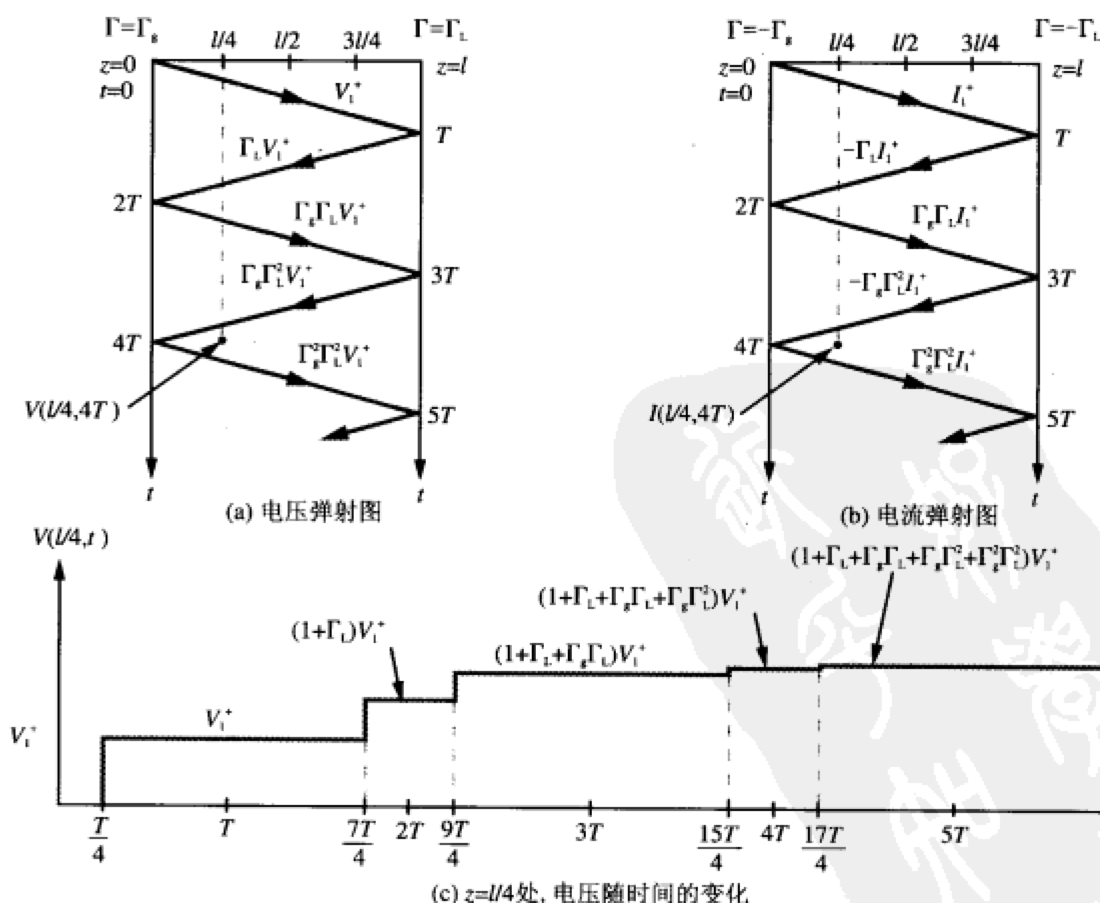


图 2-35 弹射图：（a）电压；（b）电流；（c）$z=l/4$ 处，电压随时间变化曲线［从（a）中 $l/4$ 处的垂直虚线导出，对应电路的 $\Gamma_g=3/5$，$\Gamma_L=1/3$］

利用弹射图，在任何点 z_1 及任何时刻 t_1 的总电压（或电流）可以很容易确定，只需过点 z_1 作垂直线，然后将 $t=0$ 到 $t=t_1$ 之间该直线所交叉的所有曲折线段的电压（或电流）相加即可。例如，为了求 $z=l/4$，$t=4T$ 处的电压，过点 $z=l/4$ 作垂直虚线，从 $t=0$ 延伸到 $t=4T$，如图 2-35a 所示。该虚线共交叉了四根线段。因此在 $z=l/4$，$t=4T$ 处的总电压为

$$V(l/4,4T)=V_1^++\Gamma_L V_1^++\Gamma_g\Gamma_L V_1^++\Gamma_g\Gamma_L^2 V_1^+=V_1^+(1+\Gamma_L+\Gamma_g\Gamma_L+\Gamma_g\Gamma_L^2)$$

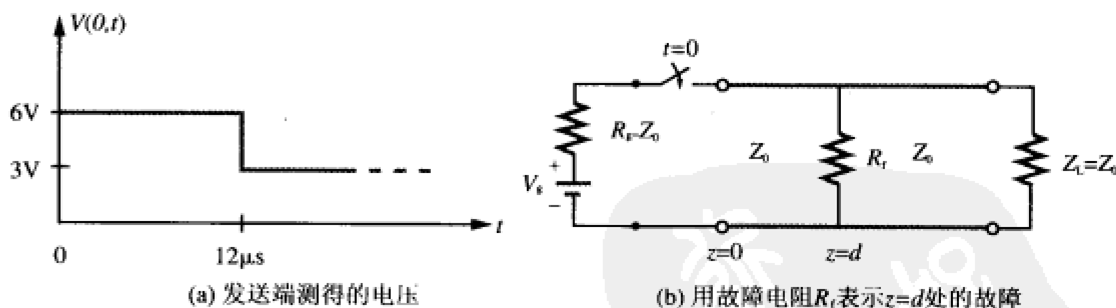
在特定位置 z 处，V 随时间变化的曲线，只需把经过 z 点的垂直虚线作为横轴（时间轴），绘出 V 值即可得到。图 2-35c 所示为 $z=l/4$ 处，V 随时间变化的函数曲线，相应电路的 $\Gamma_g=3/5$，$\Gamma_L=1/3$。

 **D2.5-2.9**

例 2-13　时域反射仪

时域反射仪（time-domain reflectometer，TDR）是用于定位传输线故障位置的仪器。考虑这样一个例子，一根很长的地下或海底电缆，在距离线路发送端的某处 d 发生了故障。故障可能改变电缆的电特性或引起变形，以致在故障位置表现出不同于特征阻抗 Z_0 的阻抗 Z_{Lf}。TDR 往线路发送一个阶跃电压，通过观测发送端电压随时间的变化，就可能确定故障的位置及其严重程度。

图 2-36a 所示为连接在 75Ω 匹配传输线输入端的示波器所记录的电压波形，试确定：(a) 发电机电压；(b) 故障位置；(c) 故障的并联电阻。已知线路绝缘采用特氟隆材料，其 $\varepsilon_r=2.1$。



(a) 发送端测得的电压　　(b) 用故障电阻 R_f 表示 $z=d$ 处的故障

图 2-36　例 2-13 的时域反射仪

解答：(a) 由于线路是匹配的，这意味着 $R_g=Z_L=Z_0$。在图 2-36b 中，故障位于距离发送端 d 处，用一个并联电阻 R_f 表示。对于匹配的线路，根据式 (2.124b) 有

88

$$V_1^+=\frac{V_g Z_0}{R_g+Z_0}=\frac{V_g Z_0}{2Z_0}=\frac{V_g}{2}$$

根据图 2-36a，$V_1^+=6\text{V}$，因此

$$V_g=2V_1^+=12(\text{V})$$

(b) 线路上波的传播速度为

89

$$u_p=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}=\frac{3\times10^8}{\sqrt{2.1}}=2.07\times10^8(\text{m/s})$$

对于在 d 处的故障，回波的双程延迟时间为

$$\Delta t = \frac{2d}{u_p}$$

从图 2-36a 得，$\Delta t = 12\mu s$。因此

$$d = \frac{\Delta t}{2} u_p = \frac{12 \times 10^{-6}}{2} \times 2.07 \times 10^8 = 1242(\text{m})$$

（c）在图 2-36a 中，$V(0,t)$ 的变化量代表 V_1^-，因此

$$V_1^- = \Gamma_f V_1^+ = -3(\text{V}),$$

或

$$\Gamma_f = \frac{-3}{6} = -0.5$$

其中，Γ_f 为 $z = d$ 处的故障负载 Z_{Lf} 引起的反射系数。

根据式（2.49a），有

$$\Gamma_f = \frac{Z_{Lf} - Z_0}{Z_{Lf} + Z_0},$$

由此可得，$Z_{Lf} = 25\Omega$。故障负载由故障并联电阻 R_f 及故障点右端线路的特征阻抗 Z_0 构成，因此

$$\frac{1}{Z_{Lf}} = \frac{1}{R_f} + \frac{1}{Z_0},$$

所以，并联电阻为 37.5Ω。

 **D2.10-2.13**

复习题

Q2.27　瞬态分析的用途是什么？

Q2.28　本节介绍的是阶跃电压的瞬态分析。如何将其用于脉冲响应的分析？

Q2.29　电压弹射图和电流弹射图的区别在哪里？

本章要点

- 传输线是连接发电机与负载的双端口网络。在线路上行进的电磁波，会产生欧姆损耗和色散效应，并在发电机和负载两端发生反射。如果线路长度远小于波长 λ，则这些传输线效应可以忽略。
- TEM 传输线由两根导体构成，供横向电磁波传播。横向电磁波的特点在于，其电场和磁场垂直于传播方向。TEM 线路可以用包含 4 个线路参数（R'、L'、G' 和 C'）的集中参数模型表示。这 4 个线路参数的值由线路几何结构，导体及导体间绝缘材料的构造参数，以及角频率 ω 来确定。
- 波在传输线上的传播，决定于线路的传播常数 $\gamma = \alpha + j\beta$ 以及特征阻抗 Z_0，可以用电压相量 $\tilde{V}(z)$ 及相应的电流相量 $\tilde{I}(z)$ 表示。γ 和 Z_0 是由 ω 和四个线路参数确定的。
- 如果 $R' = G' = 0$，线路就是无损的（$\alpha = 0$）。无损线是非色散的，这意味着波

90

的相速与其振荡频率无关。

- 通常，线路上存在两个波，即来自发电机的入射波和负载引起的反射波。这两个波产生周期为 $\lambda/2$ 的驻波波型。电压驻波比 S，等于线路上的最大、最小电压幅值之比，其变化范围在1（当负载匹配 $Z_L = Z_0$ 时）到∞（当线路端接短路、开路或为纯电抗负载时）之间。
- 端接开路或短路的线路，其输入阻抗是纯电抗性质的。这一特性可用于设计等效电感或电容。
- 无损线传递到负载的功率，在入射功率中所占比重为 $(1-|\Gamma|^2)$。
- 史密斯圆图是分析传输线问题、设计阻抗匹配网络的极其有用的作图技术。
- 匹配网络放置在负载和馈线之间，用以消除往发电机方向的反射。匹配网络既可以由电容、电感等集中参数元件构成，也可以由具有适当长度和端接的若干小段传输线构成。
- 脉冲的瞬态分析可以利用弹射图来完成。弹射图是一种作图技术，用以跟踪传输线上发电机和负载两端之间的反射。

重要术语汇总

请解释下列术语的意义或给出定义：

色散传输线	TEM 传输线	高阶传输线	集中参数模型
传输线参数	固有电阻 R_s	理想导体	理想电介质
架空线	电报方程组	复传播常数 γ	衰减常数 α
相位常数 β	特征阻抗 Z_0	无损线	驻波
无畸变线	电压反射系数 Γ	匹配传输线	驻波波型
同相	反相	电压最大值和最小值	电流最大值和最小值
电压驻波比（VSWR 或 SWR）S	开槽线	输入阻抗 Z_{in}	短路线
开路线	四分之一波长变换器	史密斯圆图	单位圆
归一化阻抗	归一化负载电阻 r_L	归一化负载电抗 x_L	WTG 及 WTL
SWR 圆	导纳 Y	电导 G 和电纳 B	阻抗匹配
匹配网络	单短分支匹配	瞬态响应	弹射图

91

习题

2.1～2.4　传输线模型

2.1* 　长度为 l 的传输线将负载连接到振荡频率为 f 的正弦电压源。假定线路上的波速为

* 　答案见附录D。

c，对于以下情况，在求解电路时忽略传输线的影响是否合理？

（a）$l=20\text{cm}$，$f=10\text{kHz}$。

（b）$l=50\text{km}$，$f=60\text{Hz}$。

（c）$l=20\text{cm}$，$f=300\text{MHz}$。

（d）$l=1\text{mm}$，$f=100\text{GHz}$。

2.2　计算同轴电缆的线路参数 R'、L'、G'和 C'。已知，电缆内导体直径为 0.5cm，外导体直径为 1cm；填充的绝缘材料参数为 $\mu=\mu_0$，$\varepsilon_r=2.25$，$\sigma=10^{-3}\text{S/m}$；导体材料为铜，其 $\mu_c=\mu_0$，$\sigma_c=5.8\times10^7\text{S/m}$；运行频率为 1GHz。

2.3* 1GHz 的平行板传输线，由 1.5cm 宽的两铜带构成，中间由 0.2cm 厚的聚苯乙烯隔开。铜的参数从附录 B 查得为 $\mu_c=\mu_0=4\pi\times10^{-7}\text{H/m}$，$\sigma_c=5.8\times10^7\text{S/m}$；聚苯乙烯的 $\varepsilon_r=2.6$。假定聚苯乙烯的 $\mu=\mu_0$，$\sigma\approx0$。利用表 2-1 确定传输线的线路参数。

2.4　证明图 2-37 的传输线模型可以获得与式（2.14）、式（2.16）相同的传输线方程组。

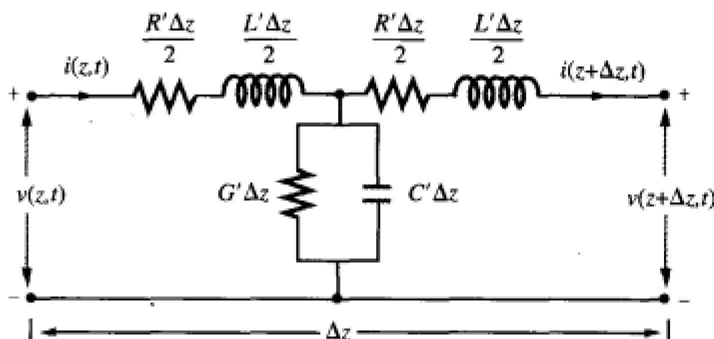


图 2-37　习题 2.4 的传输线模型

2.5* 求习题 2.2 的同轴电缆的参数 α、β、u_p和 Z_0。

92

2.5　无损线

2.6　除不损失功率外，无损线还有两个重要特性：（1）它是非色散的（u_p与频率无关）；（2）其特征阻抗 Z_0是实数。在有些情况下，将传输线设计成 $R'\ll\omega L'$及 $G'\ll\omega C'$是不可能的，但却有可能选择传输线的尺寸以及材料特性，使之满足下列条件

$$R'C'=L'G'\quad（无畸变线）$$

这种线称为*无畸变*（distortionless）线。尽管它不是无损耗的，但却具有前面提到的无损线的两个特性。试证明无畸变线满足

$$\alpha=R'\sqrt{\frac{C'}{L'}}=\sqrt{R'G'}$$

$$\beta=\omega\sqrt{L'C'}$$

$$Z_0=\sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

2.7* 已知无畸变线（参见习题 2.6）的 $Z_0=50\Omega$，$\alpha=40\text{mNp/m}$，$u_p=2.5\times10^8\text{m/s}$，求线路参数及在 250MHz 时的 λ。

2.8　求无畸变线的 α 和 Z_0。已知 $R'=4\Omega/\text{m}$；$G'=4\times10^{-4}\text{S/m}$。

2.9* 传输线运行在125MHz，其 $Z_0=40\Omega$，$\alpha=0.02\text{Np/m}$；$\beta=0.75\text{rad/m}$。求线路参数 R'、L'、G'和 C'。

2.10 利用开槽线测得，一无损线上电压的最大值为1.5V，最小值为0.8V。求负载反射系数的幅值。

2.11* 聚乙烯的 $\varepsilon_r=2.25$，用作一 Z_0为50Ω的无损同轴电缆的绝缘材料。已知内导线直径为1mm，求

(a) 外导线的直径是多少?

(b) 线路的相速是多少?

2.12 50Ω的无损线端接 $Z_L=(30-j60)\Omega$ 的负载阻抗。波长为5cm，求

(a) 负载的反射系数；

(b) 线路的驻波比；

(c) 最靠近负载的电压最大值位置；

(d) 最靠近负载的电流最大值位置。

2.13* 在150Ω的无损线上，观测到：第一个电压最小值点离负载3cm；第一个电压最大值点离负载9cm；$S=3$。求 Z_L。

2.14 用开槽线测得：第一个最小值点离负载4cm；第二个最小值点离负载14cm；电压驻波比=2.5。如果线路是无损的，$Z_0=50\Omega$。求负载阻抗。

2.15* 阻抗为 $Z_L=(25-j50)\Omega$ 的负载接到特性阻抗为 Z_0的无损线。使驻波比尽可能小的 Z_0为多少?

93

2.16 50Ω的无损线端接纯电阻负载，电压驻波比为4。求所有可能的 Z_L值。

2.6 输入阻抗

2.17* 运行在300MHz、50Ω的空气绝缘无损线，长度为2.5m，端接 $Z_L=(60+j20)\Omega$ 的阻抗。求输入阻抗。

2.18 如图2-38所示，无损线长度为 $l=0.35\lambda$，端接一负载阻抗。求 Γ、S 以及 Z_{in}。

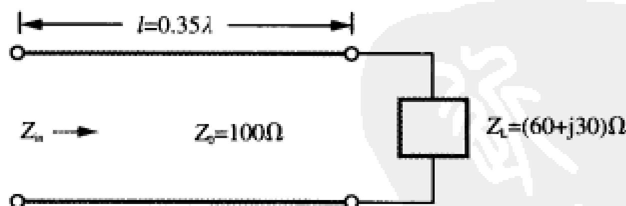


图2-38 习题2.18的电路

2.19 证明：从输入阻抗角度看，短路的四分之一波长无损线等效于开路。

2.20 证明：线路上电压幅值最大的位置，其输入阻抗是纯实数。

2.21* 具有电压源

$$v_g(t)=5\cos(2\pi\times10^9 t)\ (\text{V})$$

内阻 $Z_g=50\Omega$ 的发电机，连接到50Ω的无损空气隔离传输线。线路长度为5cm，端接负载阻抗 $Z_L=(100-j100)\Omega$。求

解答见CD-ROM。

（a）负载的 Γ；

（b）传输线输入端的 Z_{in}；

（c）输入电压 $\widetilde{V}_i$ 和输入电流 $\widetilde{I}_i$。

2.22　一段 6m 长、150Ω 的无损线，由

$$v_g(t)=5\cos(8\pi\times10^7t-30°)\quad(\text{V})$$

及 $Z_g=150\Omega$ 的电源驱动。如果线路的相对介电常数为 $\varepsilon_r=2.25$，端接 $Z_L=(150-j50)\Omega$ 的负载。求

（a）线路上的 λ；

（b）负载的反射系数；

（c）输入阻抗；

（d）输入电压 $\widetilde{V}_i$；

（e）时域中的输入电压 $v_i(t)$。

2.23* 两个半波偶极子天线，阻抗都为 75Ω，通过一对并联的传输线连在一起，再一起连接到馈线，如图 2-39 所示。所有线路都为 50Ω 无损线。

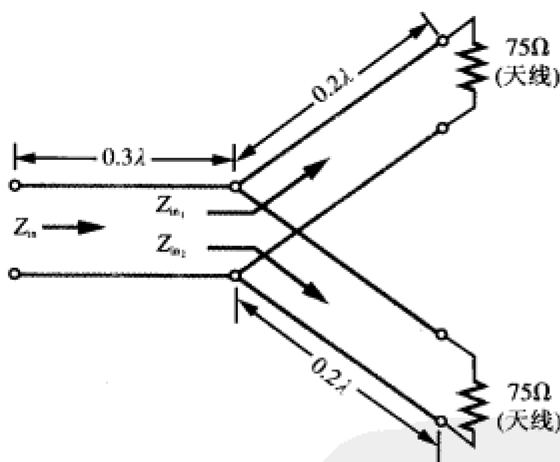


图 2-39　习题 2.23 的电路

94

（a）计算 Z_{in_1}，即在并联接口处，端接天线的线路输入阻抗；

（b）并联组合 Z_{in_1}、Z_{in_2}，得到 Z'_L，即馈线的等效负载阻抗；

（c）计算馈线的 Z_{in}。

2.7　特殊情况

2.24　运行频率为 200MHz，希望用一段 50Ω 的无损线短路来等效一个 $X=25\Omega$ 的负载电抗。如果相速为 $0.75c$，在输入端具有所要求电抗的线路的最短长度是多少？

2.25* 无损线短路端接。按波长计算，要使其在输入端表现为开路的线路长度是多少？

2.26　未知特性阻抗的无损线，长度为 31cm，在 1MHz 下进行测量。短路时测得输入阻抗等效于 0.128μH 的电感；开路时测得输入阻抗等效于 20pF 的电容。求线路的 Z_0，相速，绝缘材料的相对介电常数。

2.27* 60Ω 的电阻负载，接在 $\lambda/4$ 的 50Ω 无损线上，然后一起又接在另一 $\lambda/4$ 的 100Ω 馈线上。输入阻抗是多少？

2.28　100MHz 的 FM 广播站，采用 300Ω 的传输线连接发射器和塔上的半波偶极子天线。天线的阻抗为 73Ω。要求设计四分之一波长变换器，以匹配天线和馈线。

(a) 确定四分之一波长线的长度以及特征阻抗。

(b) 如果四分之一波长线为相隔 $d=2.5\text{cm}$ 的双线线路，两线之间由 $\varepsilon_r=2.6$ 的聚乙烯隔离，试确定四分之一波长线的长度以及两导体的半径。

2.29* 50MHz、内阻 $Z_g=50\Omega$ 的发电机，连到负载 $Z_L=(50-j25)\Omega$。从发电机传送到负载的时间平均功率在 $Z_g=Z_L^*$ 时达到最大值，其中 Z_L^* 为 Z_L 的共轭复数。为现实这个条件而又不改变 Z_g，可以加一段开路的短路，同 Z_L 串联在一起，以改变有效的负载阻抗，如图 2-40 所示。如果该短线路的 $Z_0=100\Omega$，试确定可满足最大输出功率要求的最短线路长度（以波长数表示）。

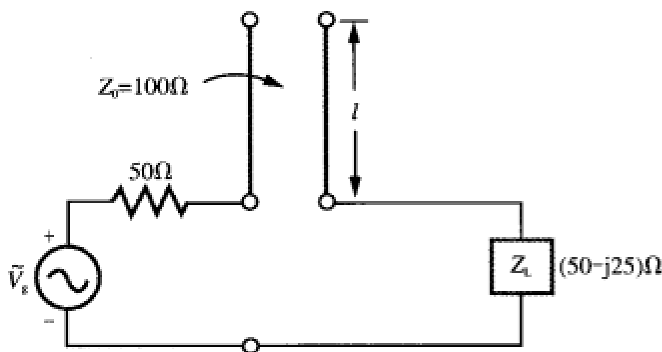


图 2-40　习题 2.29 的传输线配置

2.30　50Ω 的无损线长度 $l=0.375\lambda$，将 200MHz、$\tilde{V}_g=150\text{V}$、$Z_g=50\Omega$ 的发电机连接到负载 Z_L。对以下不同负载阻抗，确定流过负载的时域中的电流

(a) $Z_L=(50-j50)\Omega$;

(b) $Z_L=50\Omega$;

(c) $Z_L=0$(短路)。

2.8　无损线的功率流

2.31* $\tilde{V}_g=100\text{V}$、$Z_g=50\Omega$ 的发电机，经长度 $l=0.15\lambda$、50Ω 的无损线连接到 $Z_L=75\Omega$ 的负载。

(a) 计算在发电机端的线路输入阻抗 Z_{in};

(b) 计算 $\tilde{I}_i$ 和 $\tilde{V}_i$;

(c) 计算传送到线路的时间平均功率，$P_{in}=0.5\,\Re\mathfrak{e}[\tilde{V}_i\tilde{I}_i^*]$;

(d) 计算 $\tilde{V}_L$，$\tilde{I}_L$，以及传送到负载的时间平均功率，$P_L=0.5\,\Re\mathfrak{e}[\tilde{V}_L\tilde{I}_L^*]$。$P_{in}$ 和 P_L 相比有何特点？为什么？

(e) 计算发电机发出的时间平均功率，P_g 以及 Z_g 消耗的时间平均功率。功率守恒是否满足？

2.32　图 2-41 所示的两天线配置连接到 $\tilde{V}_g=250\text{V}$、$Z_g=50\Omega$ 的发电机。传递到每个天线的时间平均功率是多少？

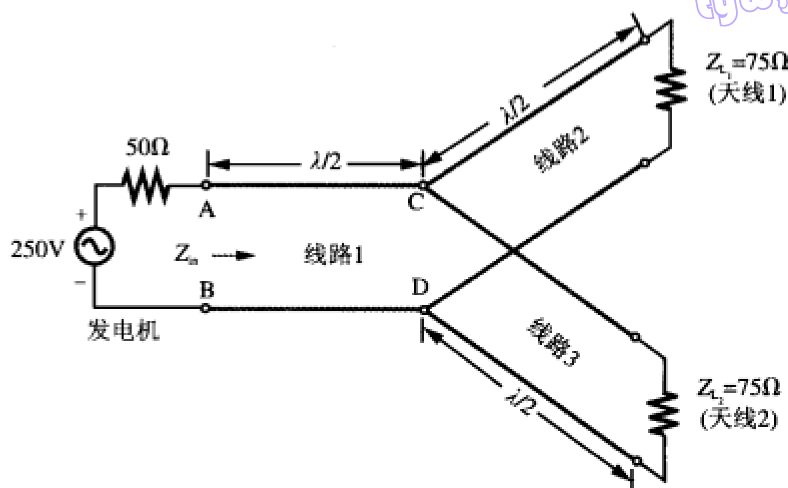


图 2-41　习题 2.32 的天线配置

2.33* 对于图 2-42 的电路，计算：平均入射功率；平均反射功率；透射到无限长 100Ω 线路的功率。其中 λ/2 线路是无损的，无限长线路有轻微损耗（**提示**：只要 $\alpha\neq0$，无限长线路的输入阻抗就等于其特征阻抗）。

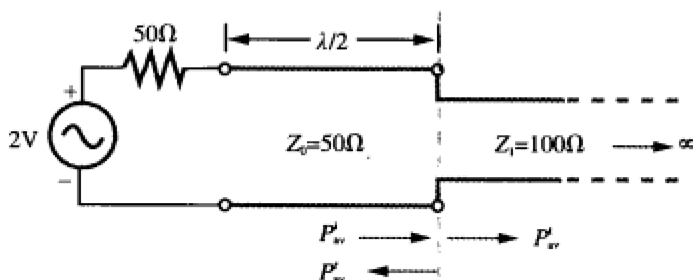


图 2-42　习题 2.33 的电路

2.34　负载阻抗为 $Z_L=(75+j25)\Omega$ 的天线，通过 50Ω 的无损线连接到发射器。如果在匹配的情况下（50Ω 负载时），发射器可以传送 10W 功率到负载，请问它可以传送多少功率到天线？假定 $Z_g=Z_0$。

96

2.9　史密斯圆图

2.35* 利用史密斯圆图确定下列负载的反射系数

(a) $Z_L=3Z_0$；

(b) $Z_L=(2-2j)Z_0$；

(c) $Z_L=-2jZ_0$；

(d) $Z_L=0$（开路）。

2.36　利用史密斯圆图求下列反射系数对应的归一化负载阻抗

(a) $\Gamma=0.5$；

(b) $\Gamma=0.5\angle 60^\circ$；

(c) $\Gamma=-1$；

(d) $\Gamma=0.3\angle -30^\circ$；

(e) $\Gamma=0$;

(f) $\Gamma=j$。

2.37* 无损线端接 $Z_L=100\Omega$ 的负载，测到驻波比为 2.5。利用史密斯圆图求 Z_0 的两个可能答案。

2.38 50Ω 无损线端接 $Z_L=(50+j25)\Omega$ 的负载。利用史密斯圆图求

(a) 反射系数 Γ;

(b) 驻波比;

(c) 离负载 0.35λ 处的输入阻抗;

(d) 离负载 0.35λ 处的输入导纳;

(e) 输入阻抗为纯电阻性的最短线路长度;

(f) 离负载最近的电压最大值位置。

2.39* 50Ω 无损线短路端接。使用史密斯圆图求

(a) 离负载 2.3λ 处的输入阻抗;

(b) 输入导纳为 $Y_{in}=-j0.04S$ 的点离负载的距离。

2.40 已知 $z_L=1.5-j0.7$，使用史密斯圆图求 y_L。

2.41* 100Ω 的无损线长度为 3λ/8，端接未知阻抗。若输入阻抗为 $Z_{in}=-j2.5$

(a) 利用史密斯圆图求 Z_L;

(b) 多长的开路线可以替代 Z_L?

2.42 70Ω 无损线的长度为 0.6λ。若 $S=1.8$，$\theta_r=-60°$，利用史密斯圆图求 $|\Gamma|$，Z_L 和 Z_{in}。

97

2.43* 利用开槽线测量 50Ω 的空气隔离无损线，测量数据如下：$S=1.6$，$|\tilde{V}|_{max}$ 仅出现在离负载 10cm 和 24cm 两处。利用史密斯圆图求 Z_L。

2.44 运行在 5GHz 的 50Ω 无损同轴电缆，绝缘材料的相对介电常数为 $\varepsilon_r=2.25$，端接负载阻抗为 $Z_L=75\Omega$ 的天线。利用史密斯圆图求 Z_{in}。线路长度为 30cm。

2.10 阻抗匹配

2.45* 50Ω 无损线长度为 0.6λ，端接负载 $Z_L=(50+j25)\Omega$。在离负载 0.3λ 处，接入一个电阻 $R=30\Omega$，如图 2-43 所示。利用史密斯圆图求 Z_{in}。

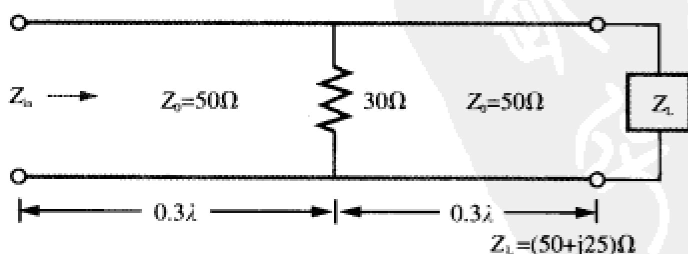


图 2-43 习题 2.45 的电路

2.46 50Ω 的无损线采用一短分支匹配到 $Z_L=(75-j20)$ 的天线。使用史密斯圆图确定短分支的长度以及天线到分支点的距离。

2.47* 负载改为 $Z_L=(100+j50)\Omega$，重做习题 2.46。

2.48 利用史密斯圆图求图 2-44 中馈线的 Z_{in}。所有线路均为无损，$Z_0=50\Omega$。

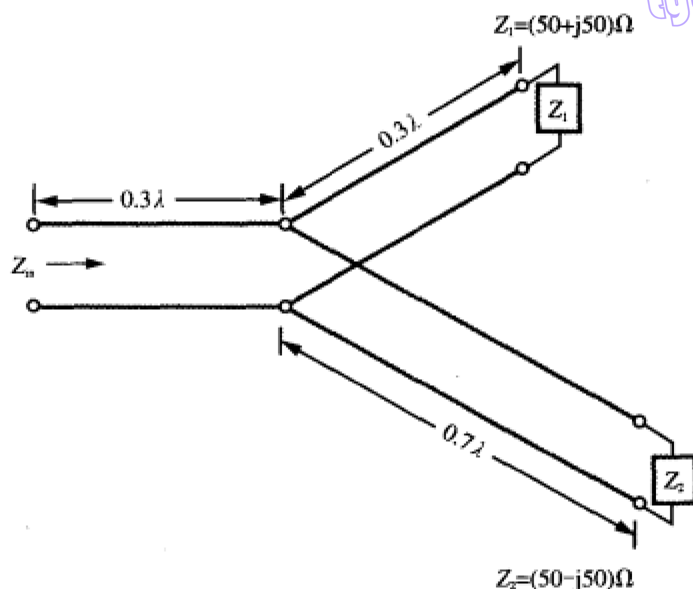


图 2-44　习题 2.48 的网络

2.49* 假定所有线路长度均为 $\lambda/4$，重做习题 2.48。

2.11　传输线的瞬态分析

2.50　1m 长、50Ω 的无损线，$u_p = 2c/3$（c 为光速），由 $V_g = 60\text{V}$、$R_g = 100\Omega$ 的发电机在 $t = 0$时刻开始供电，线路端接负载阻抗 $Z_L = 25\Omega$。绘出电压 $V(z, t)$ 的弹射图。并利用弹射图，绘出线路中点处的电压 $V(t)$ 在 $t = 0 \sim t = 25\text{ns}$ 之间的波形。

2.51　针对线路电流重复习题 2.50。

2.52　无损线电路，其 $R_g = 50\Omega$，$Z_0 = 50\Omega$，$\varepsilon_r = 2.25$。在线路发送端观测到其电压阶跃响应如图 2-45 所示。确定

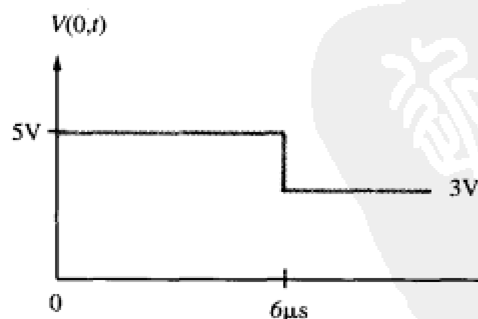


图 2-45　习题 2.52 及 2.54 的电压波形

（a）发电机电压；

（b）线路长度；

（c）负载阻抗。

2.53*　端接短路的线路，$Z_0 = 50\Omega$，$\varepsilon_r = 4$。在发送端记录到的电压阶跃响应波形如图 2-46 所示。确定 V_g、R_g 以及线路长度。

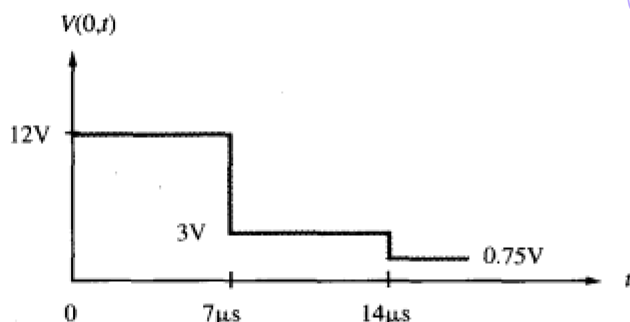


图 2-46 习题 2.53 的电压波形

2.54 图 2-45 的电压波形，为在某 50Ω 传输线的发送端记录到的电压阶跃响应。响应由 $V_g = 15V$，R_g未知的发电机引起。已知线路长度为 1km，波速为 $1 \times 10^8 m/s$，端接 $Z_L = 100\Omega$。

(a) 确定 R_g；

(b) $V(0,t)$ 在 $t = 6\mu s$ 处的降落，不可能由来自负载的反射引起。为什么？

(c) 该种波形变化可能由故障引起。确定故障的并联电阻 R_f及位置。

2.55 $V_g = 200V$，$R_g = 25\Omega$ 的发电机，对 75Ω 的无损线进行矩形脉冲激励，持续时间为 $\tau = 0.4\mu s$。已知线路长度为 200m，$u_p = 2 \times 10^8 m/s$，端接负载 $Z_L = 125\Omega$。

(a) 将激励线路的电压脉冲分解成两个阶跃函数，$V_{g1}(t)$、$V_{g2}(t)$；

(b) 对于每个电压阶跃函数，绘制线路电压的弹射图；

(c) 利用弹射图，绘制发送端总电压的时间波形。

2.56 对于习题 2.55 中的电路，绘制电流的弹射图，并画出线路中点的电流历史曲线。

99

2.57 ~ 2.65 附加习题，包括题目及完整解答见。

第3章　矢量分析

3.1　概述

在第2章讨论波在传输线上的传播时，遇到的基本物理量主要是电压、电流、阻抗以及功率等。这些量都是标量（scalar），这意味着，如果它们是正实数的话，则完全可以由幅值确定；如果是负数或复数的话，则可以由幅值和相角决定（负数具有正的幅值和π rad的相角）。矢量（vector）则不同，它同时指定一个量的幅值和方向。物体运动的速率是个标量，而其速度则是个矢量。

从下一章开始本书的后续章节中，电磁量将主要是电场和磁场，**E** 和 **H**。它们以及许多其他相关的量都是矢量。矢量分析为表达和运算这些矢量提供了高效、方便的数学工具。在三维空间，要确定一个矢量就必须确定其每一维的分量。研究矢量有几种坐标系可供选择，其中最常用的是笛卡尔坐标系（直角坐标系），柱坐标系以及球坐标系。在实际应用中，要根据所考虑问题的特点，选择最合适的坐标系。

矢量代数（vector algebra）规定了各类坐标系中的矢量加法、减法以及乘法的运算规则。矢量代数的规则，以及矢量在前述三种正交坐标系中的表示（包括在坐标系间的变换），是本章的两个主要内容。本章的另一个主要内容是矢量微积分（vector calculus），它包括矢量微分、积分的法则，特殊矢量运算（梯度、散度和旋度）方法，以及某些特别有用的定理的应用，如散度定理、斯托克斯定理等。

3.2　矢量代数的基本法则

矢量 $\mathbf{A}$ 包括一个幅值（magnitude）$A=|\mathbf{A}|$，和一个由单位矢量$\hat{\mathbf{a}}$确定的方向

$$\mathbf{A}=\hat{\mathbf{a}}|\mathbf{A}|=\hat{\mathbf{a}}A \tag{3.1}$$

单位矢量（unit vector）$\hat{\mathbf{a}}$的幅值为1（$|\hat{\mathbf{a}}|=1$），方向为

$$\hat{\mathbf{a}}=\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}=\frac{\mathbf{A}}{A} \tag{3.2}$$

图3-1为矢量 $\mathbf{A}$ 的图形表示，它被表示为长度为 A、顶点指向方向$\hat{\mathbf{a}}$的直线段。

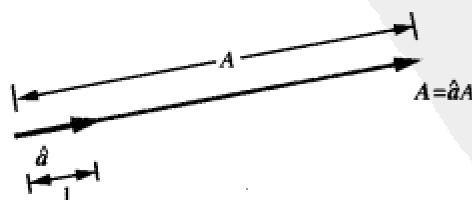


图3-1　矢量 $\mathbf{A}=\hat{\mathbf{a}}A$ 的幅值为 $A=|\mathbf{A}|$，方向为单位矢量$\hat{\mathbf{a}}=\mathbf{A}/A$

101

在图3-2a所示的直角坐标系中，x、y、z坐标的方向采用三个互相垂直的单位矢量$\hat{\boldsymbol{x}}$、$\hat{\boldsymbol{y}}$和$\hat{\boldsymbol{z}}$来定义，它们被称为基矢量（base vector）。图3-2b中的矢量$\boldsymbol{A}$可以表示为

$$\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{x}}A_x+\hat{\boldsymbol{y}}A_y+\hat{\boldsymbol{z}}A_z, \tag{3.3}$$

其中，A_x、A_y和A_z分别为$\boldsymbol{A}$沿x，y和z方向的分量。分量A_z等于$\boldsymbol{A}$往z轴的垂直投影，A_x和A_y也有类似的定义。应用勾股定理，先在x-y平面右边的直角三角形中，用直角边A_x和A_y表示斜边A_r，然后在垂直的直角三角形中，用直角边A_r和A_z表示斜边A，从而得到$\boldsymbol{A}$的幅值的表达式

$$A=|\boldsymbol{A}|=\sqrt[+]{A_x^2+A_y^2+A_z^2} \tag{3.4}$$

由于A为非负的标量，取正的平方根。根据式（3.2），单位矢量$\hat{\boldsymbol{a}}$为

$$\hat{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{A}}{A}=\frac{\hat{\boldsymbol{x}}A_x+\hat{\boldsymbol{y}}A_y+\hat{\boldsymbol{z}}A_z}{\sqrt[+]{A_x^2+A_y^2+A_z^2}} \tag{3.5}$$

有时，将使用简化写法$\boldsymbol{A}=(A_x,A_y,A_z)$表示在直角坐标系中具有分量$A_x$、$A_y$、$A_z$的矢量。

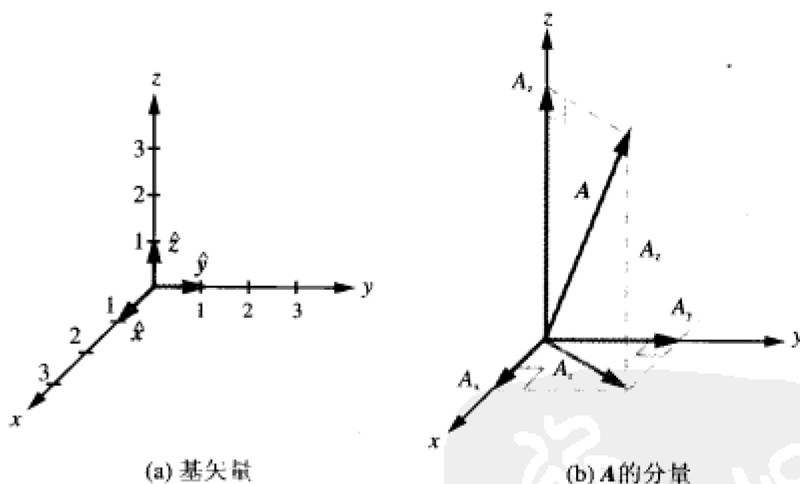


图3-2　直角坐标系：（a）基矢量$\hat{\boldsymbol{x}}$、$\hat{\boldsymbol{y}}$和$\hat{\boldsymbol{z}}$；（b）矢量$\boldsymbol{A}$的分量

3.2.1　两个矢量的相等

如果两个矢量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的幅值相等，单位方向矢量相同，则称它们相等。即，如果

$$\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{a}}A=\hat{\boldsymbol{x}}A_x+\hat{\boldsymbol{y}}A_y+\hat{\boldsymbol{z}}A_z, \tag{3.6a}$$

$$\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{b}}B=\hat{\boldsymbol{x}}B_x+\hat{\boldsymbol{y}}B_y+\hat{\boldsymbol{z}}B_z \tag{3.6b}$$

则当且仅当$A=B$，$\hat{\boldsymbol{a}}=\hat{\boldsymbol{b}}$时，才有$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$。这要求$A_x=B_x$，$A_y=B_y$，$A_z=B_z$。矢量相等并不意味着它们必然相同。在直角坐标系中，两个相隔一定距离的平行矢量若具有相同的幅值，指向相同的方向，则它们就是相等的；但只有当它们一个重叠在另外一个的上面时，才是相同的。

102

3.2.2 矢量加法和减法

两个矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的和也是矢量，若记为 $\boldsymbol{C}$，则有

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \tag{3.7}$$

用图形表示时，矢量相加的结果，既可以由平行四边形法则得到，也可以由头尾相接法则得到，如图 3-3 所示。从同一点开始画出 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$，并保持各自的幅值、方向不变，则矢量 $\boldsymbol{C}$ 为由 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 构造出来的平行四边形的对角线。若使用首尾相接法则，那么既可以将 $\boldsymbol{A}$ 加到 $\boldsymbol{B}$，也可以将 $\boldsymbol{B}$ 加到 $\boldsymbol{A}$。当将 $\boldsymbol{A}$ 加到 $\boldsymbol{B}$ 时，则从 $\boldsymbol{B}$ 的头开始画 $\boldsymbol{A}$，但仍保持其幅值和方向不变。那么，和矢量 $\boldsymbol{C}$ 将从 $\boldsymbol{B}$ 的尾起始，到 $\boldsymbol{A}$ 的头结束。

如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是由式（3.6a）和式（3.6b）在直角坐标系中给出的，则矢量相加给出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}&=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\hat{\boldsymbol{x}}A_x+\hat{\boldsymbol{y}}A_y+\hat{\boldsymbol{z}}A_z)+(\hat{\boldsymbol{x}}B_x+\hat{\boldsymbol{y}}B_y+\hat{\boldsymbol{z}}B_z)\\&=\hat{\boldsymbol{x}}(A_x+B_x)+\hat{\boldsymbol{y}}(A_y+B_y)+\hat{\boldsymbol{z}}(A_z+B_z)\end{aligned} \tag{3.8}$$

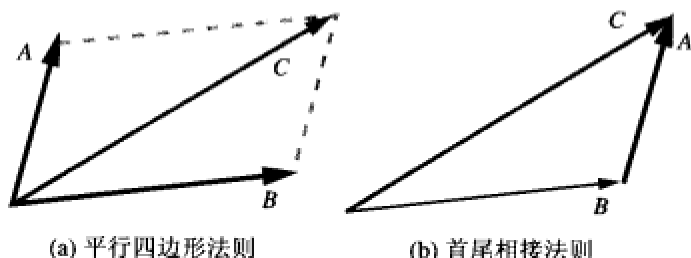


图 3-3 矢量相加

从矢量 $\boldsymbol{A}$ 中减去矢量 $\boldsymbol{B}$，等效于 $\boldsymbol{A}$ 和负 $\boldsymbol{B}$ 相加。因此

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=\hat{\boldsymbol{x}}(A_x-B_x)+\hat{\boldsymbol{y}}(A_y-B_y)+\hat{\boldsymbol{z}}(A_z-B_z) \tag{3.9}$$

当用图形表示时，矢量加法的运算法则也适用于矢量减法。唯一的差别是，$-\boldsymbol{B}$ 的箭头是沿着代表矢量 $\boldsymbol{B}$ 的线段的相反方向画出的（即头尾互换）。

3.2.3 位置矢量和距离矢量

在给定的坐标系中，空间一点 P 的位置矢量（position vector）是从原点到 P 的矢量。图 3-4 中的点 P_1 和 P_2 分别位于 (x_1,y_1,z_1) 和 (x_2,y_2,z_2)。它们的位置矢量为

103

$$\boldsymbol{R}_1=\overrightarrow{OP_1}=\hat{\boldsymbol{x}}x_1+\hat{\boldsymbol{y}}y_1+\hat{\boldsymbol{z}}z_1, \tag{3.10a}$$

$$\boldsymbol{R}_2=\overrightarrow{OP_2}=\hat{\boldsymbol{x}}x_2+\hat{\boldsymbol{y}}y_2+\hat{\boldsymbol{z}}z_2, \tag{3.10b}$$

其中，O 是原点。从 P_1 到 P_2 的距离矢量（distance vector）定义为

$$\boldsymbol{R}_{12}=\overrightarrow{P_1P_2}=\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_1=\hat{\boldsymbol{x}}(x_2-x_1)+\hat{\boldsymbol{y}}(y_2-y_1)+\hat{\boldsymbol{z}}(z_2-z_1) \tag{3.11}$$

P_1 和 P_2 之间的距离 d 等于 $\boldsymbol{R}_{12}$ 的幅值

$$d=|\boldsymbol{R}_{12}|=[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{1/2} \tag{3.12}$$

注意 $\boldsymbol{R}_{12}$ 的第一个下标表示矢量 $\boldsymbol{R}_{12}$ 的尾的位置，第二个下标则表示其头的位置，如图 3-4 所示。

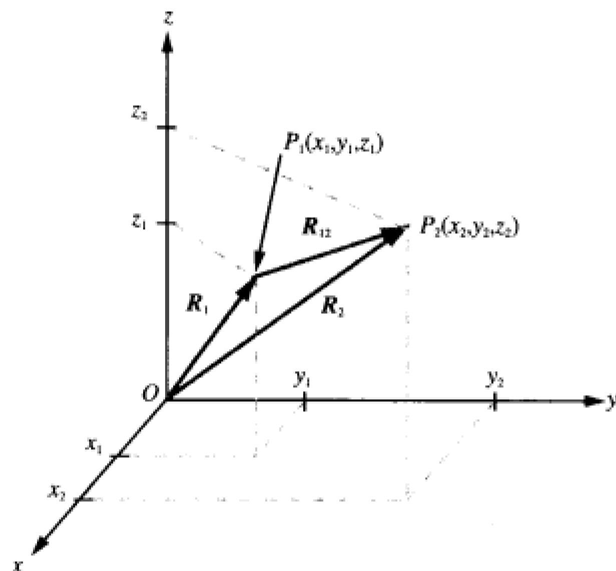


图 3-4　距离矢量 $\boldsymbol{R}_{12}=\overrightarrow{P_1P_2}=\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_1$

3.2.4　矢量乘法

在矢量微积分中，有三种类型的乘法，分别是简单相乘、标量积（点积、点乘、内积）以及矢量积（叉积、叉乘、外积）。

简单相乘

矢量乘以一个标量称为简单相乘（simple product）。矢量 $\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{a}}A$ 与标量 k 相乘的结果为另一个矢量 $\boldsymbol{B}$，其幅值为 $|k|A$，方向与 $\boldsymbol{A}$ 相同或相反。即

$$\boldsymbol{B}=k\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{a}}kA=\hat{\boldsymbol{x}}(kA_x)+\hat{\boldsymbol{y}}(kA_y)+\hat{\boldsymbol{z}}(kA_z) \tag{3.13}$$

标量积（或称点积、点乘）

矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的标量积（scalar product，或称点积，dot product），用 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 表示，读作"A 点乘 B"（A dot B），从几何上定义为其中任一矢量的幅值乘以另一矢量到该矢量的投影，或反之，即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta_{AB}, \tag{3.14}$$

其中 θ_{AB} 为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角，如图 3-5 所示。两矢量的点积为一标量，其幅值小于或等于两矢量幅值的乘积（当 $\theta_{AB}=0$ 时相等），当 $0<\theta_{AB}<90°$ 时，符号为正；$90°<\theta_{AB}<180°$ 时，符号为负。当 $\theta_{AB}=90°$ 时，两矢量正交，点积为零。$A\cos\theta_{AB}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 沿 $\boldsymbol{B}$ 的分量，它等于矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿 $\boldsymbol{B}$ 方向的投影（projection）。同样，$B\cos\theta_{AB}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 沿 $\boldsymbol{A}$ 的分量。

104

如果 $\boldsymbol{A}=(A_x,A_y,A_z)$，$\boldsymbol{B}=(B_x,B_y,B_z)$，则

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=(\hat{\boldsymbol{x}}A_x+\hat{\boldsymbol{y}}A_y+\hat{\boldsymbol{z}}A_z)\cdot(\hat{\boldsymbol{x}}B_x+\hat{\boldsymbol{y}}B_y+\hat{\boldsymbol{z}}B_z) \tag{3.15}$$

由于基矢量 $\hat{\boldsymbol{x}}$，$\hat{\boldsymbol{y}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 彼此两两正交，所以有

$$\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}=\hat{\boldsymbol{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{y}}=\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}=1, \tag{3.16a}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{y}}=\hat{\boldsymbol{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}=\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}=0 \tag{3.16b}$$

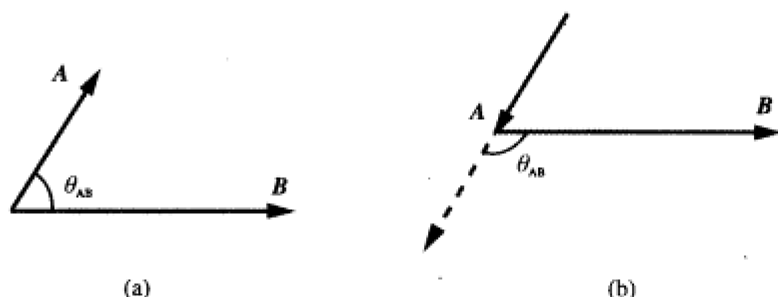


图 3-5 角度 θ_{AB}是两矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的尾之间，从 $\boldsymbol{A}$ 到 $\boldsymbol{B}$ 的夹角。当 $0\leqslant\theta_{AB}<90°$时，点积为正，如（a）所示；当 $90°<\theta_{AB}\leqslant180°$时，点积为负，如（b）所示

将式（3.16a）和式（3.16b）代入式（3.15）得

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \tag{3.17}$$

点积遵从乘法的分配律和交换律，即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}\quad（交换律）, \tag{3.18a}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}\quad（分配律） \tag{3.18b}$$

矢量同自身的点积为

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|^2=A^2 \tag{3.19}$$

如果矢量 $\boldsymbol{A}$ 定义在某个坐标系中，则其幅值 A 可确定如下

$$A=|\boldsymbol{A}|=\sqrt[+]{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}} \tag{3.20}$$

同样，如果矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 定义在某坐标系中，则它们之间较小的那个夹角 θ_{AB}可确定如下

$$\theta_{AB}=\cos^{-1}\left[\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{\sqrt[+]{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}\sqrt[+]{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}}}\right] \tag{3.21}$$

矢量积（叉积）

两矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的*矢量积*（vector product，或称*叉积*，cross product），表示为 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$，读作"*A 叉乘 B*"（*A* cross *B*），定义如下

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{n}}AB\sin\theta_{AB}, \tag{3.22}$$

105

其中，θ_{AB}是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的夹角即从 $\boldsymbol{A}$ 的尾端到 $\boldsymbol{B}$ 的尾端的夹角，$\hat{\boldsymbol{n}}$则是 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 所在平面的单位法向矢量。叉积的幅值等于两矢量确定的平行四边形的面积，如图 3-6a 所示；叉积的方向为$\hat{\boldsymbol{n}}$，遵从图 3-6b 所示的*右手定则*（right-hand rule）：当右手手指经过角 θ_{AB}，从 $\boldsymbol{A}$ 旋转到 $\boldsymbol{B}$ 时，$\hat{\boldsymbol{n}}$的方向即为右手大拇指所指的方向。由于$\hat{\boldsymbol{n}}$垂直于 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 所在的平面，因此也垂直于矢量 $\boldsymbol{A}$ 和矢量 $\boldsymbol{B}$。

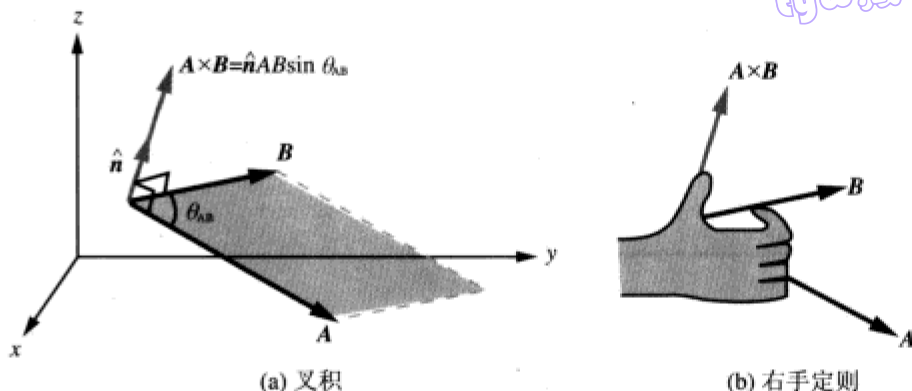
叉积是反交换的，即

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}\quad（反交换律） \tag{3.23}$$

这一特性可以通过将右手手指经过角 θ_{AB}从 $\boldsymbol{B}$ 旋转到 $\boldsymbol{A}$ 得到证实。叉积的其他特性有

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}\quad（分配律）, \tag{3.24a}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}=0 \tag{3.24b}$$



(a) 叉积　　(b) 右手定则

图3-6　叉积 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 指向 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 的方向，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 垂直于 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 所在的平面，遵从右手定则

根据叉积的定义式（3.22），容易证明直角坐标系中的基矢量 $\hat{\boldsymbol{x}}$，$\hat{\boldsymbol{y}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 遵从以下的右手循环关系

$$\hat{\boldsymbol{x}}\times\hat{\boldsymbol{y}}=\hat{\boldsymbol{z}},\quad \hat{\boldsymbol{y}}\times\hat{\boldsymbol{z}}=\hat{\boldsymbol{x}},\quad \hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{x}}=\hat{\boldsymbol{y}} \tag{3.25}$$

请注意循环顺序为（$xyzxyz\cdots$）。还有

$$\hat{\boldsymbol{x}}\times\hat{\boldsymbol{x}}=\hat{\boldsymbol{y}}\times\hat{\boldsymbol{y}}=\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{z}}=0 \tag{3.26}$$

如果 $\boldsymbol{A}=(A_x,A_y,A_z)$，$\boldsymbol{B}=(B_x,B_y,B_z)$，则利用式（3.25）和式（3.26）可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}&=(\hat{\boldsymbol{x}}A_x+\hat{\boldsymbol{y}}A_y+\hat{\boldsymbol{z}}A_z)\times(\hat{\boldsymbol{x}}B_x+\hat{\boldsymbol{y}}B_y+\hat{\boldsymbol{z}}B_z)\\&=\hat{\boldsymbol{x}}(A_yB_z-A_zB_y)+\hat{\boldsymbol{y}}(A_zB_x-A_xB_z)+\hat{\boldsymbol{z}}(A_xB_y-A_yB_x)\end{aligned} \tag{3.27}$$

叉乘结果的式（3.27）具有循环形式，所以可以将叉积表示成行列式的形式

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \tag{3.28}$$

例3-1　矢量与角

在直角坐标系中，矢量 $\boldsymbol{A}$ 由原点指向点 $P_1(2,3,3)$，矢量 $\boldsymbol{B}$ 由 P_1 指向点 $P_2(1,-2,2)$。求

（a）矢量 $\boldsymbol{A}$，幅值 A 以及单位矢量 $\hat{\boldsymbol{a}}$；

（b）矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 y 轴的夹角；

（c）矢量 $\boldsymbol{B}$；

（d）$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角；

（e）从原点到矢量 $\boldsymbol{B}$ 的垂直距离。

解答：（a）矢量 $\boldsymbol{A}$ 由从 $O(0,0,0)$ 到 $P_1(2,3,3)$ 的距离矢量确定，如图3-7所示。因此

$$\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{x}}2+\hat{\boldsymbol{y}}3+\hat{\boldsymbol{z}}3,$$

$$A=|\boldsymbol{A}|=\sqrt{2^2+3^2+3^2}=\sqrt{22},$$

$$\hat{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{A}}{A}=(\hat{\boldsymbol{x}}2+\hat{\boldsymbol{y}}3+\hat{\boldsymbol{z}}3)/\sqrt{22}$$

（b）$\boldsymbol{A}$ 同 y 轴的夹角 β 由下式确定

$$\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{y}}=|\boldsymbol{A}|\cos\beta,$$

或

$$\beta=\cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{y}}}{A}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{22}}\right)=50.2°$$

(c)

$$\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{x}}(1-2)+\hat{\boldsymbol{y}}(-2-3)+\hat{\boldsymbol{z}}(2-3)=-\hat{\boldsymbol{x}}-\hat{\boldsymbol{y}}5-\hat{\boldsymbol{z}}$$

(d)

$$\theta=\cos^{-1}\left[\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}\right]=\cos^{-1}\left[\frac{(-2-15-3)}{\sqrt{22}\sqrt{27}}\right]=145.1°$$

(e) 原点到矢量 $\boldsymbol{B}$ 的垂直距离为图 3-7 所示的距离 $|\overrightarrow{OP_3}|$。从直角三角形 OP_1P_3 可得

$$|\overrightarrow{OP_3}|=|\boldsymbol{A}|\sin(180°-\theta)=\sqrt{22}\sin(180°-145.1°)=2.68$$ ■

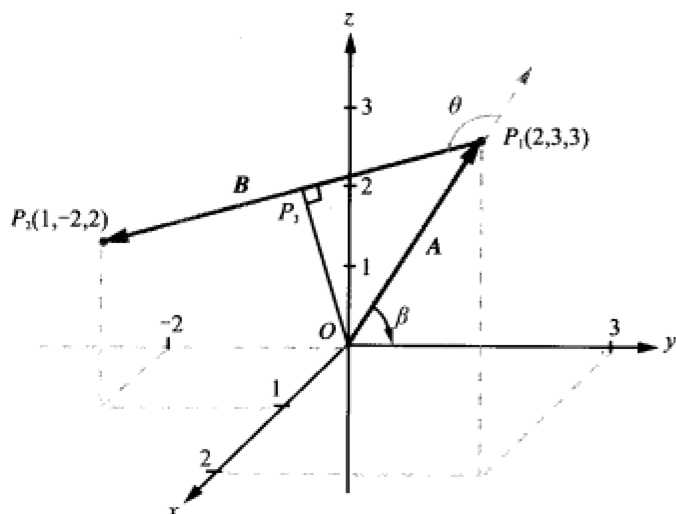


图 3-7 例 3-1 的几何关系

 **M3.1-3.4**

练习 3.1 求直角坐标系中点 $P_1(1,2,3)$ 到点 $P_2(-1,-2,3)$ 的距离矢量。

答案：$\overrightarrow{P_1P_2}=-\hat{\boldsymbol{x}}2-\hat{\boldsymbol{y}}4$。(参见)

练习 3.2 利用叉积求例 3-1 中矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角 θ。

答案：$\theta=145.1°$。(参见)

练习 3.3 求例 3-1 中矢量 $\boldsymbol{B}$ 与 z 轴的夹角。

答案：101.1°。(参见)

3.2.5 标量和矢量三重积

当三个矢量相乘的时候，并非所有的点乘、叉乘组合都是有意义的。例如

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$$

就没有意义，因为 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$ 是个标量，矢量 $\boldsymbol{A}$ 叉乘标量在矢量代数中没有定义。除 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$ 形式的乘积以外，只有两个有意义的三矢量乘积，即标量三重积和矢量三重积。

标量三重积

一个矢量点乘另外两个矢量的叉积，其结果为标量，所以称标量三重积。标量三重积遵从以下循环规则

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{3.29}$$

只要保持循环顺序（$ABCABC\ldots$）不变，等式就成立。矢量 $\boldsymbol{A}=(A_x, A_y, A_z)$，$\boldsymbol{B}=(B_x, B_y, B_z)$，以及 $\boldsymbol{C}=(C_x, C_y, C_z)$ 的标量三重积可以写成 3×3 的行列式形式

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \tag{3.30}$$

式（3.29）、式（3.30）的正确性，可以通过将 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 扩展成分量形式，并进行相应的乘法运算而得到证实。

107

矢量三重积

矢量三重积定义为一个矢量叉乘另外两个矢量的叉积，即

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) \tag{3.31}$$

由于叉积的结果是矢量，因此矢量三重积也是矢量。矢量三重积通常不遵从结合律，即

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\neq(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}, \tag{3.32}$$

这意味着，叉乘运算的先后顺序十分重要。通过将 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 扩展成分量形式，可以证明

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}), \tag{3.33}$$

有时称这一关系为“bac-cab”法则。

例 3-2 矢量三重积

给定 $\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{x}}-\hat{\boldsymbol{y}}+\hat{\boldsymbol{z}}2$，$\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{y}}+\hat{\boldsymbol{z}}$，$\boldsymbol{C}=-\hat{\boldsymbol{x}}2+\hat{\boldsymbol{z}}3$。求 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$，并同 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 比较。

解答：

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-\hat{\boldsymbol{x}}3-\hat{\boldsymbol{y}}+\hat{\boldsymbol{z}}$$

因此

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-\hat{\boldsymbol{x}}3+\hat{\boldsymbol{y}}7-\hat{\boldsymbol{z}}2$$

类似的计算得到 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\hat{\boldsymbol{x}}2+\hat{\boldsymbol{y}}4+\hat{\boldsymbol{z}}$。这两个矢量三重积的结果不同，验证了式（3.32）的不等式关系。 ■

复习题

Q3.1 两个矢量何时相等？何时相同？

Q3.2 何时一个点的位置矢量等于两个点间的距离矢量？

Q3.3 如果 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0$，则 θ_{AB}是多少？

Q3.4 如果 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = 0$，则 θ_{AB}是多少？

Q3.5 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})$是矢量三重积吗？

Q3.6 如果 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}$，那么一定有 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ 吗？

3.3 正交坐标系

在电磁学中，物理量通常是以空间、时间的函数形式出现的。利用三维坐标系统，可以唯一确定一个点的空间位置或一个矢量的方向。坐标系统有正交、非正交之分。所谓*正交坐标系统*（orthogonal coordinate system），就是它的三个坐标都是互相垂直的。而非正交坐标系统则不是所有三个坐标都正交。非正交坐标系统非常特殊，很少用于解决实际问题。人们发明了很多正交坐标系统，但最标准、最常用的仅限于以下几个

- 直角（笛卡尔）坐标系
- 柱坐标系
- 球坐标系

为什么需要多种坐标系呢？无论选用何种坐标系，空间点的位置、物体的形状都不会因其而改变，但对于给定的特定问题来讲，选择一个最合适问题几何特点的坐标系，将可以大大便利问题的求解。因此，在接下来的几节里，将探讨前面提到的每个正交坐标系的性质，并将在 3.4 节中介绍点、矢量在不同坐标系之间的坐标变换。 108

3.3.1 直角坐标系

直角坐标系已经在 3.2 节中予以介绍，这里用它来说明矢量代数中的法则。直角坐标系中的矢量代数法则已经归纳在表 3-1 中，以供查阅，此处不再重复。在微分学中，常遇到的是微分量。直角坐标系中的微分长度是一个矢量，如图 3-8 所示，定义如下

$$d\boldsymbol{l} = \hat{\boldsymbol{x}}\, dl_x + \hat{\boldsymbol{y}}\, dl_y + \hat{\boldsymbol{z}}\, dl_z = \hat{\boldsymbol{x}}\, dx + \hat{\boldsymbol{y}}\, dy + \hat{\boldsymbol{z}}\, dz, \tag{3.34}$$

其中，$dl_x = dx$ 为沿$\hat{\boldsymbol{x}}$方向的微分长度，$dl_y = dy$、$dl_z = dz$ 的意义类似。

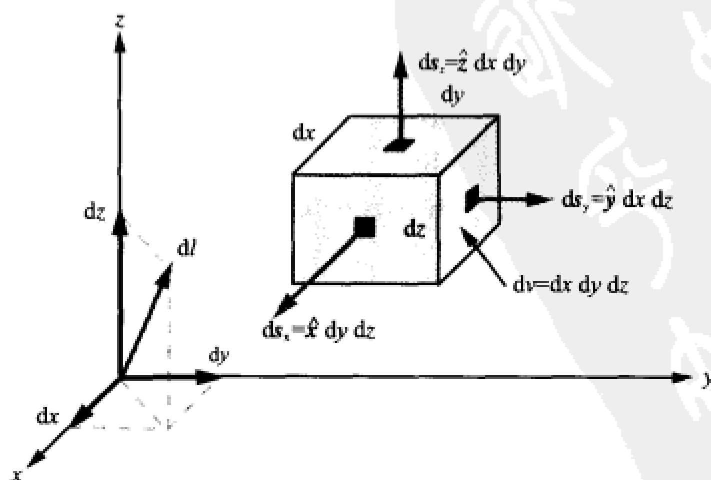


图 3-8 直角坐标系中的微分长度、面积和体积

表 3-1　矢量关系汇总

	直角坐标系	柱坐标系	球坐标系
坐标变量	x,y,z	r,ϕ,z	R,θ,ϕ
矢量表示，$\boldsymbol{A}=$	$\hat{\boldsymbol{x}}A_x+\hat{\boldsymbol{y}}A_y+\hat{\boldsymbol{z}}A_z$	$\hat{\boldsymbol{r}}A_r+\hat{\boldsymbol{\phi}}A_\phi+\hat{\boldsymbol{z}}A_z$	$\hat{\boldsymbol{R}}A_R+\hat{\boldsymbol{\theta}}A_\theta+\hat{\boldsymbol{\phi}}A_\phi$
$\boldsymbol{A}$ 的幅值，$\lvert\boldsymbol{A}\rvert=$	$\sqrt[+]{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$	$\sqrt[+]{A_r^2+A_\phi^2+A_z^2}$	$\sqrt[+]{A_R^2+A_\theta^2+A_\phi^2}$
位置矢量 $\overrightarrow{OP_1}=$	$\hat{\boldsymbol{x}}x_1+\hat{\boldsymbol{y}}y_1+\hat{\boldsymbol{z}}z_1$，对于 $P(x_1,y_1,z_1)$	$\hat{\boldsymbol{r}}r_1+\hat{\boldsymbol{z}}z_1$，对于 $P(r_1,\phi_1,z_1)$	$\hat{\boldsymbol{R}}R_1$，对于 $P(R_1,\theta_1,\phi_1)$
基矢量性质	$\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}=\hat{\boldsymbol{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{y}}=\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}=1$ $\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{y}}=\hat{\boldsymbol{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}=\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}=0$ $\hat{\boldsymbol{x}}\times\hat{\boldsymbol{y}}=\hat{\boldsymbol{z}}$ $\hat{\boldsymbol{y}}\times\hat{\boldsymbol{z}}=\hat{\boldsymbol{x}}$ $\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{x}}=\hat{\boldsymbol{y}}$	$\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}=\hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}}=\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}=1$ $\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}}=\hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}=\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}=0$ $\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{\phi}}=\hat{\boldsymbol{z}}$ $\hat{\boldsymbol{\phi}}\times\hat{\boldsymbol{z}}=\hat{\boldsymbol{r}}$ $\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{r}}=\hat{\boldsymbol{\phi}}$	$\hat{\boldsymbol{R}}\cdot\hat{\boldsymbol{R}}=\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}=\hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}}=1$ $\hat{\boldsymbol{R}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}=\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}}=\hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot\hat{\boldsymbol{R}}=0$ $\hat{\boldsymbol{R}}\times\hat{\boldsymbol{\theta}}=\hat{\boldsymbol{\phi}}$ $\hat{\boldsymbol{\theta}}\times\hat{\boldsymbol{\phi}}=\hat{\boldsymbol{R}}$ $\hat{\boldsymbol{\phi}}\times\hat{\boldsymbol{R}}=\hat{\boldsymbol{\theta}}$
点积，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=$	$A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$	$A_rB_r+A_\phi B_\phi+A_zB_z$	$A_RB_R+A_\theta B_\theta+A_\phi B_\phi$
叉积，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=$	$\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{r}} & \hat{\boldsymbol{\phi}} & \hat{\boldsymbol{z}}\\ A_r & A_\phi & A_z\\ B_r & B_\phi & B_z\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{R}} & \hat{\boldsymbol{\theta}} & \hat{\boldsymbol{\phi}}\\ A_R & A_\theta & A_\phi\\ B_R & B_\theta & B_\phi\end{vmatrix}$
微分长度，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=$	$\hat{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}x+\hat{\boldsymbol{y}}\,\mathrm{d}y+\hat{\boldsymbol{z}}\,\mathrm{d}z$	$\hat{\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}r+\hat{\boldsymbol{\phi}}r\,\mathrm{d}\phi+\hat{\boldsymbol{z}}\,\mathrm{d}z$	$\hat{\boldsymbol{R}}\,\mathrm{d}R+\hat{\boldsymbol{\theta}}\,R\,\mathrm{d}\theta+\hat{\boldsymbol{\phi}}\,R\sin\theta\,\mathrm{d}\phi$
微分面积	$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_x=\hat{\boldsymbol{x}}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_y=\hat{\boldsymbol{y}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_z=\hat{\boldsymbol{z}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_r=\hat{\boldsymbol{r}}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$ $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_\phi=\hat{\boldsymbol{\phi}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$ $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_z=\hat{\boldsymbol{z}}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$	$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_R=\hat{\boldsymbol{R}}R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_\theta=\hat{\boldsymbol{\theta}}R\sin\theta\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\phi$ $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_\phi=\hat{\boldsymbol{\phi}}R\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\theta$
微分体积，$\mathrm{d}v=$	$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	$r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$	$R^2\sin\theta\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

微分表面积 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 为一个矢量，其幅值 $\mathrm{d}s$ 等于两个微分长度的乘积（例如 $\mathrm{d}l_y$ 和 $\mathrm{d}l_z$），方向为第三个方向的单位矢量（例如$\hat{\boldsymbol{x}}$）。所以，y-z 平面的微分面积为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_x=\hat{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}l_y\mathrm{d}l_z=\hat{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\quad(y\text{-}z\text{ 平面})\tag{3.35a}$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 的下标用以表明其方向。同样有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_y=\hat{\boldsymbol{y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\quad(x\text{-}z\text{ 平面})\tag{3.35b}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_z=\hat{\boldsymbol{z}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\quad(x\text{-}y\text{ 平面})\tag{3.35c}$$

微分体积等于所有三个微分长度的乘积

$$\mathrm{d}v=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\tag{3.36}$$

3.3.2　柱坐标系

柱坐标系对于求解具有圆柱对称性的问题十分有用，例如用于求解同轴电缆单位长度的电容。如图 3-9 所示，空间一点的位置用三个变量 r，ϕ 和 z 唯一确定。坐标 r 是 x-y 平面的径向距离（radial distance），ϕ 是从 x 轴开始度量的方位角（azimuth angle），z 同直角坐标系中的定义相同。它们的范围为：$0\leqslant r<\infty$，$0\leqslant\phi<2\pi$，$-\infty<z<\infty$。在图 3-9 中，点 $P(r_1,\phi_1,z_1)$ 是三个面的交点。这三个面分别是：由 $r=r_1$ 确定的圆柱面，由 $\phi=\phi_1$ 确定的垂直半平面（从 z 轴往外伸展），以及由 $z=z_1$ 确

定的水平面。互相垂直的基矢量为$\hat{r}$，$\hat{\phi}$，以及$\hat{z}$，其中$\hat{r}$从原点 O 沿 r 向外，$\hat{\phi}$指向同圆柱表面相切的方向，$\hat{z}$则沿垂直方向。和直角坐标系中基矢量$\hat{x}$、$\hat{y}$、$\hat{z}$独立于点 P 的位置不同，柱坐标系中$\hat{r}$，$\hat{\phi}$两个基矢量是 ϕ 的函数。

109

基矢量遵从下述右手循环关系

$$\hat{r}\times\hat{\phi}=\hat{z},\quad \hat{\phi}\times\hat{z}=\hat{r},\quad \hat{z}\times\hat{r}=\hat{\phi},\tag{3.37}$$

同所有其他单位矢量一样，$\hat{r}\cdot\hat{r}=\hat{\phi}\cdot\hat{\phi}=\hat{z}\cdot\hat{z}=1$，$\hat{r}\times\hat{r}=\hat{\phi}\times\hat{\phi}=\hat{z}\times\hat{z}=0$。

在柱坐标系中，矢量表示为

$$\boldsymbol{A}=\hat{a}\,|\boldsymbol{A}|=\hat{r}A_r+\hat{\phi}A_\phi+\hat{z}A_z,\tag{3.38}$$

其中，A_r、A_ϕ以及 A_z是 $\boldsymbol{A}$ 沿着$\hat{r}$、$\hat{\phi}$以及$\hat{z}$方向的分量。应用式（3.20），得到 $\boldsymbol{A}$ 的幅值为

$$|\boldsymbol{A}|=\sqrt[+]{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}=\sqrt[+]{A_r^2+A_\phi^2+A_z^2}\tag{3.39}$$

图 3-9 所示的位置矢量$\overrightarrow{OP}$仅有 r 和 z 方向的分量，即

$$\boldsymbol{R}_1=\overrightarrow{OP}=\hat{r}r_1+\hat{z}z_1\tag{3.40}$$

110

$\boldsymbol{R}_1$对 ϕ_1的依赖隐含在$\hat{r}$对 ϕ_1的依赖中。所以，当使用式（3.40）表示点 $P(r_1,\phi_1,z_1)$的位置矢量时，必须明确$\hat{r}$对应的 ϕ_1。

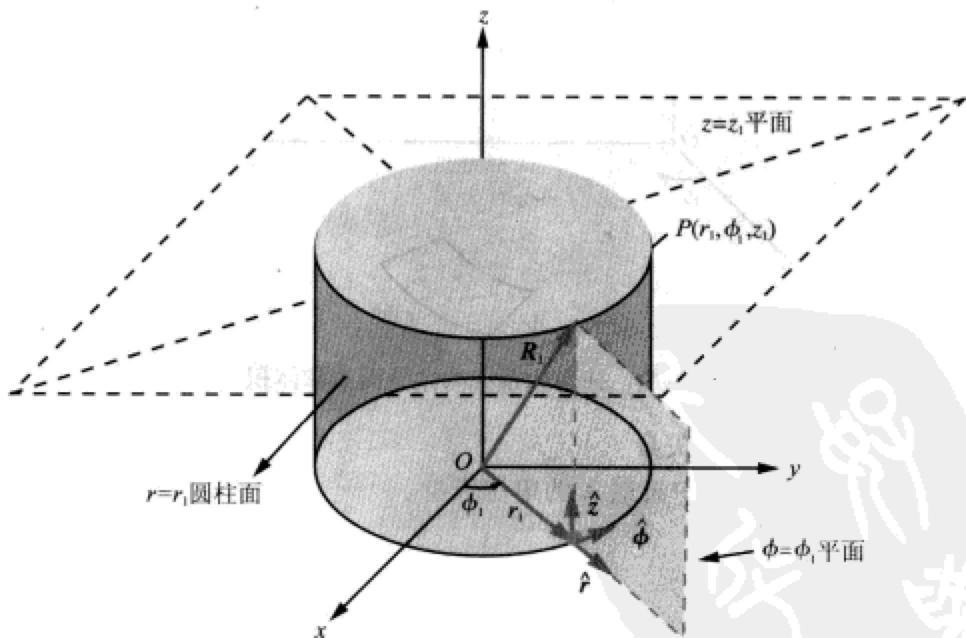


图 3-9 柱坐标系中的点 $P(r_1,\phi_1,z_1)$。r_1是 x-y 平面中从原点出发的径向距离；ϕ_1是 x-y 平面中从 x 轴往 y 轴测量的角度；z_1是垂直 x-y 平面的距离

图 3-10 所示为柱坐标系中的一个微分体积元。沿$\hat{r}$、$\hat{\phi}$以及$\hat{z}$方向的微分长度分别为

$$dl_r=dr,\quad dl_\phi=r\,d\phi,\quad dl_z=dz\tag{3.41}$$

注意沿$\hat{\phi}$的微分长度为 $r\,d\phi$，而不仅仅是 $d\phi$。在柱坐标系中的微分长度 $d\boldsymbol{l}$ 为

$$d\boldsymbol{l}=\hat{r}\,dl_r+\hat{\phi}dl_\phi+\hat{z}dl_z=\hat{r}dr+\hat{\phi}r\,d\phi+\hat{z}dz\tag{3.42}$$

在介绍直角坐标系时指出，任何两个坐标轴的微分长度的乘积，等于一个矢量微分面积的幅值，该矢量微分面积的法向指向第三个坐标。因此

$$d\mathbf{s}_r = \hat{\mathbf{r}}\, dl_\phi dl_z = \hat{\mathbf{r}} r\, d\phi\, dz \quad (\phi - z \text{ 圆柱面}), \tag{3.43a}$$

$$d\mathbf{s}_\phi = \hat{\boldsymbol{\phi}}\, dl_r dl_z = \hat{\boldsymbol{\phi}}\, dr\, dz \quad (r - z \text{ 平面}), \tag{3.43b}$$

$$d\mathbf{s}_z = \hat{\mathbf{z}}\, dl_r dl_\phi = \hat{\mathbf{z}}\, r\, dr\, d\phi \quad (r - \phi \text{ 平面}) \tag{3.43c}$$

微分体积等于三个坐标的微分长度的乘积

$$dv = dl_r\, dl_\phi dl_z = r\, dr\, d\phi\, dz \tag{3.44}$$

111 柱坐标系的上述性质，已经列表归纳在表 3-1 中。

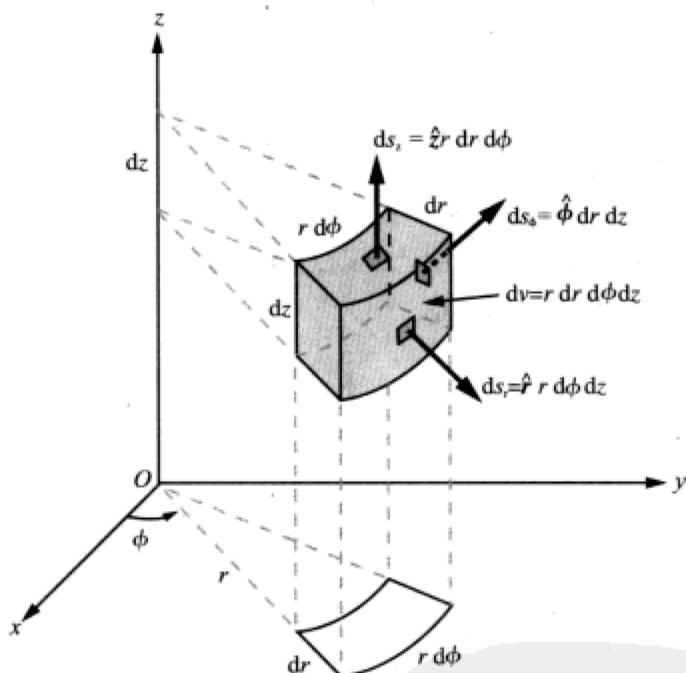


图 3-10 柱坐标系中的微分面积和体积

例 3-3 柱坐标系中的距离矢量

求图 3-11 的柱坐标系中矢量 $\mathbf{A}$ 的单位矢量。

解答：在三角形 OP_1P_2 中，

$$\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_1} + \mathbf{A}$$

因此

$$\mathbf{A} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \hat{\mathbf{r}} r_0 - \hat{\mathbf{z}} h$$

和

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{\hat{\mathbf{r}} r_0 - \hat{\mathbf{z}} h}{\sqrt{r_0^2 + h^2}}$$

注意：$\mathbf{A}$ 的表达式与 ϕ_0 无关。这就是说，所有从点 P_1 出发，指向 x-y 平面上 $r = r_0$ 的圆上任一点的矢量，在柱坐标系中都具有相同的表达式。这种含糊性可以通过指明 ϕ_0 来消除，因为 $\hat{\mathbf{r}}$ 中隐含着对 ϕ_0 的依赖。■

例 3-4 圆柱面积

求由 $r=5$，$30°\leqslant\phi\leqslant 60°$，$0\leqslant z\leqslant 3$ 确定的圆柱面的面积（图 3-12）。

解答：所述表面如图 3-12 所示。根据式（3.43a）给出的 r 为常数的柱面单元的微分面积，有

$$S = r\int_{\phi=30°}^{60°} \mathrm{d}\phi \int_{z=0}^{3} \mathrm{d}z = 5\phi\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} z\Big|_0^3 = \frac{5\pi}{2}$$

注意：在计算积分时，要先将角度的上下限转换成弧度。 ■

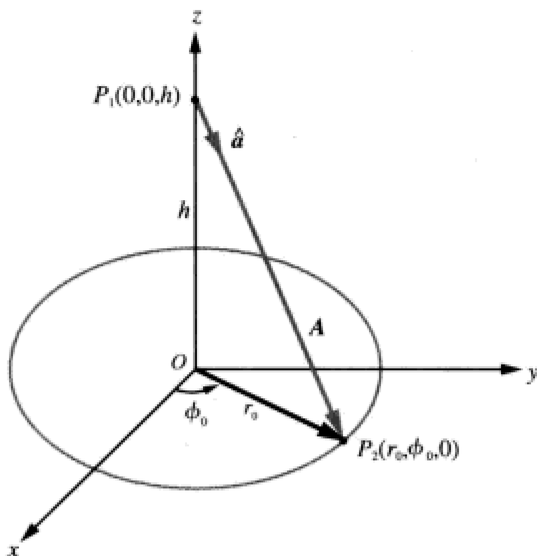


图 3-11 例 3-3 的几何关系

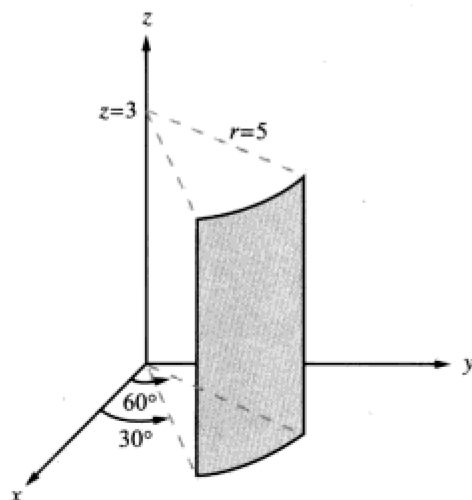


图 3-12 例 3-4 的圆柱面

练习 3.4 半径为 $r=5$cm 的圆柱，与 z 轴同心，上下分别延伸到 $z=3$cm 和 $z=-3$cm。利用式（3.44）求圆柱的体积。 112

答案：471.2cm³。（参见◉）

3.3.3 球坐标系

在球坐标系中，空间一点的位置由变量 R、θ，以及 ϕ 唯一确定，如图 3-13 所示。坐标 R，有时称为范围（range）坐标，描述一个圆心位于原点、半径为 R 的球。天顶角(zenith angle)θ，从正 z 轴开始度量，描述一个顶点在原点的圆锥面，而方位角 ϕ 则同柱坐标系中的定义相同，表示从正 x 轴开始往 y 轴度量的角度。R、θ 和 ϕ 的范围分别是：$0\leqslant R<\infty$，$0\leqslant\theta<\pi$ 和 $0\leqslant\phi<\pi$。基矢量 $\hat{\boldsymbol{R}}$、$\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 以及 $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 遵从以下右手循环关系

$$\hat{\boldsymbol{R}}\times\hat{\boldsymbol{\theta}}=\hat{\boldsymbol{\phi}},\quad \hat{\boldsymbol{\theta}}\times\hat{\boldsymbol{\phi}}=\hat{\boldsymbol{R}},\quad \hat{\boldsymbol{\phi}}\times\hat{\boldsymbol{R}}=\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{3.45}$$

分量为 A_R、A_θ 以及 A_ϕ 的矢量写为

$$\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{a}}|\boldsymbol{A}|=\hat{\boldsymbol{R}}A_R+\hat{\boldsymbol{\theta}}A_\theta+\hat{\boldsymbol{\phi}}A_\phi, \tag{3.46}$$

其幅值为

$$|\boldsymbol{A}|=\sqrt[+]{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}=\sqrt[+]{A_R^2+A_\theta^2+A_\phi^2} \tag{3.47}$$

点 $P(R_1,\theta_1,\phi_1)$ 的位置矢量很简单，为

$$\boldsymbol{R}_1 = \overrightarrow{OP} = \hat{\boldsymbol{R}} R_1, \tag{3.48}$$

但请注意，$\hat{\boldsymbol{R}}$隐含着对 θ_1 和 ϕ_1 的依赖。

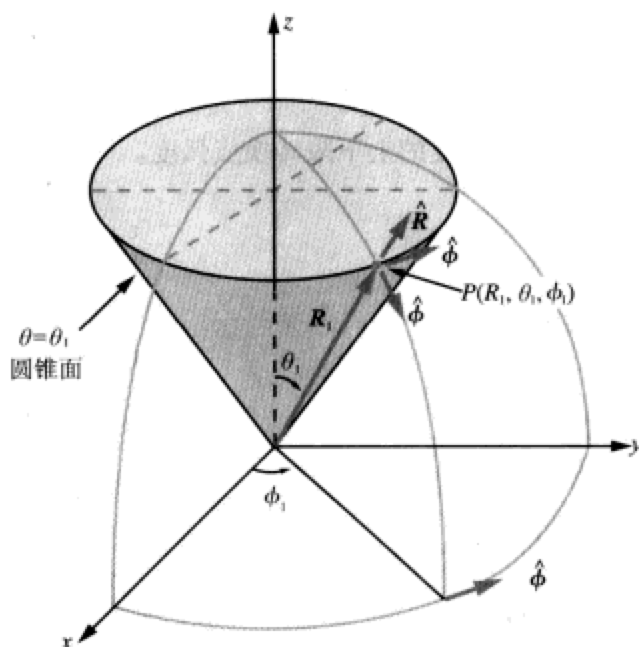


图 3-13 球坐标系中的点 $P(R_1, \theta_1, \phi_1)$

如图 3-14 所示，沿$\hat{\boldsymbol{R}}$、$\hat{\boldsymbol{\theta}}$以及$\hat{\boldsymbol{\phi}}$的微分长度为

113

$$dl_R = dR, \quad dl_\theta = R\, d\theta, \quad dl_\phi = R \sin\theta\, d\phi \tag{3.49}$$

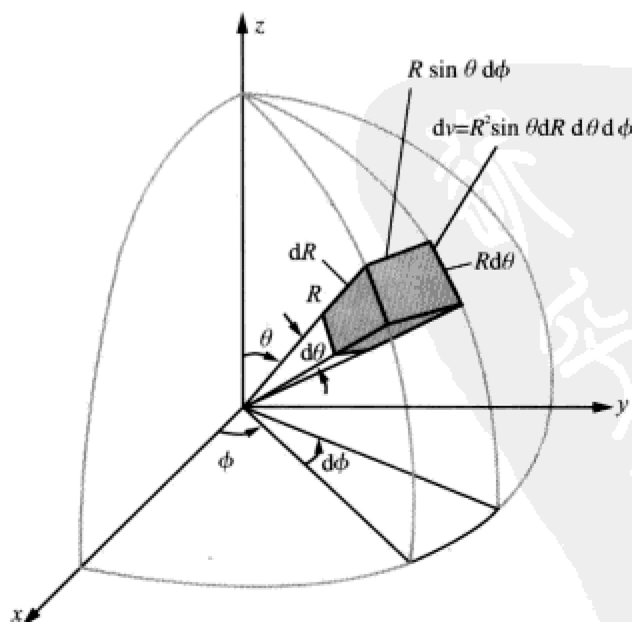


图 3-14 球坐标系中微分体积

因此，矢量微分长度 d$\boldsymbol{l}$，矢量微分面积 d$\boldsymbol{s}$，以及微分体积 dv 的表达式为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\hat{\boldsymbol{R}}\mathrm{d}l_R+\hat{\boldsymbol{\theta}}\,\mathrm{d}l_\theta+\hat{\boldsymbol{\phi}}\,\mathrm{d}l_\phi=\hat{\boldsymbol{R}}\,\mathrm{d}\,R+\hat{\boldsymbol{\theta}}\,R\,\mathrm{d}\theta+\hat{\boldsymbol{\phi}}R\,\sin\theta\,\mathrm{d}\phi, \tag{3.50a}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_R=\hat{\boldsymbol{R}}\,\mathrm{d}l_\theta\,\mathrm{d}l_\phi=\hat{\boldsymbol{R}}R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\quad(\theta-\phi\text{ 球面}), \tag{3.50b}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_\theta=\hat{\boldsymbol{\theta}}\,\mathrm{d}l_R\,\mathrm{d}l_\phi=\hat{\boldsymbol{\theta}}\,R\,\sin\theta\,\mathrm{d}\,R\,\mathrm{d}\phi\quad(R-\phi\text{ 圆锥面}), \tag{3.50c}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_\phi=\hat{\boldsymbol{\phi}}\,\mathrm{d}l_R\,\mathrm{d}l_\theta=\hat{\boldsymbol{\phi}}\,R\,\mathrm{d}\,R\,\mathrm{d}\theta\quad(R-\theta\text{ 平面}), \tag{3.50d}$$

$$\mathrm{d}v=\mathrm{d}l_R\mathrm{d}l_\theta\,\mathrm{d}l_\phi=R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\,R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{3.50e}$$

这些关系归纳在表 3-1 中。

例 3-5　球坐标系中的表面积

图 3-15 所示是半径为 3cm 的球面的一截，求其面积。

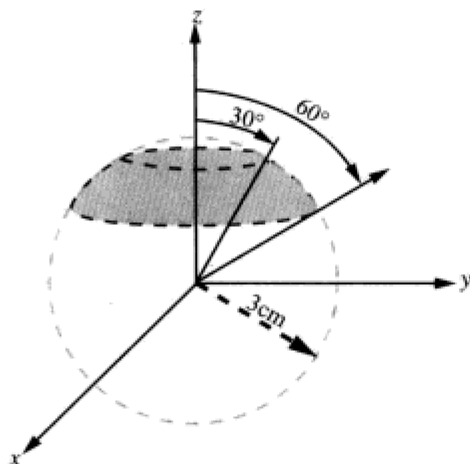


图 3-15　例 3-5 中的一截球面

解答：根据半径为 R 的球面单元微分面积式（3.50b），可得

$$S=R^2\int_{\theta=30^\circ}^{60^\circ}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_{\phi=0}^{2\pi}\mathrm{d}\phi=9(-\cos\theta)\Big|_{30^\circ}^{60^\circ}\phi\Big|_0^{2\pi}\quad(\mathrm{cm}^2)$$

$$=18\pi(\cos30^\circ-\cos60^\circ)=20.7(\mathrm{cm}^2)$$

■

例 3-6　球上的电荷

半径为 2cm 的球，包含有体电荷，其分布密度 ρ_v 为

$$\rho_v=4\cos^2\theta\quad(\mathrm{C/m^3})$$

求球上的总电荷 Q。

解答：

$$Q=\int_v\rho_v\mathrm{d}v=\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{R=0}^{2\times10^{-2}}(4\cos^2\theta)R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\,R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

$$=4\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{R^3}{3}\right)\Big|_0^{2\times10^{-2}}\sin\theta\,\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

$$=\frac{32}{3}\times10^{-6}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Big|_0^{\pi}\mathrm{d}\phi=\frac{64}{9}\times10^{-6}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi=\frac{128\pi}{9}\times10^{-6}=44.68\quad(\mu\mathrm{C})$$

注意：在计算关于 R 的积分之前，先将 R 的单位转换成了米。■

114

3.4 坐标系间的变换

对一个空间点，它的位置不因选用的坐标系而改变。这就是说，不论用什么坐标系去表示它，位置总是同一个。对矢量也是这样。本节将建立直角坐标系中的变量(x,y,z)，柱坐标系中的变量(r,θ,z)以及球坐标系中的变量(R,θ,ϕ)之间的关系。以后将利用这些关系，把一个坐标系中表示的矢量，变换到另外一个坐标系中去表示。

3.4.1 直角坐标系到柱坐标系的变换

在图3-16中，点P的直角坐标为(x,y,z)，柱坐标为(r,θ,z)。两个坐标系统共用坐标z，另外的两对坐标之间的关系则可以从图3-16中的几何关系获得

$$r=\sqrt[+]{x^2+y^2},\quad \phi=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \tag{3.51}$$

相应的逆关系为

$$x=r\cos\phi,\quad y=r\sin\phi \tag{3.52}$$

115

下面建立基矢量之间的关系。在图3-17的x-y平面上，画出了单位矢量$\hat{\boldsymbol{x}}$，$\hat{\boldsymbol{y}}$，$\hat{\boldsymbol{r}}$以及$\hat{\boldsymbol{\phi}}$的方向，由此可以得到下述关系

$$\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}=\cos\phi,\quad \hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{y}}=\sin\phi, \tag{3.53a}$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}=-\sin\phi,\quad \hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot\hat{\boldsymbol{y}}=\cos\phi, \tag{3.53b}$$

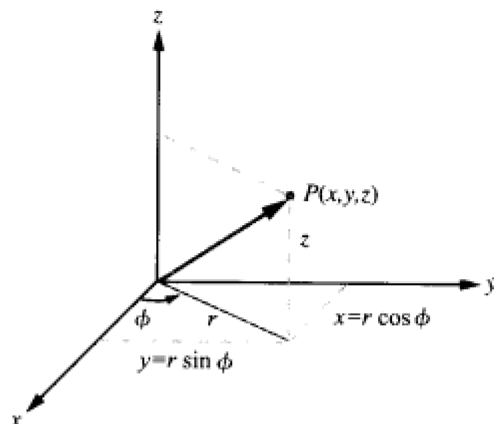


图3-16　直角坐标(x,y,z)同柱坐标(r,ϕ,z)之间的关系

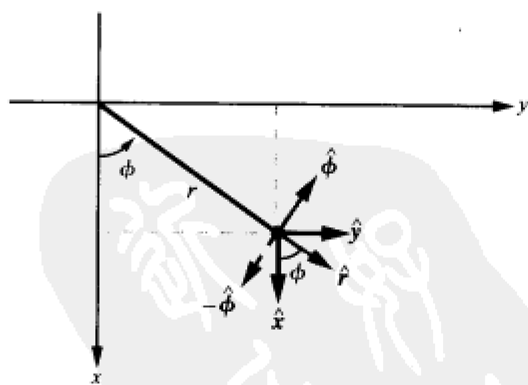


图3-17　基矢量（$\hat{\boldsymbol{x}}$，$\hat{\boldsymbol{y}}$）与基矢量（$\hat{\boldsymbol{r}}$，$\hat{\boldsymbol{\phi}}$）之间的关系

为了用$\hat{\boldsymbol{x}}$、$\hat{\boldsymbol{y}}$表示$\hat{\boldsymbol{r}}$，将$\hat{\boldsymbol{r}}$写成以下形式

$$\hat{\boldsymbol{r}}=\hat{\boldsymbol{x}}a+\hat{\boldsymbol{y}}b, \tag{3.54}$$

其中，a和b是位置的变换系数。由点积$\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}$可得

$$\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}=\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}a+\hat{\boldsymbol{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}b=a \tag{3.55}$$

比较式（3.55）同式（3.53a），可知$a=\cos\phi$。同样，对式（3.54）应用点积$\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{y}}$，得到$b=\sin\phi$。所以

$$\hat{r} = \hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi \tag{3.56a}$$

对$\hat{\phi}$重复同样的运算，可得

$$\hat{\phi} = -\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi \tag{3.56b}$$

而第三个基矢量$\hat{z}$则对于两中坐标系是相同的。求解式（3.56a）、式（3.56b）的中的$\hat{x}$和$\hat{y}$，可以得到以下逆关系

$$\hat{x} = \hat{r}\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi, \tag{3.57a}$$

$$\hat{y} = \hat{r}\sin\phi + \hat{\phi}\cos\phi \tag{3.57b}$$

式(3.56a)～式(3.56b)给定的关系，不仅可用于在基矢量$(\hat{x},\hat{y})$和$(\hat{r},\hat{\phi})$之间进行互相转换（即坐标变换），还可以用于将一个坐标系中的矢量分量表示，转换成另外一个坐标系中的矢量分量表示。例如，直角坐标系中的矢量$\boldsymbol{A} = \hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z$，可以应用式（3.56a）和式（3.56b）转换成柱坐标系中的$\boldsymbol{A} = \hat{r}A_r + \hat{\phi}A_\phi + \hat{z}A_z$，即

$$A_r = A_x\cos\phi + A_y\sin\phi \tag{3.58a}$$

$$A_\phi = -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi \tag{3.58b}$$

若应用逆向关系，则有

$$A_x = A_r\cos\phi - A_\phi\sin\phi, \tag{3.59a}$$

$$A_y = A_r\sin\phi + A_\phi\cos\phi \tag{3.59b}$$

本小节以及接下来的两小节中的有关变换关系公式归纳在表 3-2 中。

表 3-2 坐标变换关系

变　换	坐标变量	单位基矢量	矢量的分量
直角坐标→柱坐标	$r = \sqrt[+]{x^2+y^2}$ $\phi = \tan^{-1}(y/x)$ $z = z$	$\hat{r} = \hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi$ $\hat{\phi} = -\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi$ $\hat{z} = \hat{z}$	$A_r = A_x\cos\phi + A_y\sin\phi$ $A_\phi = -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi$ $A_z = A_z$
柱坐标→直角坐标	$x = r\cos\phi$ $y = r\sin\phi$ $z = z$	$\hat{x} = \hat{r}\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi$ $\hat{y} = \hat{r}\sin\phi + \hat{\phi}\cos\phi$ $\hat{z} = \hat{z}$	$A_x = A_r\cos\phi - A_\phi\sin\phi$ $A_y = A_r\sin\phi + A_\phi\cos\phi$ $A_z = A_z$
直角坐标→球坐标	$R = \sqrt[+]{x^2+y^2+z^2}$ $\theta = \tan^{-1}[\sqrt[+]{x^2+y^2}/z]$ $\phi = \tan^{-1}(y/x)$	$\hat{R} = \hat{x}\sin\theta\cos\phi + \hat{y}\sin\theta\sin\phi + \hat{z}\cos\theta$ $\hat{\theta} = \hat{x}\cos\theta\cos\phi + \hat{y}\cos\theta\sin\phi - \hat{z}\sin\theta$ $\hat{\phi} = -\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi$	$A_R = A_x\sin\theta\cos\phi + A_y\sin\theta\sin\phi + A_z\cos\theta$ $A_\theta = A_x\cos\theta\cos\phi + A_y\cos\theta\sin\phi - A_z\sin\theta$ $A_\phi = -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi$
球坐标→直角坐标	$x = R\sin\theta\cos\phi$ $y = R\sin\theta\sin\phi$ $z = R\cos\theta$	$\hat{x} = \hat{R}\sin\theta\cos\phi + \hat{\theta}\cos\theta\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi$ $\hat{y} = \hat{R}\sin\theta\sin\phi + \hat{\theta}\cos\theta\sin\phi + \hat{\phi}\cos\phi$ $\hat{z} = \hat{R}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta$	$A_x = A_R\sin\theta\cos\phi + A_\theta\cos\theta\cos\phi - A_\phi\sin\phi$ $A_y = A_R\sin\theta\sin\phi + A_\theta\cos\theta\sin\phi + A_\phi\cos\phi$ $A_z = A_R\cos\theta - A_\theta\sin\theta$

（续）

变　换	坐标变量	单位基矢量	矢量的分量
柱坐标→球坐标	$R=\sqrt[+]{r^2+z^2}$ $\theta=\tan^{-1}(r/z)$ $\phi=\phi$	$\hat{\boldsymbol{R}}=\hat{\boldsymbol{r}}\sin\theta+\hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta$ $\hat{\boldsymbol{\theta}}=\hat{\boldsymbol{r}}\cos\theta-\hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta$ $\hat{\boldsymbol{\phi}}=\hat{\boldsymbol{\phi}}$	$A_R=A_r\sin\theta+A_z\cos\theta$ $A_\theta=A_r\cos\theta-A_z\sin\theta$ $A_\phi=A_\phi$
球坐标→柱坐标	$r=R\sin\theta$ $\phi=\phi$ $z=R\cos\theta$	$\hat{\boldsymbol{r}}=\hat{\boldsymbol{R}}\sin\theta+\hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta$ $\hat{\boldsymbol{\phi}}=\hat{\boldsymbol{\phi}}$ $\hat{\boldsymbol{z}}=\hat{\boldsymbol{R}}\cos\theta-\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta$	$A_r=A_R\sin\theta+A_\theta\cos\theta$ $A_\phi=A_\phi$ $A_z=A_R\cos\theta-A_\theta\sin\theta$

例3-7　直角坐标到柱坐标的变换

在直角坐标系中给定点 $P_1(3,-4,3)$，以及矢量 $\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{x}}2-\hat{\boldsymbol{y}}3+\hat{\boldsymbol{z}}4$。在柱坐标系中表示 P_1 和 $\boldsymbol{A}$，并在 P_1 点计算 $\boldsymbol{A}$ 的值。

解答：对点 P_1，有 $x=3$，$y=-4$，$z=3$。利用式（3.51），可得

$$r=\sqrt[+]{x^2+y^2}=5,\quad \phi=\tan^{-1}\frac{y}{x}=-53.1°=306.9°,$$

而 z 保持不变。因此，在柱坐标系中，$P_1=P_1(5,\ 306.9°,\ 3)$。

对于矢量 $\boldsymbol{A}$ 在柱坐标系中的表示 $\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{r}}A_r+\hat{\boldsymbol{\phi}}A_\phi+\hat{\boldsymbol{z}}A_z$，其分量可由式（3.58a）和式（3.58b）确定如下

$$\begin{aligned}A_r&=A_x\cos\phi+A_y\sin\phi=2\cos\phi-3\sin\phi,\\A_\phi&=-A_x\sin\phi+A_y\cos\phi=-2\sin\phi-3\cos\phi,\\A_z&=4\end{aligned}$$

因此

$$\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{r}}(2\cos\phi-3\sin\phi)-\hat{\boldsymbol{\phi}}(2\sin\phi+3\cos\phi)+\hat{\boldsymbol{z}}4$$

其中，ϕ 取决于 $\boldsymbol{A}$ 在柱坐标系中的位置。在点 P_1，$\phi=306.9°$，因此

116

$$\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{r}}3.60-\hat{\boldsymbol{\phi}}0.20+\hat{\boldsymbol{z}}4$$ ■

3.4.2　直角坐标到球坐标的变换

根据图3-18，得到直角坐标 (x,y,z) 和球坐标 (R,θ,ϕ) 之间的关系如下

$$R=\sqrt[+]{x^2+y^2+z^2},\tag{3.60a}$$

$$\theta=\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt[+]{x^2+y^2}}{z}\right],\tag{3.60b}$$

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\tag{3.60c}$$

它们的逆关系为

$$x=R\sin\theta\cos\phi,\tag{3.61a}$$

$$y=R\sin\theta\sin\phi,\tag{3.61b}$$

$$z=R\cos\theta\tag{3.61c}$$

由于单位矢量$\hat{\boldsymbol{R}}$位于$\hat{\boldsymbol{r}}-\hat{\boldsymbol{z}}$平面中，因此它可以表示如下

$$\hat{\boldsymbol{R}}=\hat{\boldsymbol{r}}a+\hat{\boldsymbol{z}}b, \tag{3.62}$$

其中，a 和 b 是变换系数。由于$\hat{\boldsymbol{r}}$和$\hat{\boldsymbol{z}}$是互相正交的，因此有

$$\hat{\boldsymbol{R}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}=a, \tag{3.63a}$$

$$\hat{\boldsymbol{R}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}=b \tag{3.63b}$$

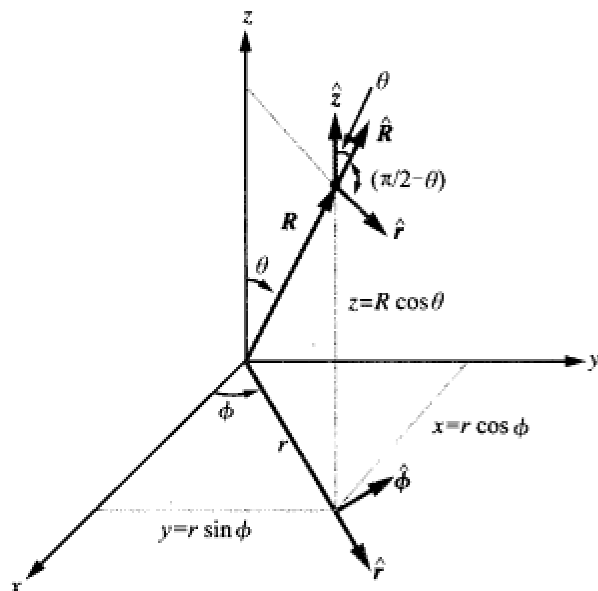


图 3-18 (x,y,z)和(R,θ,ϕ)之间的关系

根据图 3-18，$\hat{\boldsymbol{R}}$和$\hat{\boldsymbol{r}}$之间的夹角是 θ 的余角，$\hat{\boldsymbol{R}}$和$\hat{\boldsymbol{z}}$之间的夹角是 θ。因此，$a=\hat{\boldsymbol{R}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}=\sin\theta$，$b=\hat{\boldsymbol{R}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}=\cos\theta$。将 a 和 b 的表达式代入式（3.62），并用式（3.56a）代替$\hat{\boldsymbol{r}}$，得到

$$\hat{\boldsymbol{R}}=\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta\cos\phi+\hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta\sin\phi+\hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta \tag{3.64a}$$

通过类似运算，可以得到$\hat{\boldsymbol{\theta}}$的表达式

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}=\hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta\cos\phi+\hat{\boldsymbol{y}}\cos\theta\sin\phi-\hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta, \tag{3.64b}$$

由式（3.56b）给出$\hat{\boldsymbol{\phi}}$的表达式为

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}=-\hat{\boldsymbol{x}}\sin\phi+\hat{\boldsymbol{y}}\cos\phi \tag{3.64c}$$

利用从式(3.64a)～式(3.64c)的公式，求解（$\hat{\boldsymbol{x}}$，$\hat{\boldsymbol{y}}$，$\hat{\boldsymbol{z}}$），得它们同（$\hat{\boldsymbol{R}}$，$\hat{\boldsymbol{\theta}}$，$\hat{\boldsymbol{\phi}}$）的关系为

$$\hat{\boldsymbol{x}}=\hat{\boldsymbol{R}}\sin\theta\cos\phi+\hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\cos\phi-\hat{\boldsymbol{\phi}}\sin\phi, \tag{3.65a}$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}=\hat{\boldsymbol{R}}\sin\theta\sin\phi+\hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\sin\phi+\hat{\boldsymbol{\phi}}\cos\phi, \tag{3.65b}$$

$$\hat{\boldsymbol{z}}=\hat{\boldsymbol{R}}\cos\theta-\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta \tag{3.65c}$$

通过将$(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{y}},\hat{\boldsymbol{z}},\hat{\boldsymbol{R}},\hat{\boldsymbol{\theta}},\hat{\boldsymbol{\phi}})$对应地替换为$(A_x,A_y,A_z,A_R,A_\theta,A_\phi)$，式(3.64a)～式(3.65c)也可以用于把矢量$\boldsymbol{A}=(A_x,A_y,A_z)$转换成其对应的球坐标分量$(A_R,A_\theta,A_\phi)$，或用于相应的逆向转换。

例 3-8 直角坐标到球坐标的变换

在球坐标系中表达矢量 $\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{x}}(x+y)+\hat{\boldsymbol{y}}(y-x)+\hat{\boldsymbol{z}}z$。

解答：利用表 3-2 所给 A_R 的变换关系，有

$$\begin{aligned}A_R &= A_x\sin\theta\cos\phi + A_y\sin\theta\sin\phi + A_z\cos\theta\\ &= (x+y)\sin\theta\cos\phi + (y-x)\sin\theta\sin\phi + z\cos\theta\end{aligned}$$

利用式（3.61c）所给的 x，y，z 的表达式，有

$$\begin{aligned}A_R &= (R\sin\theta\cos\phi + R\sin\theta\sin\phi)\sin\theta\cos\phi\\ &\quad + (R\sin\theta\sin\phi - R\sin\theta\cos\phi)\sin\theta\sin\phi + R\cos^2\theta\\ &= R\sin^2\theta(\cos^2\phi+\sin^2\phi) + R\cos^2\theta\\ &= R\sin^2\theta + R\cos^2\theta = R\end{aligned}$$

118

同样

$$A_\theta = (x+y)\cos\theta\cos\phi + (y-x)\cos\theta\sin\phi - z\sin\theta,$$

$$A_\phi = -(x+y)\sin\phi + (y-x)\cos\phi,$$

采用与 A_R 相同的处理，可得

$$A_\theta = 0,$$

$$A_\phi = -R\sin\theta$$

所以有

$$\boldsymbol{A} = \hat{\boldsymbol{R}}A_R + \hat{\boldsymbol{\theta}}A_\theta + \hat{\boldsymbol{\phi}}A_\phi = \hat{\boldsymbol{R}}R - \hat{\boldsymbol{\phi}}R\sin\theta$$ ■

3.4.3 柱坐标到球坐标的变换

柱坐标系同球坐标系间的变换，可以通过组合前两小节的变换关系得到，结果列于表 3-2 中。

3.4.4 两点间的距离

在直角坐标系中，$P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 两点间的距离 d 由式（3.12）给出为

$$d = |\boldsymbol{R}_{12}| = [(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{1/2} \tag{3.66}$$

利用式（3.52）将点 P_1、P_2 的直角坐标转换成柱坐标后，可得

$$\begin{aligned}d &= [(r_2\cos\phi_2 - r_1\cos\phi_1)^2 + (r_2\sin\phi_2 - r_1\sin\phi_1)^2 + (z_2-z_1)^2]^{1/2} \qquad (3.67)\\ &= [r_2^2 + r_1^2 - 2r_1r_2\cos(\phi_2-\phi_1) + (z_2-z_1)^2]^{1/2} \quad \text{(柱坐标)}\end{aligned}$$

利用式（3.61a-c）经过类似的变换后，可得球坐标系中 P_1、P_2 间的距离表达式

$$d = \{R_2^2 + R_1^2 - 2R_1R_2[\cos\theta_2\cos\theta_1 + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_2-\phi_1)]\}^{1/2} \quad \text{(球坐标)} \tag{3.68}$$

复习题

Q3.7 为什么要用多个坐标系统？

Q3.8 为什么基矢量 $(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{y}},\hat{\boldsymbol{z}})$ 与点的位置无关，而 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 却与点的位置有关？

Q3.9 下列各坐标系的基矢量的循环关系是什么？（a）直角坐标系；（b）柱坐标系；（c）球坐标系。

Q3.10 一个点在柱坐标系中的位置矢量，是如何同其球坐标系中的对应位置矢量相联系的？

练习 3.5 已知点 P 的柱坐标 $(2\sqrt{3},\pi/3,-2)$，求其球坐标。

答案：$P(4, 2\pi/3, \pi/3)$。（参见❀）

练习 3.6 将矢量

$$\boldsymbol{A} = \hat{\boldsymbol{x}}(x+y) + \hat{\boldsymbol{y}}(y-x) + \hat{\boldsymbol{z}}z$$

从直角坐标系转换到柱坐标系

答案：$\boldsymbol{A} = \hat{\boldsymbol{r}}r - \hat{\boldsymbol{\phi}}r + \hat{\boldsymbol{z}}z$。（参见❀）

119

3.5 标量场的梯度

对于幅值随单个变量变化的标量物理量，例如温度 T 为高度 z 的函数的情况，T 随高度的变化率可以用导数 $\mathrm{d}T/\mathrm{d}z$ 描述。然而，如果 T 同时也是直角坐标 x 和 y 的函数，则其空间变化率就不好描述了，因为在这种情况下，不仅要考虑 T 随三个变量的单独变化，还要将它们统一起来考虑。尽管 T 沿 x，y，z 的微小变化可以用 T 相对三个坐标的偏导数来描述，然而，应该如何将这三者结合起来，去表示空间任一方向的 T 的变化率，却并非一目了然的事情。此外，电磁学中处理的大多数物理量是矢量，因此幅值和方向都可能随空间位置变化。在矢量微积分中，采用三种基本运算来描述矢量和标量的微小空间变化，即：梯度（gradient），散度（divergence），以及旋度（curl）运算。梯度运算处理标量场，这是本节的主题。另外两个运算处理的是矢量，将在后面的几节中介绍。

如图 3-19 所示，假定 $T_1(x,y,z)$ 是空间某个区域中的点 $P_1(x,y,z)$ 的温度，$T_2(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z)$ 是邻近点 P_2 的温度。微分距离 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$ 是微分矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的分量，即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \hat{\boldsymbol{x}}\mathrm{d}x + \hat{\boldsymbol{y}}\mathrm{d}y + \hat{\boldsymbol{z}}\mathrm{d}z \tag{3.69}$$

根据微分学，微分温度 $\mathrm{d}T = T_2 - T_1$ 为

$$\mathrm{d}T = \frac{\partial T}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial T}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial T}{\partial z}\mathrm{d}z, \tag{3.70}$$

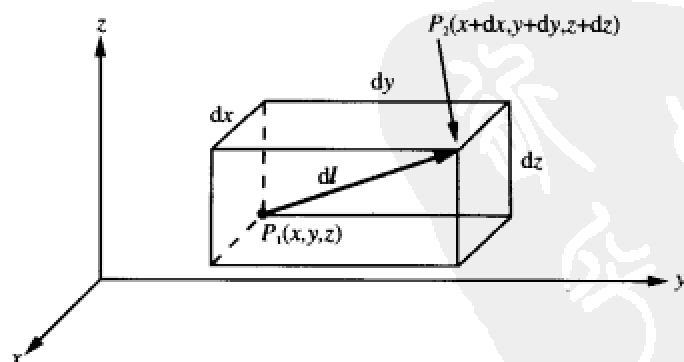


图 3-19 点 P_1 和 P_2 的微分距离矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$

根据定义 $\mathrm{d}x = \hat{\boldsymbol{x}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$，$\mathrm{d}y = \hat{\boldsymbol{y}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$，$\mathrm{d}z = \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$，所以式（3.70）可重写为

$$\mathrm{d}T = \hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial T}{\partial x} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial T}{\partial y} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial T}{\partial z} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \left[\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial T}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial T}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial T}{\partial z}\right] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{3.71}$$

式（3.71）的方括号中的矢量，定义了在 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的位置处，当 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 产生一个矢量变化时，

微分温度 $\mathrm{d}T$ 所对应的变化。这个矢量称 T 的梯度，简记为 grad T，常用符号表示为 ∇T。即

$$\nabla T = \mathrm{grad}\, T \triangleq \hat{x}\frac{\partial T}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial T}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial T}{\partial z}, \tag{3.72}$$

因此式（3.71）可表示为

$$\mathrm{d}T = \nabla T \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{3.73}$$

符号"∇"称为 del（读"台尔"，倒三角）或梯度运算符（gradient operator），定义为

120

$$\nabla \triangleq \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \quad（直角坐标系） \tag{3.74}$$

需要注意的是，尽管梯度运算符本身没有物理意义，但当它对一个标量物理量进行运算时，就具有物理意义了，运算的结果是一个矢量，其幅值等于该物理量每单位距离的最大变化率，方向则为该物理量增长最快的方向。设 $\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \hat{\boldsymbol{a}}_l \mathrm{d}l$，这里 $\hat{\boldsymbol{a}}_l$ 为 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的单位矢量，则 T 沿着 $\hat{\boldsymbol{a}}_l$ 方向的方向导数（directional derivative）定义为

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}l} = \nabla T \cdot \hat{\boldsymbol{a}}_l \tag{3.75}$$

如果 ∇T 是某坐标系中的已知函数，两点 P_1、P_2 的温度 T 分别用 T_1、T_2 表示，则对式（3.73）两端积分，可以得到温差（$T_2 - T_1$）为

$$T_2 - T_1 = \int_{P_1}^{P_2} \nabla T \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{3.76}$$

例 3-9 方向导数

求 $T = x^2 + y^2 z$ 沿方向 $\hat{x}2 + \hat{y}3 - \hat{z}2$ 的方向导数，并估计它在点(1，-1,2)点的值。

解答：方向导数 $\mathrm{d}T/\mathrm{d}l$ 由式（3.75）给定。首先求 T 的梯度

$$\nabla T = \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)(x^2 + y^2 z) = \hat{x}\,2x + \hat{y}\,2yz + \hat{z}y^2$$

用 $\boldsymbol{l}$ 表示给定的方向

$$\boldsymbol{l} = \hat{x}2 + \hat{y}3 - \hat{z}2$$

其单位矢量为

$$\hat{\boldsymbol{a}}_l = \frac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|} = \frac{\hat{x}2 + \hat{y}3 - \hat{z}2}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{\hat{x}2 + \hat{y}3 - \hat{z}2}{\sqrt{17}}$$

应用式（3.75）得

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}l} = \nabla T \cdot \hat{\boldsymbol{a}}_l = (\hat{x}\,2x + \hat{y}\,2yz + \hat{z}y^2) \cdot \left(\frac{\hat{x}2 + \hat{y}3 - \hat{z}2}{\sqrt{17}}\right) = \frac{4x + 6yz - 2y^2}{\sqrt{17}}$$

在点(1，-1,2)处有

$$\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}l}\right|_{(1,-1,2)} = \frac{4 - 12 - 2}{\sqrt{17}} = \frac{-10}{\sqrt{17}}$$

■

3.5.1 柱坐标系及球坐标系中的梯度

尽管式（3.72）是在直角坐标系中获得的，它却适用于所有正交坐标系。为了

能够对柱坐标系或球坐标系中的标量物理量进行梯度运算，需要推导在相应坐标系中的∇表达式。为把式（3.72）转换到柱坐标(r,ϕ,z)，需用到以下坐标关系

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \tan\phi=\frac{y}{x} \tag{3.77}$$

根据微分学原理有

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \tag{3.78}$$

因为z同x正交，所以$\partial z/\partial x=0$，上式的最后一项为零。利用式（3.77）的坐标关系，容易得到

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\cos\phi, \tag{3.79a}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=-\frac{1}{r}\sin\phi \tag{3.79b}$$

因此有

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\cos\phi\frac{\partial T}{\partial r}-\frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi} \tag{3.80}$$

121

这个表达式可以用于替换式（3.72）中$\hat{\boldsymbol{x}}$的系数，经过类似的处理过程，可以将$\partial T/\partial y$表示为r和ϕ。再考虑到式（3.57a）、式（3.57b）的关系，即$\hat{\boldsymbol{x}}=\hat{\boldsymbol{r}}\cos\phi-\hat{\boldsymbol{\phi}}\sin\phi$和$\hat{\boldsymbol{y}}=\hat{\boldsymbol{r}}\sin\phi+\hat{\boldsymbol{\phi}}\cos\phi$，则式（3.72）变为

$$\nabla T=\hat{\boldsymbol{r}}\frac{\partial T}{\partial r}+\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial T}{\partial z}, \tag{3.81}$$

因此，在柱坐标系中的梯度运算符定义为

$$\nabla=\hat{\boldsymbol{r}}\frac{\partial}{\partial r}+\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}\quad（柱坐标） \tag{3.82}$$

经过类似的处理，得到球坐标系中的梯度运算符定义

$$\nabla=\hat{\boldsymbol{R}}\frac{\partial}{\partial R}+\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \theta}+\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\quad（球坐标） \tag{3.83}$$

3.5.2 梯度运算的性质

任何两个标量函数U和V，以下关系成立

（1）$\nabla(U+V)=\nabla U+\nabla V$, （3.84a）

（2）$\nabla(UV)=U\nabla V+V\nabla U$, （3.84b）

（3）$\nabla V^n=nV^{n-1}\nabla V$，对任何$n$ （3.84c）

在矢量微积分的规则中，矢量的梯度没有意义。

例3-10 梯度的计算

求下面每个标量函数的梯度，并计算在给定点的值。

（a）直角坐标系中：$V_1=24V_0\cos(\pi y/3)\sin(2\pi z/3)$，点$(3,2,1)$；

（b）柱坐标系中：$V_2=V_0e^{-2r}\sin 3\phi$，点$(1,\pi/2,3)$；

（c）球坐标系中：$V_3=V_0(a/R)\cos 2\theta$，点$(2a,0,\pi)$。

解答：（a）在直角坐标系中

$$\nabla V_1 = \hat{x}\frac{\partial V_1}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial V_1}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial V_1}{\partial z} = -\hat{y}8\pi V_0 \sin\frac{\pi y}{3}\sin\frac{2\pi z}{3} + \hat{z}16\pi V_0\cos\frac{\pi y}{3}\cos\frac{2\pi z}{3}$$

$$= 8\pi V_0\left[-\hat{y}\sin\frac{\pi y}{3}\sin\frac{2\pi z}{3} + \hat{z}2\cos\frac{\pi y}{3}\cos\frac{2\pi z}{3}\right]$$

在点(3,2,1)处

$$\nabla V_1 = 8\pi V_0\left[-\hat{y}\sin^2\frac{2\pi}{3} + \hat{z}2\cos^2\frac{2\pi}{3}\right] = \pi V_0[-\hat{y}6 + \hat{z}4]$$

(b) 函数 V_2是用柱坐标变量表示的，因此使用式（3.82）的∇

$$\nabla V_2 = \left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\phi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)V_0 e^{-2r}\sin 3\phi = -\hat{r}2V_0 e^{-2r}\sin 3\phi + \hat{\phi}(3V_0 e^{-2r}\cos 3\phi)/r$$

$$= \left[-\hat{r}2\sin 3\phi + \hat{\phi}\frac{3\cos 3\phi}{r}\right]V_0 e^{-2r}$$

在点(1,π/2,3)，$r=1,\phi=\pi/2$。因此

$$\nabla V_2 = \left[-\hat{r}2\sin\frac{3\pi}{2} + \hat{\phi}3\cos\frac{3\pi}{2}\right]V_0 e^{-2} = \hat{r}2V_0 e^{-2} = \hat{r}0.27V_0$$

(c) 因为 V_3是用球坐标变量表示的，因此使用式（3.83）的∇

$$\nabla V_3 = \left(\hat{R}\frac{\partial}{\partial R} + \hat{\theta}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\phi}\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)V_0\left(\frac{a}{R}\right)\cos 2\theta$$

122

$$= -\hat{R}\frac{V_0 a}{R^2}\cos 2\theta - \hat{\theta}\frac{2V_0 a}{R^2}\sin 2\theta = -[\hat{R}\cos 2\theta + \hat{\theta}2\sin 2\theta]\frac{V_0 a}{R^2}$$

在点(2a,0,π)，$R=2a$，$\theta=0$，所以

$$\nabla V_3 = -\hat{R}\frac{V_0}{4a}$$

■

M3.5-3.6

练习 3.7 给定 $V = x^2y + xy^2 + xz^2$。(a) 求 V 的梯度；(b) 计算其在点(1,−1,2)的值。
答案：(a) $\nabla V = \hat{x}(2xy + y^2 + z^2) + \hat{y}(x^2 + 2xy) + \hat{z}\,2xz$；(b) $\nabla V|_{(1,-1,2)} = \hat{x}3 - \hat{y} + \hat{z}4$。
(参见✹)

练习 3.8 求 $V = rz^2\cos 2\phi$ 沿 $\boldsymbol{A} = \hat{r}2 - \hat{z}$的方向导数，并计算其在点(1,π/2,2)的值。
答案：$(dV/dl)|_{(1,\pi/2,2)} = -4/\sqrt{5}$。(参见✹)

D3.1-3.9

3.6 矢量场的散度

通过第1章对库仑定律的简单介绍，大家知道一个孤立的正电荷 q 将在其周围空间产生电场 $\boldsymbol{E}$，其方向从正电荷本身向外，强度（幅值）正比于 q，并按 $1/R^2$ 的关系随其到电荷的距离 R 增加而减弱。当用图形表示时，矢量场通常用场线（field line）表示，如图 3-20 所示。场线的箭头表示所在位置场的方向，长度则表示场的幅值。

虽然电场矢量实际上并不运动，但仍将它的存在看成是在空间的一种流动，将其场线称为通量线（flux line）。在边界表面上，通量密度（flux density）定义为通

过 ds 往外每单位表面的通量

$$\boldsymbol{E}\text{ 的通量密度} = \frac{\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}}{|\mathrm{d}\boldsymbol{s}|} = \frac{\boldsymbol{E}\cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s} \tag{3.85}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{n}}$为面 d$\boldsymbol{s}$ 的外法向矢量。对于封闭表面 S，例如图 3-20 所描绘的假想球的封闭表面，通过它的总通量（total flux）定义为

$$\text{总通量} = \oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{3.86}$$

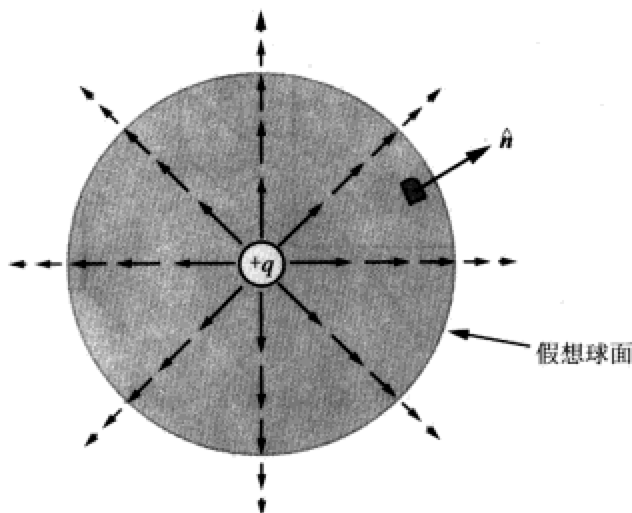


图 3-20　正电荷 q 产生的电场 $\boldsymbol{E}$ 的通量线

考虑一个微分长方体的情况，譬如一个立方体，其各边与直角坐标系的轴线一致，如图 3-21 所示。沿 x，y 和 z 轴的边长分别为 Δx，Δy 和 Δz。若长方体所在空间区域存在场矢量 $\boldsymbol{E}(x,y,z)$，下面来确定通过该长方体总表面 S 的 $\boldsymbol{E}$ 通量。要注意的是，S 包含 6 个面，需要将 6 个面的通量加在一起；另外，根据定义，通过任何面的通量，是指从体积 Δv 往外通过该面的通量。

将 $\boldsymbol{E}$ 表示为

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{x}}E_x + \hat{\boldsymbol{y}}E_y + \hat{\boldsymbol{z}}E_z \tag{3.87}$$

在图 3-21 中，标记为 1 的面积为 $\Delta y\Delta z$，其单位矢量为$\hat{\boldsymbol{n}}_1 = -\hat{\boldsymbol{x}}$。因此，经面 1 往外流出的通量 F_1 为 [123]

$$F_1 = \int_{\text{Face 1}} \boldsymbol{E}\cdot \hat{\boldsymbol{n}}_1 \mathrm{d}s = \int_{\text{Face 1}} (\hat{\boldsymbol{x}}E_x + \hat{\boldsymbol{y}}E_y + \hat{\boldsymbol{z}}E_z)\cdot(-\hat{\boldsymbol{x}})\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -E_x(1)\Delta y\Delta z, \tag{3.88}$$

其中，$E_x(1)$是在面 1 中心处的 E_x数值。在整个面 1 上，用中心点的数值来近似表示 E_x是合理的，因为所考虑的是很小的微分体积。

同样可得通过面 2($\hat{\boldsymbol{n}}_2 = \hat{\boldsymbol{x}}$)的通量为

$$F_2 = E_x(2)\Delta y\Delta z, \tag{3.89}$$

其中，$E_x(2)$是在面 2 中心处的 E_x数值。相隔 Δx 的微分间隔，$E_x(2)$同 $E_x(1)$的关系可表示为

$$E_x(2) = E_x(1) + \frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta x, \tag{3.90}$$

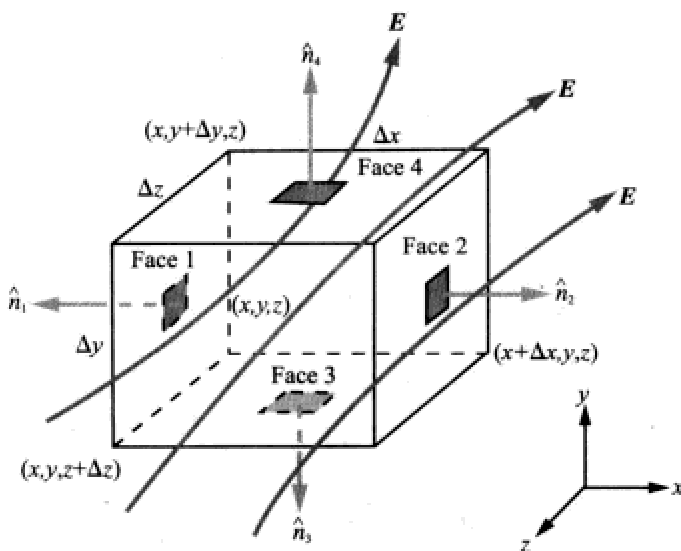


图 3-21 矢量场 $\boldsymbol{E}$ 通过体积为 $\Delta v = \Delta x\Delta y\Delta z$ 的微分长方体的通量线

其中忽略了 $(\Delta x)^2$项以及 Δx 更高阶的项，因为 Δx 很小，它们的影响小到可以不计。将式（3.90）代入式（3.89）得

$$F_2 = \left[E_x(1) + \frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta x\right]\Delta y\Delta z \tag{3.91}$$

将式（3.88）和式（3.91）相加，得到从面 1 和面 2 流出的通量和，即

$$F_1 + F_2 = \frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z \tag{3.92a}$$

对其他两对面重复同样的过程，得到

$$F_3 + F_4 = \frac{\partial E_y}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z, \tag{3.92b}$$

$$F_5 + F_6 = \frac{\partial E_z}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z \tag{3.92c}$$

将 F_1 到 F_6 的通量加在一起，得到通过长方体表面 S 的总通量为

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z = (\mathrm{div}\,\boldsymbol{E})\Delta v, \tag{3.93}$$

其中，$\Delta v = \Delta x\Delta y\Delta z$；div $\boldsymbol{E}$ 是一个微分函数，称为 $\boldsymbol{E}$ 的散度（divergence），在直角坐标系中定义为

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \tag{3.94}$$

124 令体积 Δv 趋向于零，从而得到 $\boldsymbol{E}$ 在一个点上的散度，它等于在一个封闭的增量表面中，每单位体积往外的净通量。因此，根据式（3.93），有

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} \triangleq \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\Delta v}, \tag{3.95}$$

其中，S 包围着体积增量 Δv。除了将 $\boldsymbol{E}$ 的散度表示为 $\operatorname{div} \boldsymbol{E}$ 外，更实用的表示方法是 $\nabla \cdot \boldsymbol{E}$。即，对于直角坐标系中的矢量 $\boldsymbol{E}$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} \triangleq \operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \tag{3.96}$$

在 3.6.2 小节将对这两种表示方法作进一步的讨论。

根据式（3.95）$\boldsymbol{E}$ 的散度定义，如果流出表面 S 的净通量是正的，则 $\boldsymbol{E}$ 具有正的散度，这可以看成是体积 Δv 中包含着一个产生通量的源（source）。如果散度是负的，则可以把 Δv 看成一个汇集点（sink），因为净通量是往 Δv 里面流的。对于均匀的场 $\boldsymbol{E}$，流入和流出 Δv 的通量相等，因此其散度为零。这种场称为*无散的*（divergenceless）。散度是一种微分运算，只能处理矢量，其结果为标量。这刚好与梯度相反，梯度只能处理标量，而结果却为矢量。本书书后插页给出了在柱坐标系以及球坐标系中矢量散度的表达式。

散度运算遵从分配律。对于任意一对矢量 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$，有

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2) = \nabla \cdot \boldsymbol{E}_1 + \nabla \cdot \boldsymbol{E}_2 \tag{3.97}$$

如果 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$，则称矢量场 $\boldsymbol{E}$ 为*无散的*（solenoidal）。

3.6.1 散度定理

可以把针对微分体积 Δv 的式（3.93）进行扩展，从而将 $\nabla \cdot \boldsymbol{E}$ 在任何体积 v 上的积分，同穿过该体积的表面 S 的 $\boldsymbol{E}$ 通量联系起来，即

$$\int_v \nabla \cdot \boldsymbol{E} \mathrm{d}v = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \quad \text{（散度定理）} \tag{3.98}$$

这一关系称为*散度定理*（divergence theorem），它在电磁学中应用十分广泛。

D3.10-3.15

3.6.2 符号说明

论述矢量分析的书都使用下面的一种或两种符号来表示梯度、散度和旋度。用语言符号表示时，标量 T 的梯度写成"grad T"，矢量 $\boldsymbol{E}$ 的散度和旋度写成"div $\boldsymbol{E}$"和"curl $\boldsymbol{E}$"。在麦克斯韦（James Clerk Maxwell）于 1873 年发表他的电与磁的经典论文几年之后，矢量分析尚没有出现，而美国数学家吉布斯（J. Wilard Gibbs）出版了两本题为"Elements of Vector Analysis"的小册子，从而开辟了矢量分析这一学科领域。在吉布斯的书中，引入了新的符号以表示散度和旋度，即用"$\nabla \cdot \boldsymbol{E}$"表示 div $\boldsymbol{E}$，用"$\nabla \times \boldsymbol{E}$"表示 curl $\boldsymbol{E}$。由于其符号的简洁性，吉布斯的表示方法很快被人们采用，当今的电磁学书籍几乎全部使用该符号。然而吉布斯的符号容易引起误解。在吉布斯的表示法中，"$\nabla \cdot \boldsymbol{E}$"表示矢量 $\boldsymbol{E}$ 的散度，这很容易被误解为运算符 ∇ 与矢量 $\boldsymbol{E}$ 的点积，尽管吉布斯本人并未对其赋予过这种解释。产生这种误解的原因在于，对由式（3.74）所定义的 ∇，以及由式（3.87）所定义的矢量 $\boldsymbol{E}$，当对二者按照点积的代数定义进行点积运算时，得出的结果同式（3.96）所给的 $\boldsymbol{E}$ 的散度表达式完全

125

相同。然而，这种“点积”解释存在两点最基本的错误。首先，将运算符∇当成矢量来处理就是不正确的，因为它不是矢量。早前已经指出，微分运算符本身没有物理意义，只有当它作用在一个物理量上之后，才具有了意义。这一点也许很细微，但却是基本概念问题。“点积”解释的第二个问题在于，在坐标变换中采用这种“点积”解释将引出错误结果，这是不可接受的，因为物理量的散度应该与坐标系的选取无关而保持相同。由于$\nabla\times\mathbf{E}$容易误解为∇和$\mathbf{E}$叉积，因此也存在类似的批评。

为了避免吉布斯符号的误解问题，美籍华人科学家戴振铎（C. T. Tai）[1]用$\nabla\mathbf{E}$来表示$\mathbf{E}$的散度，用$\nabla\mathbf{E}$来表示$\mathbf{E}$的旋度。但因为Tai提出的符号比较晚，其价值要被广泛认可还需要时间。因此，为了同传统一致，本书仍然使用吉布斯的符号，但要再次提醒读者，“∇·”和“∇×”决不表示“del”运算符同后面的矢量进行点积或叉积运算。

例3-11　计算散度

确定下面每个矢量场的散度，并求给定点的值。

(a) $\mathbf{E}=\hat{\mathbf{x}}\,3x^2+\hat{\mathbf{y}}\,2z+\hat{\mathbf{z}}x^2z$；点$(2,-2,0)$。

(b) $\mathbf{E}=\hat{\mathbf{R}}(a^3\cos\theta/R^2)-\hat{\boldsymbol{\theta}}(a^3\sin\theta/R^2)$；点$(a/2,0,\pi)$。

解答：

(a) $$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}(3x^2)+\frac{\partial}{\partial y}(2z)+\frac{\partial}{\partial z}(x^2z)=6x+0+x^2=x^2+6x$$

在点$(2,-2,0)$处，$\nabla\cdot\mathbf{E}\big|_{(2,-2,0)}=16$。

(b) 利用书后插页所给的球坐标系中的散度计算公式，有

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{E}&=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2E_R)+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(E_\theta\sin\theta)+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi}\\&=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(a^3\cos\theta)+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{a^3\sin^2\theta}{R^2}\right)=0-\frac{2a^3\cos\theta}{R^3}=-\frac{2a^3\cos\theta}{R^3}\end{aligned}$$

在$R=a/2$，$\theta=0$处，$\nabla\cdot\mathbf{E}\big|_{(a/2,0,\pi)}=-16$。■

M3.7-3.11

练习3.9　给定$\mathbf{A}=e^{-2y}(\hat{\mathbf{x}}\sin2x+\hat{\mathbf{y}}\cos2x)$，求$\nabla\cdot\mathbf{A}$。

答案：$\nabla\cdot\mathbf{A}=0$。（参见）

练习3.10　给定$\mathbf{A}=\hat{\mathbf{r}}r\cos\phi+\hat{\boldsymbol{\phi}}r\sin\phi+\hat{\mathbf{z}}3z$，求点$(2,0,3)$处的$\nabla\cdot\mathbf{A}$。

答案：$\nabla\cdot\mathbf{A}=6$。（参见）

练习3.11　在球坐标系中，如果$\mathbf{E}=\hat{\mathbf{R}}AR$，求通过以原点为圆心、半径为$a$的球面的$\mathbf{E}$的通量。

答案：$\oint_S\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=4\pi Aa^3$。（参见）

练习3.12　在练习3.11的由半径为a的球面所包围的体积内，计算场$\mathbf{E}$的散度的体

1. C. T. Tai, Generalized Vector and Dyadic Analysis, IEEE Press, New York, 1992, pp. 41 - 44。

积分，验证散度定理。

126

3.7 矢量场的旋度

到目前为止，讨论了矢量分析中常用的三个基本运算中的两个，即标量场的梯度和矢量场的散度。下面介绍*旋度运算*（curl operator）。矢量场 **B** 的旋度用于描述 **B** 的旋转特性，或叫*环量*（circulation）特性。对于闭合的路径 *C*，**B** 的环量定义为 **B** 沿 *C* 的积分，即

$$\text{环量}=\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} \tag{3.99}$$

为了了解这一定义的物理本质，分析两个例子。首先看均匀场 $\mathbf{B}=\hat{\mathbf{x}}B_0$，其场线如图 3-22a 所示。对于图中所示的矩形路径 *abcd*，有

$$\begin{aligned}\text{环量}&=\int_a^b \hat{\mathbf{x}}B_0\cdot\hat{\mathbf{x}}dx+\int_b^c \hat{\mathbf{x}}B_0\cdot\hat{\mathbf{y}}dy+\int_c^d \hat{\mathbf{x}}B_0\cdot\hat{\mathbf{x}}dx\\&\quad+\int_d^a \hat{\mathbf{x}}B_0\cdot\hat{\mathbf{y}}dy=B_0\Delta x-B_0\Delta x=0,\end{aligned} \tag{3.100}$$

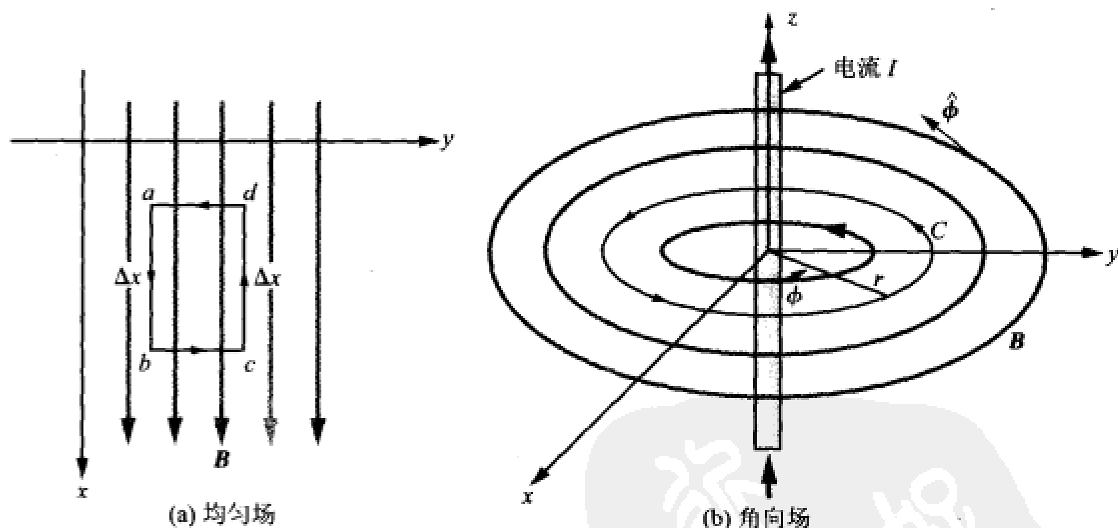


图 3-22 （a）均匀场的环量为零；（b）角向场的环量非零

其中，$\Delta x=b-a=c-d$，由于 $\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}}=0$，因此第二个和第四个积分为零。式（3.100）表明，均匀场的环量为零。

接下来考虑载有直流电流 *I* 的无穷长导线所产生的磁场 **B**。如果电流位于自由空间，且沿着 *z* 的方向，那么根据式（1.13）可得

$$\mathbf{B}=\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \tag{3.101}$$

其中，μ_0 是真空中的磁导率，*r* 是 *x*-*y* 平面中场点到电流的径向距离。**B** 沿着方位角的方向 $\hat{\boldsymbol{\phi}}$，**B** 的场线是围绕电流的同心圆，如图 3-22b 所示。对于半径为 *r* 的环形路径，微分长度矢量为 $d\mathbf{l}=\hat{\boldsymbol{\phi}}r\,d\phi$，**B** 绕 *C* 的环量为

127

$$\text{环量} = \oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_0^{2\pi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} r \, d\phi = \mu_0 I \tag{3.102}$$

在这个例子中，环量非零。但假如路径 C 所在的平面垂直于 x-y 平面的话，则 $d\boldsymbol{l}$ 将不含有 $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 的分量，积分所得的净环量将为零。换句话就是，$\boldsymbol{B}$ 的环量的幅值依赖于所选择的路径。另外，路径的方向确定了环量的正负符号。例如，假若要描述龙卷风，就应该选择风场的环量最大的路径，并希望环量既有幅度也有方向并且环量的方向能够指向龙卷风的漩涡，旋度运算就是为了描述这种性质而定义的。矢量场 $\boldsymbol{B}$ 的旋度，表示为 curl $\boldsymbol{B}$ 或 $\nabla \times \boldsymbol{B}$，定义为

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \text{curl}\, \boldsymbol{B} \triangleq \lim_{\Delta s \to 0} \frac{1}{\Delta s} \left[\hat{\boldsymbol{n}} \oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} \right]_{\max} \tag{3.103}$$

可见，curl $\boldsymbol{B}$ 是当路径 C 的面积 Δs 位于环量最大的方向时，每单位面积的环量。curl $\boldsymbol{B}$ 的方向为 $\hat{\boldsymbol{n}}$，即 Δs 的单位法向，由右手定则来确定，即：让右手四指沿着路径的方向 $d\boldsymbol{l}$ 绕行，则大拇指的方向就是 $\hat{\boldsymbol{n}}$，如图 3-23 所示。根据式（3.103）的旋度定义，环量的方向位于面 Δs 的法向，Δs 则趋向于 0，因此，矢量的旋度定义在一个点上的。在 3.6.2 已经指出，当使用符号 $\nabla \times \boldsymbol{B}$ 表示 curl $\boldsymbol{B}$ 时，不应该将其理解为 ∇ 同 $\boldsymbol{B}$ 的叉积。

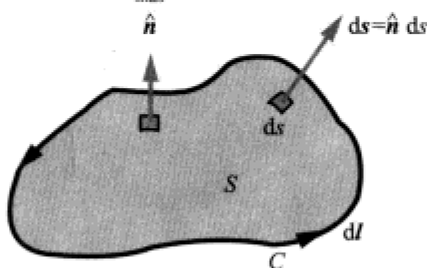


图 3-23　当右手四指沿 $d\boldsymbol{l}$ 绕行时，单位矢量 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 沿着大拇指的方向

对于在直角坐标系中给定的矢量 $\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{B} = \hat{\boldsymbol{x}} B_x + \hat{\boldsymbol{y}} B_y + \hat{\boldsymbol{z}} B_z \tag{3.104}$$

经过相当冗长、复杂的推导，由式（3.103）的定义可以得到

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \hat{\boldsymbol{x}} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + \hat{\boldsymbol{y}} \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + \hat{\boldsymbol{z}} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{3.105}$$

在本书的后插页中，列出了本章介绍的各种正交坐标系的 $\nabla \times \boldsymbol{B}$ 表达式。

3.7.1　旋度相关的矢量恒等式

对于任何两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$

（1）　$\nabla \times (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \nabla \times \boldsymbol{A} + \nabla \times \boldsymbol{B}$，　（3.106a）

（2）　$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$　（对任何矢量 $\boldsymbol{A}$），　（3.106b）

（3）　$\nabla \times (\nabla V) = 0$　（对任何标量函数 V）。　（3.106c）

128

恒等式（2）和（3）十分重要，在后面几章将会用到。

3.7.2　斯托克斯定理

斯托克斯定理（Stokes's Theorem）将矢量旋度在非封闭面 S 上的面积分，转换成该矢量沿面 S 的边界路径 C 的线积分。相应的几何关系如图 3-23 所示。斯托克斯

定理的数学表示如下

$$\int_S (\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \oint_C \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\quad（斯托克斯定理）, \tag{3.107}$$

它可以由$\nabla\times\boldsymbol{B}$定义，即式（3.103）推出。式（3.107）所表示的转换，在电磁问题求解中使用十分广泛。如果$\nabla\times\boldsymbol{B}=0$，则场$\boldsymbol{B}$称为保守的（conservative）或无旋的（irrotational），因为此时式（3.107）右边所代表的环量为零。

例 3-12 斯托克斯定理的验证

给定矢量场$\boldsymbol{B}=\hat{z}\cos\phi/r$。针对图3-24所示由$r=2$，$\pi/3\leqslant\phi\leqslant\pi/2$，$0\leqslant z\leqslant 3$确定的圆柱面的一段，验证斯托克斯定理。

解答：斯托克斯定理指出

$$\int_S (\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \oint_C \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

等式左端：$\boldsymbol{B}$仅仅只有一个分量$B_z=\cos\phi/r$，利用书后插页中的柱坐标系中的$\nabla\times\boldsymbol{B}$公式，可得

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{B} &= \hat{\boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial\phi}-\frac{\partial B_\phi}{\partial z}\right)+\hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\frac{\partial B_r}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial r}\right)+\hat{z}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rB_\phi)-\frac{\partial B_r}{\partial\phi}\right)\\ &=\hat{\boldsymbol{r}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{\cos\phi}{r}\right)-\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos\phi}{r}\right)=-\hat{\boldsymbol{r}}\frac{\sin\phi}{r^2}+\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{\cos\phi}{r^2}\end{aligned}$$

$\nabla\times\boldsymbol{B}$在给定的面$S$上的积分为

$$\begin{aligned}\int_S (\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} &= \int_{z=0}^{3}\int_{\phi=\pi/3}^{\pi/2}\left(-\hat{\boldsymbol{r}}\frac{\sin\phi}{r^2}+\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{\cos\phi}{r^2}\right)\cdot\hat{\boldsymbol{r}}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\\ &=\int_0^3\int_{\pi/3}^{\pi/2}-\frac{\sin\phi}{r}\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z=-\frac{3}{2r}=-\frac{3}{4},\end{aligned}$$

129

这里用到了$r=2$。

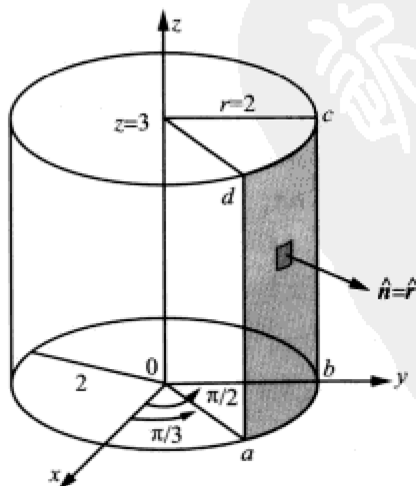


图 3-24 例 3-12 的几何配置

等式右端：面 S 以路径 $C=abcd$ 为边界，如图3-24所示。C 的方向与面 S 的法向 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 符合右手定则的要求。因此

$$\oint_C \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_a^b \boldsymbol{B}_{\mathrm{ab}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_b^c \boldsymbol{B}_{\mathrm{bc}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_c^d \boldsymbol{B}_{\mathrm{cd}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_d^a \boldsymbol{B}_{\mathrm{da}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l},$$

其中，$\boldsymbol{B}_{\mathrm{ab}}$、$\boldsymbol{B}_{\mathrm{bc}}$、$\boldsymbol{B}_{\mathrm{cd}}$、$\boldsymbol{B}_{\mathrm{da}}$ 分别是 ab、bc、cd、da 等几段路径上场 $\boldsymbol{B}$ 的表达式。在 ab 段上，$\boldsymbol{B}_{ab}=\hat{z}(\cos\phi)/2$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\hat{\boldsymbol{\phi}}r\,\mathrm{d}\phi$ 的点积为零；cd 段也是如此。在 bc 段，$\phi=\pi/2$，因此 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{bc}}=\hat{z}(\cos\pi/2)/2=0$。对于最后一段，$\boldsymbol{B}_{\mathrm{da}}=\hat{z}(\cos\pi/3)/2=\hat{z}/4$，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\hat{z}\mathrm{d}z$。因此

$$\oint_C \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_d^a \left(\hat{z}\frac{1}{4}\right)\cdot \hat{z}\mathrm{d}z = \int_3^0 \frac{1}{4}\mathrm{d}z = -\frac{3}{4},$$

这同斯托克斯定理等式左端的计算结果相同。■

练习3.13 对于在柱坐标系中给出的矢量场

$$\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{r}}10\mathrm{e}^{-2r}\cos\phi+\hat{z}10\sin\phi.$$

求 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 在点(2,0,3)处的值。

答案：（参见❁）

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\left(\hat{\boldsymbol{r}}\frac{10\cos\phi}{r}+\hat{z}\frac{10\mathrm{e}^{-2r}}{r}\sin\phi\right)\Bigg|_{(2,0,3)}=\hat{\boldsymbol{r}}5$$

练习3.14 对于球坐标系中的矢量场 $\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{\theta}}12\sin\theta$，求 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 在点 $(3,\pi/6,0)$ 处的值。

答案：（参见❁）

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{12\sin\theta}{R}\Bigg|_{(3,\pi/6,0)}=\hat{\boldsymbol{\phi}}2$$

3.8 拉普拉斯算子

在以后几章里，有时将遇到标量运算和矢量运算的多重组合的情况。其中最常见组合的是标量的梯度的散度。对于直角坐标系中的标量函数 V，其梯度为

$$\nabla V=\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial V}{\partial x}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial V}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial V}{\partial z}=\hat{\boldsymbol{x}}A_x+\hat{\boldsymbol{y}}A_y+\hat{z}A_z=\boldsymbol{A},\tag{3.108}$$

这里定义分量为 $A_x=\partial V/\partial x$，$A_y=\partial V/\partial y$，$A_z=\partial V/\partial z$ 的矢量 $\boldsymbol{A}$ 以代表 ∇V。∇V 的散度为

$$\nabla\cdot(\nabla V)=\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\tag{3.109}$$

为了方便，称 $\nabla\cdot(\nabla V)$ 为 V 的拉普拉斯（Laplacian），并表示为 $\nabla^2 V$（其中符号 ∇^2 读作"台尔平方"或"del square"）。即

$$\nabla^2 V \triangleq \nabla\cdot(\nabla V)=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\tag{3.110}$$

从式（3.110）可见，标量函数的拉普拉斯为标量。在柱坐标系以及求坐标系中的 $\nabla^2 V$ 表达式请查阅书后插页。

标量的拉普拉斯可以用于定义矢量的拉普拉斯。对于直角坐标系中的矢量 $\boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{x}}E_x+\hat{\boldsymbol{y}}E_y+\hat{z}E_z\tag{3.111}$$

$\boldsymbol{E}$ 的拉普拉斯定义为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{x}}\nabla^2 E_x + \hat{\boldsymbol{y}}\nabla^2 E_y + \hat{\boldsymbol{z}}\nabla^2 E_z. \tag{3.112}$$

因此，在直角坐标系中矢量的拉普拉斯为一个矢量，其分量等于原矢量分量的拉普拉斯。采用直接替换，可以证明

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}). \tag{3.113}$$

这一恒等式对后面几章很有用处。

复习题

Q3.11　一个标量的梯度之幅值和方向各代表什么？

Q3.12　在直角坐标系中，证明式（3.84c）

Q3.13　矢量场散度的物理意义是什么？

Q3.14　如果矢量场在空间一点是螺旋的，这是否表示矢量场在该点必须为0？为什么？

Q3.15　散度定理中转换的物理意义是什么？

Q3.16　矢量场在一点的旋度是如何同矢量场的环量相联系的？

Q3.17　斯托克斯定理中转换的物理意义是什么？

Q3.18　矢量场为保守场的条件是什么？

本章要点

- 矢量代数规定矢量的加法、减法和乘法规则，矢量微积分则包括矢量的微分和矢量的积分。
- 在右手正交坐标系中，在空间任何一点，三个基矢量都是两两互相正交的，规定基矢量叉积的循环关系，遵从右手定则。
- 两个矢量点积的结果为标量，而两个矢量叉积的结果却为另外一个矢量。
- 利用联系两个坐标系的坐标变换关系，可以将一个坐标系中表示的矢量，转换到另外一个坐标系中去表示。
- 矢量微积分中基本的微分函数是梯度、散度和旋度。
- 标量函数的梯度是矢量，其幅值等于该标量函数每单位距离最大的增长速率，其方向在沿着最大增长的方向。
- 矢量场的散度是通过封闭曲面流出到封闭体之外的每单位体积的净通量的一个测度。
- 散度定理将矢量场的体积分，转换成该矢量场的通量沿包围该体积的曲面的面积分。
- 矢量场的旋度是矢量场在每单位面积 Δs 上环量的一个测度，这里 Δs 选用环量最大的那个方向。
- 斯托克斯定理将矢量场旋度的面积分，转换成该矢量沿包围该曲面的路径的线积分。
- 标量函数的拉普拉斯定义为该函数梯度的散度。

重要术语汇总

给出下列术语的解释或定义

标量物理量	矢量物理量	幅值	单位矢量
基矢量	位置矢量	距离矢量	简单相乘
标量积或点积	矢量相乘或叉乘	正交坐标系	直角（笛卡尔）坐标系
柱坐标系	球坐标系	径向距离 r	方位角 ϕ
天顶角 θ	范围半径 R	梯度运算符	方向导数
通量线	通量密度	散度运算符	螺旋场（无散场）
散度定理	矢量的环量	旋度运算符	保守场
斯托克斯定理	拉普拉斯算子		

习题

3.2 矢量代数

3.1* 矢量 $\mathbf{A}$ 起始于点(1，-1，-2)，终了于点(2，-1,0)。求沿 $\mathbf{A}$ 方向的单位矢量。

3.2 给定矢量 $\mathbf{A}=\hat{\mathbf{x}}2-\hat{\mathbf{y}}3+\hat{\mathbf{z}}$，$\mathbf{B}=\hat{\mathbf{x}}2-\hat{\mathbf{y}}+\hat{\mathbf{z}}3$，以及 $\mathbf{C}=\hat{\mathbf{x}}4+\hat{\mathbf{y}}2-\hat{\mathbf{z}}2$，证明 $\mathbf{C}$ 垂直于 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$。

3.3* 在直角坐标系中，三角形的三个顶点为 $P_1(0,2,2)$、$P_1(2,-2,2)$、$P_3(1,1,-2)$。求三角形的面积。

3.4 给定 $\mathbf{A}=\hat{\mathbf{x}}2-\hat{\mathbf{y}}3+\hat{\mathbf{z}}1$，$\mathbf{B}=\hat{\mathbf{x}}B_x+\hat{\mathbf{y}}2+\hat{\mathbf{z}}B_z$

(a) 如果 $\mathbf{A}$ 平行于 $\mathbf{B}$，求 B_x 和 B_z。

(b) 如果 $\mathbf{A}$ 垂直于 $\mathbf{B}$，求 B_x 和 B_z 之间的关系。

3.5* 给定矢量 $\mathbf{A}=\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}2-\hat{\mathbf{z}}3$，$\mathbf{B}=\hat{\mathbf{x}}3-\hat{\mathbf{y}}4$，以及 $\mathbf{C}=\hat{\mathbf{y}}3-\hat{\mathbf{z}}4$，求

(a) A 和 $\hat{\mathbf{a}}$；

(b) $\mathbf{B}$ 沿 $\mathbf{C}$ 的分量；

(c) θ_{AC}；

(d) $\mathbf{A}\times\mathbf{C}$；

(e) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$；

(f) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$；

(g) $\hat{\mathbf{x}}\times\mathbf{B}$；

(h) $(\mathbf{A}\times\hat{\mathbf{y}})\cdot\hat{\mathbf{z}}$。

3.6 给定矢量 $\mathbf{A}=\hat{\mathbf{x}}2-\hat{\mathbf{y}}+\hat{\mathbf{z}}3$，$\mathbf{B}=\hat{\mathbf{x}}3-\hat{\mathbf{z}}2$，求幅值为6，垂直于 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的矢量 $\mathbf{C}$。

3.7* 给定 $\mathbf{A}=\hat{\mathbf{x}}(2x+3y)-\hat{\mathbf{y}}(2y+3z)+\hat{\mathbf{z}}(3x-y)$，求在点 $P(1,-1,2)$ 平行于 $\mathbf{A}$ 的单位矢量。

132

3.8 在直角坐标系中，采用展开的方法证明

(a) 式（3.29）所给的标量三重积关系；

(b) 式（3.33）所给的矢量三重积关系。

---

* 答案见附录D。

3.9* 求过直线 $x=1$，$z=2$ 上的任意一点，且指向原点的单位矢量的表达式。

3.10 求从 $z=2$ 平面上任意一点 $Q(x,y,2)$ 出发，指向 z 轴上点 $(0,0,h)$ 的单位矢量。

3.11* 求平行以下直线的一个单位矢量

$$2x-z=4$$

3.12 x-y 平面中的两直线为

直流 1：$x+2y=-6$

直线 2：$3x+4y=8$

使用矢量代数知识，求两直线相交处较小的角。

3.13* 给定直线

$$x+2y=4$$

求从原点出发，结束于该直线上某点 P，且同该直线正交的矢量 $\boldsymbol{A}$ 的表达式。

3.14 对于给定矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，证明

(a) 矢量 $\boldsymbol{B}$ 在矢量 $\boldsymbol{A}$ 方向的分量 $\boldsymbol{C}$ 为

$$\boldsymbol{C}=\hat{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{B}\cdot\hat{\boldsymbol{a}})=\frac{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A})}{|\boldsymbol{A}|^2},$$

其中，$\hat{\boldsymbol{a}}$是矢量 $\boldsymbol{A}$ 的单位矢量。

(b) 矢量 $\boldsymbol{B}$ 垂直于矢量 $\boldsymbol{A}$ 的分量 $\boldsymbol{D}$ 为

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{B}-\frac{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A})}{|\boldsymbol{A}|^2}$$

3.15* 某平面为

$$2x+3y+4z=16$$

求从原点出发垂直该平面的单位矢量。

3.16 给定 $\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{x}}(2z-3y)+\hat{\boldsymbol{y}}(2x-3z)-\hat{\boldsymbol{z}}(x+y)$，求在点 $P(1,0,-1)$ 处平行 $\boldsymbol{B}$ 的单位矢量。

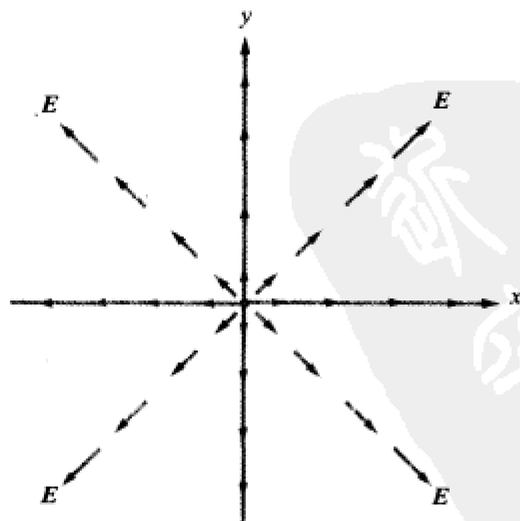


图 3-25　用箭头表示矢量场 $\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{r}}r$（习题 3.17）

* 在 CD-ROM 中有解答。

3.17 为了以图形的方式展示空间矢量场的变化，常常使用图3-25所示的箭头。其中，箭头的长度正比于场的强度，箭头的方向则沿着场的方向。图3-25表示的是矢量场 $\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{r}}r$，其箭头沿径向离开原点，箭头长度则随着离开原点的距离线性增加。采用同样的表示方法，画出下列矢量场的草图

133

(a) $\boldsymbol{E}_1=-\hat{\boldsymbol{x}}y$。

(b) $\boldsymbol{E}_2=\hat{\boldsymbol{y}}x$。

(c) $\boldsymbol{E}_3=\hat{\boldsymbol{x}}x+\hat{\boldsymbol{y}}y$。

(d) $\boldsymbol{E}_4=\hat{\boldsymbol{x}}x+\hat{\boldsymbol{y}}2y$。

(e) $\boldsymbol{E}_5=\hat{\boldsymbol{\phi}}r$。

(f) $\boldsymbol{E}_6=\hat{\boldsymbol{r}}\sin\phi$。

3.18 使用箭头画出下列矢量场的草图

(a) $\boldsymbol{E}_1=\hat{\boldsymbol{x}}x-\hat{\boldsymbol{y}}y$。

(b) $\boldsymbol{E}_2=-\hat{\boldsymbol{\phi}}$。

(c) $\boldsymbol{E}_3=\hat{\boldsymbol{y}}(1/x)$。

(d) $\boldsymbol{E}_4=\hat{\boldsymbol{r}}\cos\phi$。

3.3～3.4 坐标系

3.19* 将下列直角坐标点转换到柱坐标和球坐标

(a) $P_1(1,2,0)$。

(b) $P_2(0,0,3)$。

(c) $P_3(1,1,2)$。

(d) $P_4(-3,3,-3)$。

3.20 将下列柱坐标的点转换到直角坐标

(a) $P_1(2,\pi/4,-3)$。

(b) $P_2(3,0,0)$。

(c) $P_3(4,\pi,2)$。

3.21* 将下列球坐标的点转换到柱坐标

(a) $P_1(5,0,0)$。

(b) $P_2(5,0,\pi)$。

(c) $P_3(3,\pi/2,\pi)$。

3.22 采用适当的微分面积 ds 表达式，确定下列表面的面积，并绘出每个表面的草图

(a) $r=3$; $0\leqslant\phi\leqslant\pi/3$; $-2\leqslant z\leqslant 2$。

(b) $2\leqslant r\leqslant 5$; $\pi/2\leqslant\phi\leqslant\pi$; $z=0$。

(c) $2\leqslant r\leqslant 5$; $\phi=\pi/4$; $-2\leqslant z\leqslant 2$。

(d) $R=2$; $0\leqslant\theta\leqslant\pi/3$; $0\leqslant\phi\leqslant\pi$。

(e) $0\leqslant R\leqslant 5$; $\theta=\pi/3$; $0\leqslant\phi\leqslant 2\pi$。

3.23* 求以下区域的体积并绘出区域草图

(a) $2\leqslant r\leqslant 5$; $\pi/2\leqslant\phi\leqslant\pi$; $0\leqslant z\leqslant 2$。

(b) $0\leqslant R\leqslant 5$; $0\leqslant\theta\leqslant\pi/3$; $0\leqslant\phi\leqslant 2\pi$。

3.24 给定球的一部分为 $0\leqslant R\leqslant 2$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$，以及 $\pi/6\leqslant\phi\leqslant\pi/2$。画出草图并求

(a) 该区域的表面积。

(b) 包围的体积。

3.25* 在柱坐标系中描述的一个矢量场为

$$\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{r}}r\cos\phi+\hat{\boldsymbol{\phi}}r\sin\phi+\hat{\boldsymbol{z}}z^2$$

在圆柱 $r=4$ 上的一点 $P(4,\pi,2)$ 处，求

(a) 矢量 $\boldsymbol{E}$ 垂直于该圆柱的分量；

(b) 矢量 $\boldsymbol{E}$ 相切于该圆柱的分量。

134

3.26 在空间某给定点上，球坐标系中表示的矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别为

$$\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{R}}4+\hat{\boldsymbol{\theta}}2-\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\boldsymbol{B}=-\hat{\boldsymbol{R}}2+\hat{\boldsymbol{\phi}}3$$

求

(a) $\boldsymbol{B}$ 在 $\boldsymbol{A}$ 方向的投影，或标量分量；

(b) $\boldsymbol{B}$ 在 $\boldsymbol{A}$ 方向的矢量分量；

(c) $\boldsymbol{B}$ 垂直于 $\boldsymbol{A}$ 的矢量分量。

3.27* 给定矢量

$$\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{r}}(\cos\phi+3z)-\hat{\boldsymbol{\phi}}(2r+4\sin\phi)+\hat{\boldsymbol{z}}(r-2z)$$

$$\boldsymbol{B}=-\hat{\boldsymbol{r}}\sin\phi+\hat{\boldsymbol{z}}\cos\phi$$

求

(a) 在点 $(2,\pi/2,0)$ 处的 θ_{AB}；

(b) 在点 $(2,\pi/3,1)$ 处垂直 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的单位矢量。

3.28 求两点间的距离

(a) 直角坐标系中的 $P_1(1,2,3)$ 和 $P_2(-2,-3,2)$；

(b) 柱坐标系中的 $P_3(1,\pi/4,2)$ 和 $P_4(3,\pi/4,4)$；

(c) 球坐标系中的 $P_5(2,\pi/2,0)$ 和 $P_6(3,\pi,0)$。

3.29* 求两点间的距离

(a) $P_1(1,1,2)$ 和 $P_2(0,2,2)$；

(b) $P_3(2,\pi/3,1)$ 和 $P_4(4,\pi/2,0)$；

(c) $P_5(3,\pi,\pi/2)$ 和 $P_6(4,\pi/2,\pi)$。

3.30 将下列矢量转换到柱坐标系，并计算其在给定点的值

(a) $\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{x}}(x+y)$；$P_1(1,2,3)$。

(b) $\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{x}}(y-x)+\hat{\boldsymbol{y}}(x-y)$；$P_2(1,0,2)$。

(c) $\boldsymbol{C}=\hat{\boldsymbol{x}}y^2/(x^2+y^2)-\hat{\boldsymbol{y}}x^2(x^2+y^2)+\hat{\boldsymbol{z}}4$；$P_3(1,-1,2)$。

(d) $\boldsymbol{D}=\hat{\boldsymbol{R}}\sin\theta+\hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta+\hat{\boldsymbol{\phi}}\cos^2\phi$；$P_4(2,\pi/2,\pi/4)$。

(e) $\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{R}}\cos\phi+\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\phi+\hat{\boldsymbol{\phi}}\sin^2\theta$；$P_5(3,\pi/2,\pi)$。

3.31* 将下列矢量转换到球坐标系，并计算其在给定点的值

(a) $\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{x}}y^2+\hat{\boldsymbol{y}}xz+\hat{\boldsymbol{z}}4$；$P_1(1,-1,2)$。

(b) $\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{y}}(x^2+y^2+z^2)-\hat{\boldsymbol{z}}(x^2+y^2)$；$P_2(-1,0,2)$。

(c) $\boldsymbol{C}=\hat{\boldsymbol{r}}\cos\phi-\hat{\boldsymbol{\phi}}\sin\phi+\hat{\boldsymbol{z}}\cos\phi\sin\phi$；$P_3(2,\pi/4,2)$。

(d) $\boldsymbol{D}=\hat{\boldsymbol{x}}y^2/(x^2+y^2)-\hat{\boldsymbol{y}}x^2/(x^2+y^2)+\hat{\boldsymbol{z}}4$；$P_4(1,-1,2)$。

3.5～3.8 梯度、散度和旋度运算

3.32 求下列标量的梯度

(a) $T=2/(x^2+z^2)$。

(b) $V=xy^2z^3$。

(c) $U=z\cos\phi/(1+r^2)$。

(d) $W=e^{-R}\sin\theta$。

(e) $S=x^2e^{-z}+y^2$。

(f) $N=r^2\cos\phi$。

(g) $M=R\cos\theta\sin\phi$。

3.33* 已知标量函数 T 的梯度为

$$\nabla T=\hat{z}e^{-2z}$$

如果在 $z=0$ 处 $T=10$，求 $T(z)$。

135

3.34 按照推导式（3.82）的类似步骤，推导球坐标系中∇的表达式（3.83）。

3.35* 对于标量函数 $V=xy-z^2$，求其沿 $\mathbf{A}=(\hat{x}-\hat{y}z)$ 方向的方向导数，并计算其在点 $P(1,-1,2)$ 的值。

3.36 对于标量函数 $T=e^{-r/5}\cos\phi$，确定其沿着径向 $\hat{r}$ 的方向导数，并计算其在点 $P(2,\pi/4,3)$ 的值。

3.37* 对于给定的标量函数 $U=\frac{1}{R}\sin^2\theta$，确定其沿范围半径 $\hat{R}$ 方向的方向导数，并计算其在点 $P(4,\pi/4,\pi/2)$ 的值。

3.38 一个矢量场 $\mathbf{E}$ 具有以下特点：

(a) 沿着 $\hat{R}$ 方向；

(b) 幅值仅仅为到原点距离的函数；

(c) $\mathbf{E}$ 在原点消失；

(d) 任何地方都有 $\nabla\cdot\mathbf{E}=6$。求 $\mathbf{E}$ 的表达式。

3.39* 对于矢量场 $\mathbf{E}=\hat{x}xz-\hat{y}yz^2-\hat{z}xy$，计算以下内容以验证散度定理

(a) 流出立方体的总通量。该立方体以原点为中心，边长为2单位，各边平行直角坐标轴。

(b) 在该立方体中，$\nabla\cdot\mathbf{E}$ 的体积分。

3.40 对于矢量场 $\mathbf{E}=\hat{r}\,10e^{-r}-\hat{z}\,3z$，应用 $r=2$，$z=0$，$z=4$ 的圆柱区域验证散度定理。

3.41* 已知矢量场 $\mathbf{D}=\hat{r}r^3$，存在于两同心圆柱体 $r=1$ 和 $r=2$ 之间，往上延伸到 $z=5$，往下延伸到 $z=0$ 的区域。通过计算以下值验证散度定理

(a) $\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}$；

(b) $\int_v \nabla\cdot\mathbf{D}\,dv$。

3.42 已知矢量场 $\mathbf{D}=\hat{R}3R^2$，针对位于 $R=1$ 和 $R=2$ 之间的球壳区域，计算散度定理两端的值。

3.43* 已知矢量场 $\mathbf{E}=\hat{x}xy-\hat{y}(x^2+2y^2)$，计算

(a) 沿图3-26a所示三角形路径的 $\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$；

(b) 该三角形区域的 $\int_S (\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot d\boldsymbol{s}$。

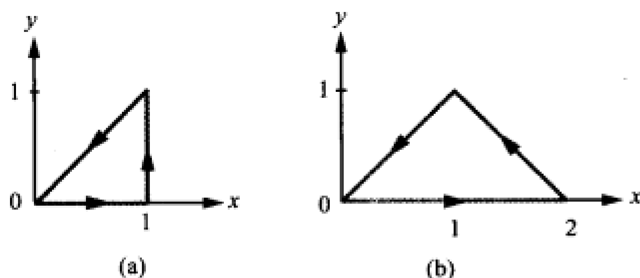


图 3-26 (a) 习题 3.43 以及 (b) 习题 3.44 的路径

3.44 利用图 3-26b 的路径，重算习题 3.43。

3.45* 已知矢量场

136

$$\boldsymbol{B} = (\hat{\boldsymbol{r}} r\cos\phi + \hat{\boldsymbol{\phi}}\sin\phi)$$

计算以下积分以验证斯托克斯定理

(a) 沿图 3-27a 所示的半圆路径的 $\oint_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}$；

(b) 该半圆区域的 $\int_S (\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{s}$。

3.46 利用图 3-27b 的路径，重做习题 3-45。

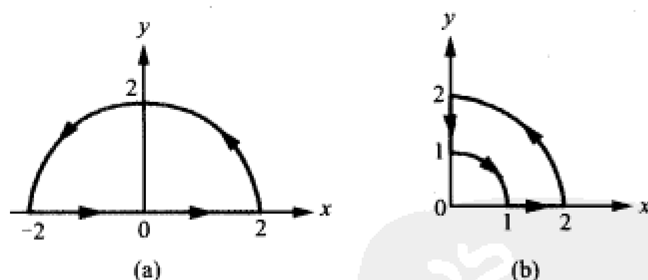


图 3-27 (a) 习题 3.45 以及 (b) 习题 3.46 的路径

3.47 利用矢量场 $\boldsymbol{A} = \hat{\boldsymbol{R}}\cos\theta + \hat{\boldsymbol{\phi}}\sin\theta$，在单位半径的半球区域上验证斯托克斯定理。

3.48* 判断以下矢量场是有旋的？还是保守的？抑或两者都是？

(a) $\boldsymbol{A} = \hat{\boldsymbol{x}}\,2xy - \hat{\boldsymbol{y}}y^2$。

(b) $\boldsymbol{B} = \hat{\boldsymbol{x}}x^2 - \hat{\boldsymbol{y}}y^2 + \hat{\boldsymbol{z}}\,2z$。

(c) $\boldsymbol{C} = \hat{\boldsymbol{r}}(\sin\phi)/r^2 + \hat{\boldsymbol{\phi}}(\cos\phi)/r^2$。

(d) $\boldsymbol{D} = \hat{\boldsymbol{R}}/R$。

(e) $\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{r}}[3 - r/(1+r)] + \hat{\boldsymbol{z}}z$。

(f) $\boldsymbol{F} = (\hat{\boldsymbol{x}}y + \hat{\boldsymbol{y}}x)/(x^2+y^2)$。

(g) $\boldsymbol{G} = \hat{\boldsymbol{x}}(x^2+z^2) + \hat{\boldsymbol{y}}(y^2+x^2) + \hat{\boldsymbol{z}}(y^2+z^2)$。

(h) $\boldsymbol{H} = \hat{\boldsymbol{R}}(Re^{-R})$。

3.49 求下列标量函数的拉普拉斯

(a) $V = xy^2z^3$。

(b) $V = xy + yz + zx$。

(c) $V = 1/(x^2 + y^2)$。

(d) $V = 5e^{-r}\cos\phi$。

(e) $V = 10e^{-R}\sin\theta$。

137

3.50 ~ 3.56 附加习题，包括题目及完整解答见光盘。

第4章 静 电 学

4.1 麦克斯韦方程组

现代电磁学是以四个基本关系，即麦克斯韦方程组（Maxwell's equations）为基础的

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_v, \tag{4.1a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{4.1b}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{4.1c}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \tag{4.1d}$$

其中，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 是电场量，二者的关系为 $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$，$\varepsilon$ 为材料的介电常数；$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 是磁场量，二者的关系为 $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$，$\mu$ 为材料的磁导率；ρ_v 是单位体积中的电荷，即电荷体密度；$\boldsymbol{J}$ 是单位面积中的电流，即电流面密度。场量 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{B}$ 以及 $\boldsymbol{H}$ 已经在1.3节介绍过，而 ρ_v 和 $\boldsymbol{J}$ 则将在4.2节中介绍。该方程组在任何媒介，包括自由空间（真空），以及任何空间位置(x,y,z)都成立，并且一般来讲，其中所有的物理量都可以是时间 t 的函数。这组方程发表在麦克斯韦1873年的一篇经典论文中，它建立了第一个电和磁的统一理论。麦克斯韦方程组是从高斯、安培、法拉第以及其他科学家的实验观测结果中推导出来的，它不仅包括了电场和电荷之间、磁场和电流之间的关系，而且定义了电场量和磁场量之间的双边耦合。同其他辅助关系一起，麦克斯韦方程组构成了电磁理论的基本骨架。

在静态情况下，在麦克斯韦方程组中的所有物理量都与时间无关（即 $\partial/\partial t = 0$）。发生这种情况，要求所有的电荷永久固定在空间里，假使它们要运动的话，也应该以恒定的速率运动，保持 ρ_v 和 $\boldsymbol{J}$ 不随时间变化。这时，式（4.1b）和式（4.1d）中的 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 的时间导数变成了零，麦克斯韦方程组退化为静电学方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_v, \tag{4.2a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{4.2b}$$

以及静磁学方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{4.3a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{4.3b}$$

也就是说，麦克斯韦的四个方程分离成了无耦合的两对方程，其中第一对仅仅涉及电场量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$，第二对仅仅同磁场量 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 有关。电场和磁场在静态情况下不再有相互联系。这就允许将电和磁作为两种根本不同的现象分开进行研究，只要电荷及电流在空间的分布保持不变就行了。在静态情况下对电现象以及对磁现象进行的研

究，分别称为静电学和静磁学。静电学是本章的主题，而第5章则学习静磁学。相比时变场、时变电荷密度与电流等内容，静电学、静磁学是比较简单的，先对它们进行学习和体验，对于后面章节难度较大的时变问题的学习将是极有助益的。

学习静电场的目的，不仅在于它是学习时变场的一个前奏，而且因为它本身就是一个重要的学科领域。许多电子设备和系统是以静电学的原理为基础的，如x光机、示波器、喷墨静电打印机、液晶显示器、复印机、电容式键盘和许多固态控制设备。静电学也用于医学诊断设备的传感器设计，如心电图仪（用于记录心脏泵血的模式）和脑电图仪（用于记录脑部活动）等。在大量工业应用领域，静电学也得到了应用。

4.2 电荷与电流的分布

在电磁学中，将遇到各种形式的电荷分布，如果电荷是运动的，则构成电流分布。电荷可以分布于空间体积区域，也可以沿面、沿线分布。

4.2.1 电荷密度

在原子尺度里，材料的电荷分布是离散的，即电荷只存在于电子和原子核处，而不存在于任何其他地方。但电磁学中所研究的现象，其尺度往往要大得多，典型的尺度要比相邻原子的间隔大3个数量级甚至更多。在这种宏观尺度里，可以不管电荷分布的离散性质，而将单元体积 Δv 中的净电荷看成是均匀分布的。因此定义体**电荷密度**（volume charge density）ρ_v 为

$$\rho_v = \lim_{\Delta v\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta v} = \frac{dq}{dv} \quad (\mathrm{C/m^3}), \tag{4.4}$$

其中，Δq 是 Δv 中包含的电荷。通常，ρ_v 定义在空间一点，其直角坐标为(x,y,z)，对应于时间 t。因此有 $\rho_v=\rho_v(x,y,z,t)$。从物理上讲，ρ_v 表示的是以(x,y,z)为中心 Δv 中每单位体积的平均电荷，体积 Δv 大到足以容纳大量原子，但在宏观上相对所研究的问题其体积又小到可以看成一个点的区域。ρ_v 随空间位置的变化称为电荷的**空间分布**（spatial distribution），或简称**分布**（distribution）。包含在给定体积 v 中的总电荷为

$$Q = \int_v \rho_v \, dv \quad (\mathrm{C}) \tag{4.5}$$

在有些情况下，尤其是在处理导体时，电荷可能沿着材料的表面分布。这时，相关的量是**面电荷密度**（surface charge density）ρ_s，定义为

$$\rho_s = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta s} = \frac{dq}{ds} \quad (\mathrm{C/m^2}), \tag{4.6}$$

其中，Δq 是单元面 Δs 上的电荷。类似地，如果电荷是沿线（不一定要直线）分布的，则将这种分布称为**线电荷密度**（line charge density）ρ_l，定义如下

$$\rho_l = \lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl} \quad (\mathrm{C/m}) \tag{4.7}$$

例4-1 线电荷分布

计算图4-1a所示沿 z 轴的圆柱管所包含的总电荷 Q。线电荷密度为 $\rho_l=2z$，z 为

到管底部的距离，单位为 m。管长为 10cm。

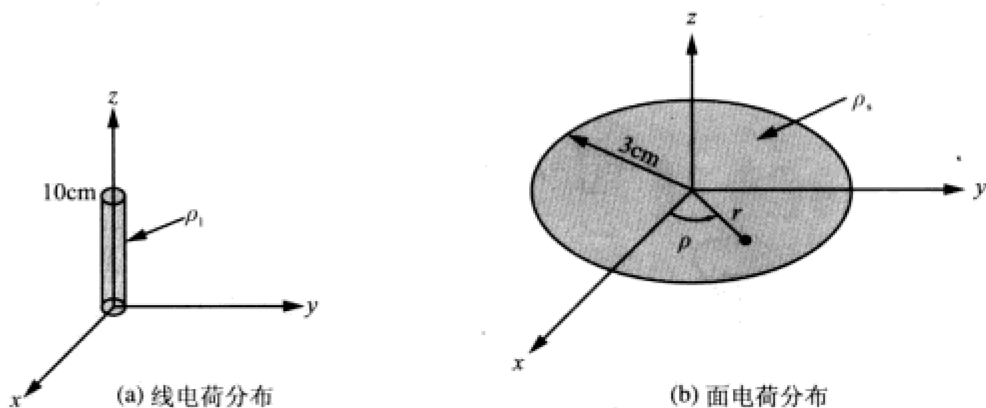


图 4-1 例 4-1、4-2 的电荷分布

解答：总电荷 Q 为

$$Q=\int_0^{0.1}\rho_l \mathrm{d}z=\int_0^{0.1}2z\mathrm{d}z=z^2\Big|_0^{0.1}=10^{-2}(\mathrm{C})$$ ■

例 4-2 面电荷分布

圆盘形电荷分布如图 4-1b 所示，分布具有轴对称特点，在中心点（$r=0$）密度为 0，在边沿（$r=3\mathrm{cm}$）处，密度线性增加到 $6\mathrm{C/m^2}$。求圆盘表面的总电荷。

解答：由于 ρ_s 关于方位角 ϕ 对称，因此仅仅是 r 的函数，即

$$\rho_s=\frac{6r}{3\times10^{-2}}=2\times10^2 r\quad(\mathrm{C/m^2})$$

其中，r 的单位是 m。在极坐标系中，单元面积为 $\mathrm{d}s=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$，而对于图 4-1b 中的圆盘，其 ϕ 的积分限为从 $0\sim2\pi$ 弧度，r 则从 $0\mathrm{m}\sim3\times10^{-2}\mathrm{m}$，所以

$$\begin{aligned}Q&=\int_S\rho_s\mathrm{d}s=\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{3\times10^{-2}}(2\times10^2 r)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\\&=2\pi\times2\times10^2\frac{r^3}{3}\Big|_0^{3\times10^{-2}}=11.31\quad(\mathrm{mC})\end{aligned}$$ ■

练习 4.1 正方形盘位于 $x-y$ 平面，限定在 $-3\mathrm{m}\leqslant x\leqslant3\mathrm{m}$ 和 $-3\mathrm{m}\leqslant y\leqslant3\mathrm{m}$ 的范围中。如果面电荷密度为 $\rho_s==4y^2(\mu\mathrm{C/m^2})$，求盘中的总电荷。

答案：$Q=0.432(\mathrm{mC})$。（参见）

练习 4.2 中心在原点，内外分别延展到 $R=2\mathrm{cm}$ 和 $R=3\mathrm{cm}$ 的球壳，分布有体电荷密度 $\rho_v=3R\times10^{-4}(\mathrm{C/m^3})$，求球壳的总电荷。

答案：$Q=0.61(\mathrm{nC})$。（参见）

4.2.2 电流密度

在图 4-2a 的圆管中装有电荷，其体电荷密度为 ρ_v，电荷沿着圆管的轴线以 $\boldsymbol{u}$ 的平均速度运动。在 Δt 的时间内，电荷移动的距离为 $\Delta l=u\Delta t$。因此在 Δt 时间内，通过圆管横截面 $\Delta s'$ 的电荷数量为

$$\Delta q'=\rho_v\Delta v=\rho_v\Delta l\Delta s'=\rho_v u\Delta s'\Delta t\qquad(4.8)$$

现在考虑电荷经过的表面 Δs 的法向 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 与电荷速度 $\boldsymbol{u}$ 不一定平行的一般情况，如图 4-2b 所示。这时，流过 Δs 的电荷 Δq 为

$$\Delta q=\rho_v \boldsymbol{u}\cdot\Delta \boldsymbol{s}\Delta t, \tag{4.9}$$

对应的电流为

$$\Delta I=\frac{\Delta q}{\Delta t}=\rho_v \boldsymbol{u}\cdot\Delta \boldsymbol{s}=\boldsymbol{J}\cdot\Delta \boldsymbol{s}, \tag{4.10}$$

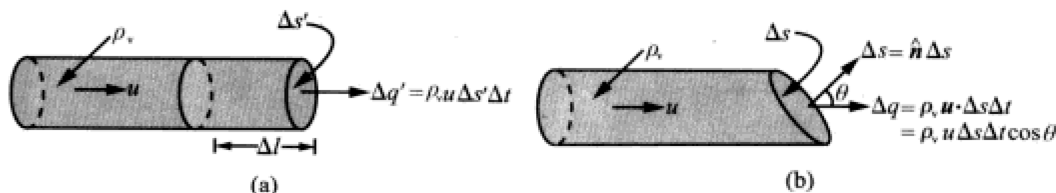


图 4-2　电荷以速度 $\boldsymbol{u}$ 流过截面；(a) $\Delta s'$，(b) $\Delta \boldsymbol{s}$

其中，

$$\boldsymbol{J}=\rho_v \boldsymbol{u}\quad (\text{A/m}^2) \tag{4.11}$$

定义为*电流密度*（current density），单位为 A/m²。对于任意的截面 S，流过它的总电流为

$$I=\int_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{s}\quad (\text{A}) \tag{4.12}$$

当电流由带电物质的实际运动产生时，称为*对流电流*或*运流电流*（convection current），而 $\boldsymbol{J}$ 则称为*运流电流密度*（convection current density）。例如，随风运动的带电云，就产生运流电流。在有些情况下，构成运流电流的充电物质，是完全由一种带电粒子组成的，例如阴极射线管（电视机的显像管以及计算机的显示器）的电子束就是由电子构成的。

传导电流（conduction current）则不同，其导电媒介的原子是不动的。例如，在金属线中，正电荷（位于原子核）的数量等于负电荷（位于原子的电子云中）的数量。所有的正电荷以及绝大部分的负电荷不能移动，只有原子电子云最外层中的电子，才容易在导线两端外施电压的情况下，从一个原子推压到相邻的原子中。电子从一个原子到另外一个原子的这种运动，构成了传导电流。从导线一端中出来的电子，不一定就是从导线的另外一端进去的电子。

由于两种电流产生的物理机制不同，传导电流遵从欧姆定律，而运流电流不遵从。4.7 节将对传导电流作更详细的讨论。

142

复习题

Q4.1　在静态条件下，麦克斯韦方程组会出现何种特点？其意义何在？

Q4.2　电流密度 $\boldsymbol{J}$ 和体电荷密度 ρ_v 的关系是怎样的？

Q4.3　运流电流与传导电流的差别是什么？

4.3　库仑定律

本章的一个主要目标，就是要建立电场强度 $\boldsymbol{E}$（以及相关的电通量密度 $\boldsymbol{D}$）与

任意给定的电荷分布之间的关系表达式。但讨论将仅限于静态电荷分布产生静态电场的情况。

在 1.3.2 节中，我们以库仑实验关于电荷间互相作用电场力的结论为基础，引出了电场，并对其进行了定义。库仑定律（Coulomb's law）最初仅仅适用于真空中的电荷，后来才推广到一般材料的媒介中，其主要结论如下：

（1）孤立的电荷 q 在空间每点产生电场 $\boldsymbol{E}$，在任何给定的点 P，$\boldsymbol{E}$ 由下式给定

$$\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{R}}\frac{q}{4\pi\varepsilon R^2}\quad(\text{V/m}),\tag{4.13}$$

这里，$\hat{\boldsymbol{R}}$ 是由 q 指向 P 的单位矢量（图 4-3），R 是这两点间的距离，ε 则是包含观测点 P 的媒质的介电常数；

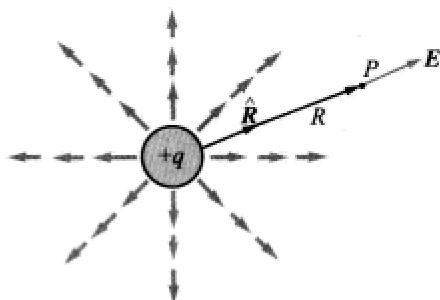


图 4-3　点电荷 q 的电场线

（2）如果在空间给定点存在电场 $\boldsymbol{E}$（它可以由单个电荷产生的，也可以由许多电荷分布产生），那么当测试电荷 q' 放在该点时，电场作用在测试电荷上的力为

$$\boldsymbol{F}=q'\boldsymbol{E}\quad(\text{N}).\tag{4.14}$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 的单位为牛顿（N），q' 的单位为库仑（C），$\boldsymbol{E}$ 的单位为（N/C）。在 4.5 节将证明，N/C 同伏特每米（V/m）是相等的。

对于介电常数为 ε 的材料，电场量 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的关系为

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}\tag{4.15}$$

其中，

$$\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0,\tag{4.16}$$

这里，

$$\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}\approx(1/36\pi)\times10^{-9}\quad(\text{F/m})$$

为真空中的介电常数，而 $\varepsilon_r=\varepsilon/\varepsilon_0$ 则称为该材料的相对电容率（relative permittivity），或相对介电常数（dielectric constant）。对于大多数材料，在大多数情况下，ε 是与 $\boldsymbol{E}$ 的幅值和方向无关的常数。如果 ε 与 $\boldsymbol{E}$ 的幅值无关，则称材料为线性的，因为 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 被线性关联；而如果 ε 与 $\boldsymbol{E}$ 的方向无关，则称材料为各向同性的（isotropic）。材料通常不会表现出非线性的介电常数特性，除非 $\boldsymbol{E}$ 的幅值特别高（接近介质将要击穿的条件，这将在 4.8 节讨论），而各向异性特性则更是仅限于少数几种具有特殊晶格结构的材料。所以，除了以上十分特殊的情况，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 中实际上有一个是多余的；对于给定 ε 的材料，已知 $\boldsymbol{D}$ 或者 $\boldsymbol{E}$ 中的任何一个，都足以确定其中的另外

143

一个。

4.3.1 多个点电荷产生的电场

式（4.13）所给单个点电荷的电场 $\boldsymbol{E}$ 表达式，可扩展到用于求多个点电荷的电场。先从两个点电荷的情况开始，如图 4-4 所示，假定点电荷 q_1、q_2 分别位于 $\boldsymbol{R}_1$ 和 $\boldsymbol{R}_2$ 所对应的位置，$\boldsymbol{R}_1$ 和 $\boldsymbol{R}_2$ 是从给定坐标系的原点出发的位置矢量。欲计算位于点 P 的电场 E，其位置矢量为 $\boldsymbol{R}$。在点 P，由 q_1 单独产生的电场 $\boldsymbol{E}_1$，可以通过将式（4.13）中的 R，即 q_1 到 P 间的距离，用 $|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_1|$ 来替换，将单位矢量 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 用 $(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_1)/|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_1|$ 来替换而得到。因此有

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{q_1(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_1)}{4\pi\varepsilon|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_1|^3}\quad(\mathrm{V/m})\tag{4.17a}$$

同样可以得到 q_2 单独产生的电场为

$$\boldsymbol{E}_2=\frac{q_2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_2)}{4\pi\varepsilon|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_2|^3}\quad(\mathrm{V/m})\tag{4.17b}$$

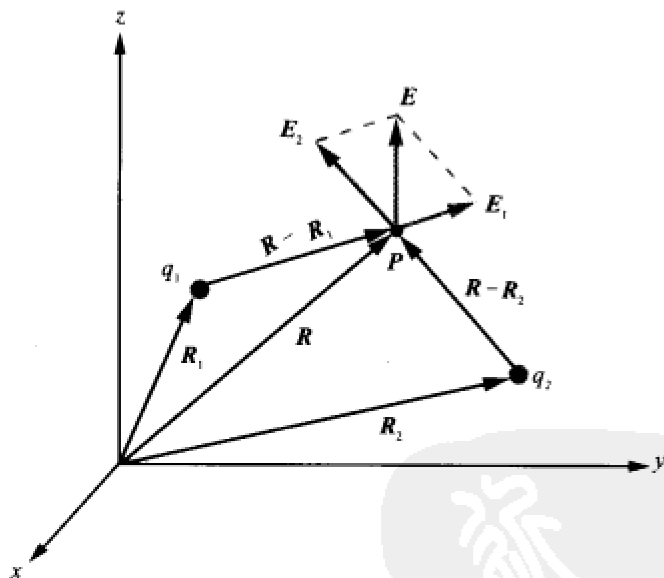


图 4-4 两个点电荷在点 P 产生的电场 $\boldsymbol{E}$ 等于 $\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{E}_2$ 的矢量和

电场遵从线性叠加原理，因此空间任意点的总电场，等于各点电荷单独产生的电场的矢量和。在两点电荷的情况下总电场为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{q_1(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_1)}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_1|^3}+\frac{q_2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_2)}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_2|^3}\right]\tag{4.18}$$

将以上结果推广到 N 个点电荷的情况，位于位置矢量 $\boldsymbol{R}_1$、$\boldsymbol{R}_2$、…、$\boldsymbol{R}_N$ 等 N 个点处，电荷分别为 q_1、q_2、…、q_N 的 N 个点电荷，其在位置矢量 $\boldsymbol{R}$ 处产生的电场 $\boldsymbol{E}$ 为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_i)}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_i|^3}\quad(\mathrm{V/m})\tag{4.19}$$

例 4-3 两个点电荷产生的电场

在真空直角坐标系的点(1,3,-1)和(-3,1,-2)有两个点电荷，分别为 $q_1=2\times10^{-5}$C 和 $q_2=-4\times10^{-5}$C，求（a）在点(3,1,-2)处的电场；（b）点电荷 8×10^{-5}C 在该点所受的力（各距离的单位为 m）。 144

解答：(a) 根据式 (4.18)，在 $\varepsilon=\varepsilon_0$（真空中）处，电场 $\boldsymbol{E}$ 为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[q_1\frac{(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_1)}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_1|^3}+q_2\frac{(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_2)}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_2|^3}\right]\qquad(\mathrm{V/m})$$

其中矢量 $\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2,\boldsymbol{R}$ 分别为

$$\boldsymbol{R}_1=\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{y}}3-\hat{\boldsymbol{z}},$$
$$\boldsymbol{R}_2=-\hat{\boldsymbol{x}}3+\hat{\boldsymbol{y}}-\hat{\boldsymbol{z}}2,$$
$$\boldsymbol{R}=\hat{\boldsymbol{x}}3+\hat{\boldsymbol{y}}-\hat{\boldsymbol{z}}2.$$

因此，

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2(\hat{\boldsymbol{x}}2-\hat{\boldsymbol{y}}2-\hat{\boldsymbol{z}})}{27}-\frac{4(\hat{\boldsymbol{x}}6)}{216}\right]\times10^{-5}=\frac{\hat{\boldsymbol{x}}-\hat{\boldsymbol{y}}4-\hat{\boldsymbol{z}}2}{108\pi\varepsilon_0}\times10^{-5}\qquad(\mathrm{V/m})$$

(b)

$$\boldsymbol{F}=q_3\boldsymbol{E}=8\times10^{-5}\times\frac{\hat{\boldsymbol{x}}-\hat{\boldsymbol{y}}4-\hat{\boldsymbol{z}}2}{108\pi\varepsilon_0}\times10^{-5}=\frac{\hat{\boldsymbol{x}}2-\hat{\boldsymbol{y}}8-\hat{\boldsymbol{z}}4}{27\pi\varepsilon_0}\times10^{-10}\qquad(\mathrm{N})$$ ■

 **M4.1-4.7**

练习 4.3 四个 10μC 的电荷分别位于真空中直角坐标系中的（-3,0,0），(3,0,0)，(0,-3,0)，以及(0,3,0)点。求位于点(0,0,4)处大小为 20μC 的电荷上的受力。所有距离单位均为 m。

答案：$\boldsymbol{F}=\hat{\boldsymbol{z}}0.23$(N)。(参见●)

练习 4.4 两个相同的电荷分别位于 x 轴上的点 $x=3$ 和 $x=7$ 处。在哪个点上的净电场力为零？

答案：点(5,0,0)。(参见●)

练习 4.5 在氢原子中，电子同质子间的平均距离为 5.3×10^{-11}m，求二者之间的电场力 F_e，并与二者间的引力 F_g 比较。

答案：$F_e=8.2\times10^{-8}$N；$F_g=3.6\times10^{-47}$N。(参见●)

 **D4.1-4.5**

4.3.2 分布电荷产生的电场

下面将离散点电荷产生的电场结果，扩展到连续电荷分布的情况。对于图 4-5 所示的体积 v'，分布有体电荷密度 ρ_v，其大小可以随空间位置变化。由微分体积 $\mathrm{d}v'$中所包含的微分电荷 $\mathrm{d}q=\rho_v\mathrm{d}v'$在点 P 产生的微分电场为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{R}}'\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon R'^2}=\hat{\boldsymbol{R}}'\frac{\rho_v\mathrm{d}v'}{4\pi\varepsilon R'^2}\qquad(4.20)$$

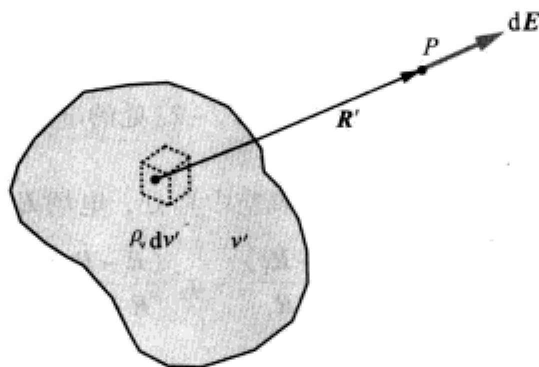


图 4-5 电场取决于体电荷分布

145 其中 $\boldsymbol{R}'$ 是从微分体积 $\mathrm{d}v'$ 到点 P 的距离。根据线性叠加原理，对组成电荷分布的各电荷的电场进行积分，即可得到总电场。即

$$\boldsymbol{E}=\int_{v'}\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{v'}\hat{\boldsymbol{R}}'\frac{\rho_v\mathrm{d}v'}{R'^2}\quad(\text{体电荷分布})\tag{4.21a}$$

必须注意的是，在积分的体积 v' 上，R' 和 $\hat{\boldsymbol{R}}'$ 通常都是随位置变化的函数。

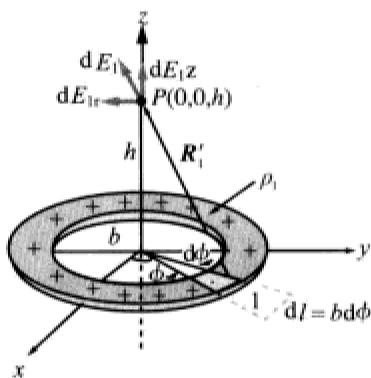
如果电荷沿面 S' 分布，面密度为 ρ_s，则 $\mathrm{d}q=\rho_s\mathrm{d}s'$；而如果电荷沿线 l' 分布，线电荷密度为 ρ_l，则 $\mathrm{d}q=\rho_l\mathrm{d}l'$。对应这两种情况，分别有

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{S'}\hat{\boldsymbol{R}}'\frac{\rho_s\mathrm{d}s'}{R'^2}\quad(\text{面电荷分布})\tag{4.21b}$$

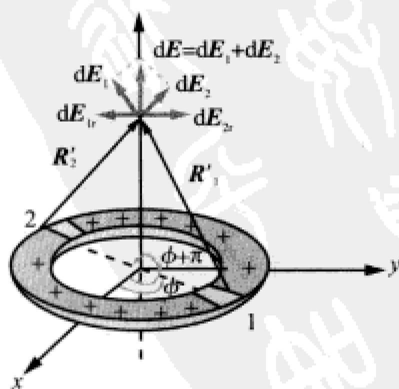
$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{l'}\hat{\boldsymbol{R}}'\frac{\rho_l\mathrm{d}l'}{R'^2}\quad(\text{线电荷分布})\tag{4.21c}$$

例 4-4 环形分布电荷的电场

半径为 b 的圆环，其上均匀分布有正极性的线电荷密度 ρ_l。圆环位于真空中的 x-y 平面上，中心同原点重合，如图 4-6 所示。确定离环形中心高度为 h 的点 $P(0,0,h)$ 处的电场强度 $\boldsymbol{E}$。



(a) 由无穷小段1产生的电场 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_1$



(b) 同一直径上相对位置的两段所产生的电场 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_1$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_2$

图 4-6 （例 4-4）具有线电荷密度 ρ_l 的圆环

解答：先考虑圆环一小段所产生的电场，譬如图 4-6a 中位于点 $(b,\phi,0)$ 处的段 1。该段长度为 $dl = bd\phi$，包含的电荷为 $dq = \rho_l dl = \rho_l bd\phi$。从段 1 到点 $P(0,0,h)$ 的距离矢量 $\boldsymbol{R}'_1$ 为

$$\boldsymbol{R}'_1 = -\hat{\boldsymbol{r}}b + \hat{\boldsymbol{z}}h,$$

由此可得

$$R'_1 = |\boldsymbol{R}'_1| = \sqrt{b^2 + h^2}, \quad \hat{\boldsymbol{R}}'_1 = \frac{\boldsymbol{R}'_1}{|\boldsymbol{R}'_1|} = \frac{-\hat{\boldsymbol{r}}b + \hat{\boldsymbol{z}}h}{\sqrt{b^2 + h^2}}$$

由段 1 上的电荷在点 $P(0,0,h)$ 产生的电场为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{R}}'_1\frac{\rho_l \mathrm{d}l}{R'^2_1} = \frac{\rho_l b}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-\hat{\boldsymbol{r}}b + \hat{\boldsymbol{z}}h)}{(b^2 + h^2)^{3/2}}\mathrm{d}\phi$$

146

电场 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_1$ 具有沿 $-\hat{\boldsymbol{r}}$ 方向的分量 $\mathrm{d}E_{1r}$，以及沿 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 方向的分量 $\hat{\boldsymbol{a}}E_{1z}$。从对称的角度考虑，处于段 1 的直径对称位置上的段 2 如图 4-6b 所示，其产生的电场 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_2$ 同 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_1$ 基本相同，唯一的差别就是二者的 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 分量是方向相反的。所以，$\hat{\boldsymbol{r}}$ 分量正好互相抵消，而 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 分量则相加。两个电场的和为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \mathrm{d}\boldsymbol{E}_1 + \mathrm{d}\boldsymbol{E}_2 = \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\rho_l bh}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}\phi}{(b^2 + h^2)^{3/2}} \tag{4.22}$$

由于任何在 $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$ 范围（右半圆环）内的圆环段，都在直径相对的位置（$\phi + \pi$）处有另外一段圆环相对应，所以，对式（4.22）沿半个圆环进行积分，即可得到总的电场

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\rho_l bh}{2\pi\varepsilon_0(b^2 + h^2)^{3/2}}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\phi = \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\rho_l bh}{2\varepsilon_0(b^2 + h^2)^{3/2}} = \hat{\boldsymbol{z}}\frac{h}{4\pi\varepsilon_0(b^2 + h^2)^{3/2}}Q, \tag{4.23}$$

其中 $Q = 2\pi b\rho_l$，是圆环上的总电荷。■

例 4-5　圆盘分布电荷的电场

对图 4-7 所示位于 x-y 平面上，均匀分布有面电荷密度 ρ_s 的圆盘，求在真空中离圆盘中心高度为 h，z 轴上位置 $(0,0,h)$ 点的电场，并令 $a \to \infty$，求无穷大电荷片产生的电场 $\boldsymbol{E}$。

解答：将圆盘看成一系列的同心圆环，就可以应用例 4-4 所得的圆环轴线上的电场表达式，来计算圆盘轴线上的电场。半径为 r 宽度为 $\mathrm{d}r$ 的圆环，其面积为 $\mathrm{d}s = 2\pi r\mathrm{d}r$，所包含的电荷为 $\mathrm{d}q = \rho_s\mathrm{d}s = 2\pi\rho_s r\mathrm{d}r$。利用式（4.23）的表达式，并用 r 代换 b，可以得到该圆环的电场为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{z}}\frac{h}{4\pi\varepsilon_0(r^2 + h^2)^{3/2}}(2\pi\rho_s r\mathrm{d}r)$$

在点 P 的总电场经对 r 从 $0 \sim a$ 积分得到为

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\rho_s h}{2\varepsilon_0}\int_0^a\frac{r\mathrm{d}r}{(r^2 + h^2)^{3/2}} = \pm\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{|h|}{\sqrt{a^2 + h^2}}\right], \tag{4.24}$$

其中正号对应 $h > 0$，负号对应 $h < 0$（圆盘之下）。

147

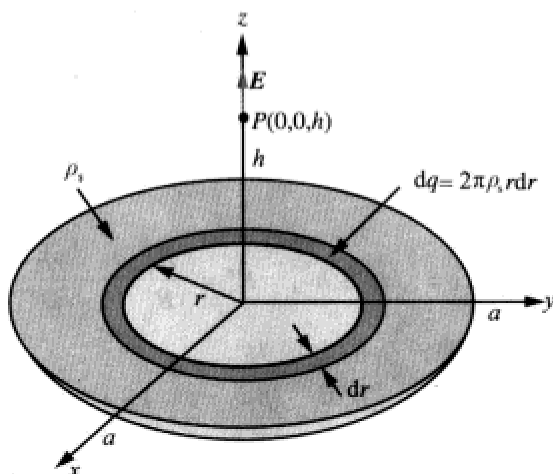


图4-7　面电荷密度为ρ_s的圆盘在z轴上点$P(0,0,h)$产生的电场（例4-5）

对于$a=\infty$的无穷大的电荷片，其电场为

$$\boldsymbol{E}=\hat{z}\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\quad（无穷大电荷片的电场）\tag{4.25}$$

注意：对于无穷大的电荷片，其在x-y平面以上任何地方产生的电场$\boldsymbol{E}$都相同；而在x-y平面以下，式（4.25）中的单位矢量$\hat{z}$应该用$-\hat{z}$代替。■

复习题

Q4.4　当说一个电荷在空间每点都产生电场时，这是否意味着该电荷“放射出”电场？为什么？

Q4.5　如果在空间某给定点电场为0，这是否意味着周围没有电荷？

Q4.6　当计算分布电荷产生的电场时，可以应用线性叠加原理。请陈述其原理。

练习4.6　一无穷大电荷片，位于$z=0$位置（x-y平面），具有均匀的电荷面密度ρ_s，另外一无穷大电荷片位于$z=2\text{m}$位置，具有均匀电荷密度$-\rho_s$。二者都位于自由空间，确定空间各区域的电场$\boldsymbol{E}$。

答案：当$z<0$时，$\boldsymbol{E}=0$；当$0<z<2\text{m}$时，$\boldsymbol{E}=\hat{z}\rho_s/\varepsilon_0$；当$z>2\text{m}$时，$\boldsymbol{E}=0$。（参见）

4.4　高斯定理

回到式（4.1a）

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_v\quad（高斯定理），\tag{4.26}$$

称为高斯定理（Gauss's law）的微分形式。引用“微分”这一修饰词，意思是指该定理的散度运算牵涉到了空间的微分。后面马上将看到，式（4.26）也可以转换成积分形式来表示。在求解电磁问题时，常常在公式的微分形式和积分形式之间转来换去，到底使用何种形式，则取决于在求解的各步骤中，哪种形式更加实用、更加方便。为了将式（4.26）转换成积分形式，将公式两端同乘以$\mathrm{d}v$，然后在任意的体积v上进行体积分。即

$$\int_v\nabla\cdot\boldsymbol{D}\mathrm{d}v=\int_v\rho_v\mathrm{d}v=Q,\tag{4.27}$$

其中 Q 为包含在 v 中的总电荷。式（3.98）的散度定理指出，任何矢量的散度在体积 v 上的体积分，等于从包围该体积 v 的表面 S 上流出的该矢量的总通量。对于矢量 $\boldsymbol{D}$，有

$$\int_v \nabla \cdot \boldsymbol{D} \mathrm{d}v = \oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{4.28}$$

比较式（4.27）和（4.28），得到

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = Q \quad (\text{高斯定理}) \tag{4.29}$$

图 4-8 示意性地表示了高斯定理的积分形式，对于每个微分面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$，$\boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 是流出 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 的电场通量，通过面 S 的总通量等于所包围的电荷 Q。面 S 称为**高斯面**（Gaussian surface）。

当体积 Δv 中包含的总电荷为 q 时，如果体积 Δv 的尺度，比起电通量密度 $\boldsymbol{D}$ 的测量点到 Δv 的距离小很多，则可以把 q 看成**点电荷**（point charge）。通过构造一个封闭的、具有任意半径 R、以点电荷 q 为中心的球形高斯面，可以将高斯定理的积分形式用于确定单个孤立电荷 q 产生的 $\boldsymbol{D}$，如图 4-9 所示。假定电荷 q 为正，考虑对称性，$\boldsymbol{D}$ 的方向一定是沿着单位矢量 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 往外的，而且 $\boldsymbol{D}$ 的幅值 D_R 在高斯面 S 上一定是相同的。因此，在高斯面上的任何点（用位置矢量 $\boldsymbol{R}$ 表示），都有 [148]

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}) = \hat{\boldsymbol{R}} D_R, \tag{4.30}$$

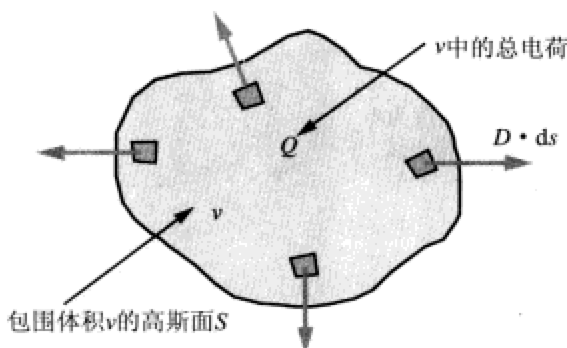


图 4-8 高斯定理指出，流出封闭面的通量 $\boldsymbol{D}$，正比于所包围的电荷 Q

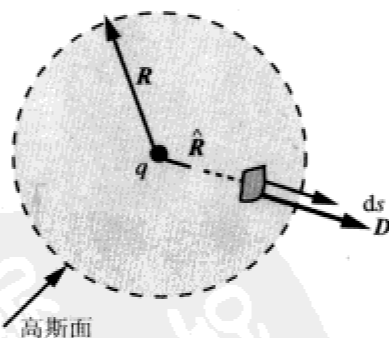


图 4-9 点电荷 q 产生的电场 $\boldsymbol{D}$

以及 $\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \hat{\boldsymbol{R}} \mathrm{d}s$。应用高斯定理得到

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \oint_S \hat{\boldsymbol{R}} D_R \cdot \hat{\mathrm{R}} \mathrm{d}s = \oint_S D_R \mathrm{d}s = D_R (4\pi R^2) = q \tag{4.31}$$

解出 D_R，并将结果代入到式（4.30），可以得到单个孤立电荷在介电常数为 ε 的媒介中产生的电场 $\boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}) = \frac{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R})}{\varepsilon} = \hat{\boldsymbol{R}} \frac{q}{4\pi \varepsilon R^2} \quad (\mathrm{V/m}) \tag{4.32}$$

这与从库仑定律得到的式（4.13）相同。对于这种孤立点电荷的简单情况，无论是采用库仑定律还是采用高斯定理获得电场 $\boldsymbol{E}$ 的表达式，都没有多大关系。然而，当考虑多电荷系统或电荷连续分布的情况时，选择什么样的方法进行求解却有很

大的影响。比较而言，高斯定理比库仑定律应用要容易些，库仑定律可以用于求解任何特定分布的电荷所产生的电场 $\boldsymbol{E}$，而高斯定理则仅仅适用于电荷对称分布的情况。

当电荷对称分布，静电通量密度 $\boldsymbol{D}$ 的幅值及方向随空间位置变化的函数形式很容易确定时，式（4.29）的高斯定理，为求解这类对称分布电荷产生的静态场，提供了一个方便的方法。在式（4.29）的积分面上各点，$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 的方向为外法向，所以仅仅 $\boldsymbol{D}$ 的法向分量对式（4.29）的积分有贡献。因此，为了成功应用高斯定理，应该从对称角度考虑积分面的选择，以使 $\boldsymbol{D}$ 的幅值在各子面（例如，立方体有6个子面）上为常数，方向则为法向或切向。这些要求在例4-6中有具体的体现。

149

例 4-6　无限长电荷线的电场

使用高斯定理，求沿 z 轴的无限长电荷线（均匀线电荷密度为 ρ_l）在自由空间产生的电场 $\boldsymbol{E}$ 的表达式。

解答： 由于线电荷沿着 z 轴延伸无限长，从对称性考虑，$\boldsymbol{D}$ 应该是沿径向 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 方向，且与 ϕ 和 z 无关。因此有，$\boldsymbol{D}=\hat{\boldsymbol{r}}D_r$。如图4-10所示，构造半径为 r、与线电荷同心的圆柱形高斯面。包含在圆柱内的总电荷为 $Q=\rho_l h$，h 为圆柱的高度。由于 $\boldsymbol{D}$ 沿着 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 方向，圆柱的上下底面对式（4.29）等号左侧的积分没有贡献，仅仅圆柱的侧面对积分有贡献。因此

$$\int_{z=0}^{h}\int_{\phi=0}^{2\pi}\hat{\boldsymbol{r}}D_r\cdot\hat{\boldsymbol{r}}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z=\rho_l h$$

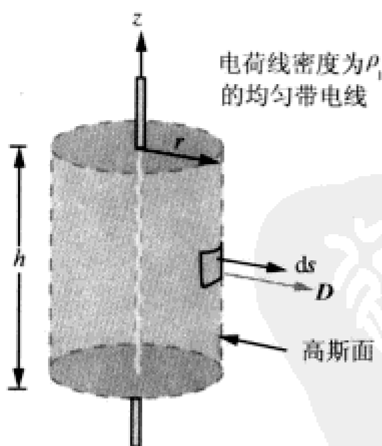


图4-10　环绕无限长线电荷的高斯面（例4-6）

即

$$2\pi hD_r r=\rho_l h,$$

由此可得

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon_0}=\hat{\boldsymbol{r}}\frac{D_r}{\varepsilon_0}=\hat{\boldsymbol{r}}\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}\quad\text{（无限长均匀电荷线）}\tag{4.33}$$

注意： 式（4.33）可以用于任何无限长均匀电荷线，无论其位置和方向如何，只要将 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 定义为从电荷线到观测点的径向即可（即 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 是垂直电荷线的）。■

复习题

Q4.7 解释高斯定理。它主要用在什么情况下？

Q4.8 应该如何选择高斯面？

Q4.9 什么情况下可以将电荷分布看成点电荷？

练习 4.7 两根无限长的电荷线，线电荷密度都为 ρ_l，平行于 z 轴，分别位于 $x=1$ 和 $x=-1$ 处。确定自由空间中 y 轴上任一点的电场 $\boldsymbol{E}$。

答案：$\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{y}}\rho_l y/[\pi\varepsilon_0(y^2+1)]$。（参见◉）

练习 4.8 一半径为 a 的薄球壳，载有均匀面电荷密度 ρ_s。使用高斯定理确定 $\boldsymbol{E}$。

答案：当 $R<a$ 时，$\boldsymbol{E}=0$；

当 $R>a$ 时，$\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{R}}\rho_s a^2/(\varepsilon R^2)$。（参见◉）

练习 4.9 半径为 a 的球形区域，含均匀体电荷密度 ρ_v。利用高斯定理确定（a）$R<a$ 时的 $\boldsymbol{D}$；（b）$R>a$ 时的 $\boldsymbol{D}$。

答案：（a）$\boldsymbol{D}=\hat{\boldsymbol{R}}\rho_v R/3$；

（b）$\boldsymbol{D}=\hat{\boldsymbol{R}}\rho_v a^3/(3R^2)$。（参见◉）

150

4.5 标量电位

在电路中，使用电压和电流进行分析。电路两点之间的电压 V 表示将单位电荷在两点之间移动所需做的功，或所需要的势能（potential energy）。实际上，英语中的“voltage”（电压）是“voltage potential”（电势）的简称，它同“electric potential”（电位）是同一个意思。虽然在分析电路时并不考虑电场，但事实上正是因为在两点间存在电场，才引起两点之间出现电位差，电阻、电容上的电压就是如此。探讨电场 $\boldsymbol{E}$ 和电位 V 之间的关系是本节的主要任务。

4.5.1 电位是电场的函数

从单个正电荷 q 位于均匀电场 $\boldsymbol{E}$ 中的简单情况入手，如图 4-11 所示，$\boldsymbol{E}=-\hat{\boldsymbol{y}}E$，同负 y 轴方向平行。$\boldsymbol{E}$ 的存在导致电荷受到一个作用力 $\boldsymbol{F}_e=q\boldsymbol{E}$，方向沿负 y 轴。如果试图沿着正 y 轴的方向移动电荷（逆着力 $\boldsymbol{F}_e$ 的方向），则必须提供一个外力 $\boldsymbol{F}_{ext}$ 以克服 $\boldsymbol{F}_e$，这就要消耗能量。为了在没有任何加速度的情况下（即以恒定速度）移动 q，就必须使作用在电荷上的合力为零，即 $\boldsymbol{F}_{ext}+\boldsymbol{F}_e=0$，或者是

$$\boldsymbol{F}_{ext}=-\boldsymbol{F}_e=-q\boldsymbol{E} \tag{4.34}$$

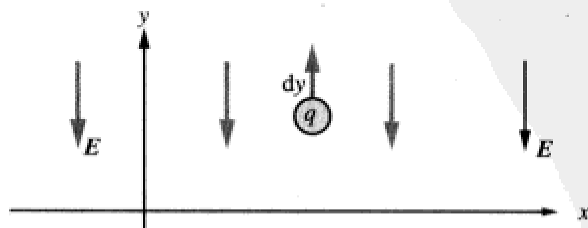


图 4-11 电荷 q 克服电场 $\boldsymbol{E}$ 的作用移动距离 dy 所做的功为 $dW=qEd$

在外力 $\boldsymbol{F}_{ext}$ 作用下，将任何物体移动矢量微分距离 d$\boldsymbol{l}$ 所做的功或所消耗的能量为

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}_{ext} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -q\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \quad (\mathrm{J}) \tag{4.35}$$

功或能量的单位为焦耳（J）。在目前的问题中，如果电荷沿着 $\hat{\boldsymbol{y}}$ 移动距离 dy，则有

$$\mathrm{d}W = -q(-\hat{\boldsymbol{y}}E) \cdot \hat{\boldsymbol{y}}\mathrm{d}y = qE \cdot \mathrm{d}y \tag{4.36}$$

每单位电荷的微分电位能 dW 称为**微分电位**（differential electric potential）dV。即

$$\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}W}{q} = -\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \quad (\mathrm{J/C}\text{ 或 }\mathrm{V}) \tag{4.37}$$

V 的单位是 V，1V = 1J/C。由于 V 的单位用伏特，所以电场的单位为 V/m。

如图 4-12，P_2 和 P_1 两点之间的电位差，可以通过对式（4.37）沿两点之间的任何路径积分得到。即

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathrm{d}V = -\int_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}, \tag{4.38}$$

即

$$V_{21} = V_2 - V_1 = -\int_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}, \tag{4.39}$$

其中 V_1 和 V_2 分别是点 P_1 和 P_2 的电位。式（4.39）右端的线积分应该不依赖于任何特定的 P_1、P_2 之间的积分路径，这是能量守恒原理提出的要求。为了说明问题，看看地球引力场作用下的粒子的情况。如果将粒子从高于地面 h_1 的位置提升到 h_2 的位置，则其获得的势能正比于（$h_2 - h_1$）。换一种方式，若先将粒子从 h_1 处提升到比 h_2 还高的位置 h_3，获得一个正比于（$h_3 - h_1$）的势能，然后再将粒子下放到 h_2，消耗一个正比于（$h_3 - h_2$）的能量，则其获得的净势能还将是正比于（$h_2 - h_1$）。这一原理也适用于电位能 W 以及电位差（$V_2 - V_1$）。不论走哪条路径，电路两节点间的电位差具有相同的数值。不仅如此，根据**基尔霍夫电压定律**（Kirchhoff's voltage law），绕闭合回路一圈的电压降为零。如图 4-12 所示，如果先沿路径 1 从 P_1 点走到 P_2 点，再沿路径 2 从 P_2 点回到 P_1 点，那么式（4.39）右端项的积分是一个闭合路径，左端项则变为零。事实上，静电场 $\boldsymbol{E}$ 沿任何闭合路径 C 的线积分为零，即

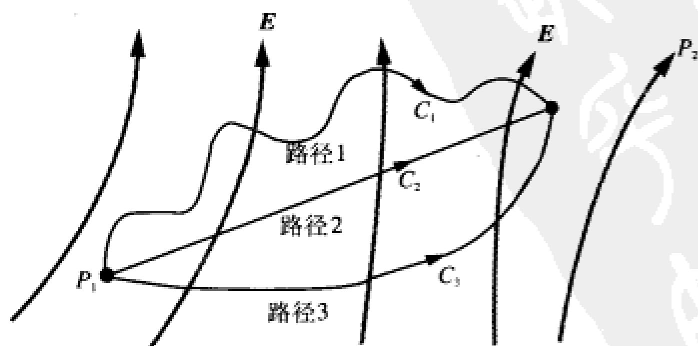


图 4-12 在静电场中，两点 P_1 和 P_2 间的电位差是个定值，跟对 $\boldsymbol{E}$ 线积分的路径无关

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \quad (\text{静电场}) \tag{4.40}$$

沿任何闭合路径的线积分等于零的矢量场，称为保守场（conservative field）或无旋场（irrotational field）。因此，静电场 $\boldsymbol{E}$ 是保守场。在第 6 章将看到，当 $\boldsymbol{E}$ 为时变函数时，就不再是保守场了，其沿闭合路径的线积分也不一定为零了。

静电场的保守性质也可以从麦克斯韦第二个方程，即由式（4.1b）推出。如果 $\partial/\partial t=0$，则

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0 \tag{4.41}$$

如果对 $\nabla\times\boldsymbol{E}$ 沿一个非封闭的面 S 进行面积分，并应用斯托克斯定理，即由式（3.107），可将面积分转换成线积分，则有

$$\int_S(\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\oint_C\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0 \tag{4.42}$$

其中 C 是围绕 S 的闭合路径。因此式（4.41）是式（4.40）的等效微分形式。

下面定义空间一点的电位 V。在定义之前，先回顾电路中对等的物理量电压。在电路中，一点的绝对电压是没有意义的，在空间的一点，绝对电位也是没有意义的。当谈论电路某点的电压 V 时，都是相对参考点，即地的电压而言的，即选定某个方便的参考点，给其赋以参考电压 0，并称之为地。同样的道理也适用于电位 V。通常选择无穷远点为参考电位点。这就是说，在式（4.39）中，当 P_1 点位于无穷远处时，设定 $V_1=0$，从而给出在任意点的电位 V 为

152

$$V=-\int_{\infty}^{P}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\quad(\mathrm{V}) \tag{4.43}$$

4.5.2 点电荷的电位

对于位于球坐标原点的点电荷 q，其在距离 R 的地方产生的电场由式（4.32）给定为

$$\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{R}}\frac{q}{4\pi\varepsilon R^2}\quad(\mathrm{V/m}) \tag{4.44}$$

如前所述，式（4.43）中两端点间的积分路径的选择是任意的。因此，为了方便，选择沿着径向 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 方向的路径，这时有 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\hat{\boldsymbol{R}}\mathrm{d}R$，所以

$$V=-\int_{\infty}^{R}\left(\hat{\boldsymbol{R}}\frac{q}{4\pi\varepsilon R^2}\right)\cdot\hat{\boldsymbol{R}}\mathrm{d}R=\frac{q}{4\pi\varepsilon R}\quad(\mathrm{V}) \tag{4.45}$$

如果电荷 q 不在原点，而在位置矢量 $\boldsymbol{R}_1$ 确定的源点，那么在位置矢量为 $\boldsymbol{R}$ 的观测点处的 V 为

$$V(\boldsymbol{R})=\frac{q}{4\pi\varepsilon|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_1|}\quad(\mathrm{V}), \tag{4.46}$$

这里，$|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_1|$ 是观测点和电荷 q 所在源点间的距离。在前面求电场 $\boldsymbol{E}$ 时，曾经用到过叠加原理，这一原理同样也适用于电位 V。所以，对位于位置矢量 $\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2,\cdots,\boldsymbol{R}_N$ 处的 N 个离散电荷 $q_1,q_2,\cdots,q_N$ 产生的电位为

$$V(\boldsymbol{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_i|}\quad(\mathrm{V}) \tag{4.47}$$

4.5.3 连续分布电荷的电位

对于在给定的体积 v' 中，或面 S' 上，或线 l' 上的连续分布电荷，经过三个步骤，

即可求得它们的电位：(1) 用 $\rho_v \mathrm{d}v'$、$\rho_s \mathrm{d}s'$ 或 $\rho_l \mathrm{d}l'$ 代替式 (4.47) 中的 q_i；(2) 将求和转换成积分；(3) 将 $R' = |\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}_i|$ 定义为从积分点到观测点的距离。由这三个步骤可以得到下述表达式：

$$V(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{v'} \frac{\rho_v}{R'}\mathrm{d}v' \quad (\text{体电荷分布}), \tag{4.48a}$$

$$V(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{S'} \frac{\rho_s}{R'}\mathrm{d}s' \quad (\text{面电荷分布}), \tag{4.48b}$$

$$V(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{l'} \frac{\rho_l}{R'}\mathrm{d}l' \quad (\text{线电荷分布}), \tag{4.48c}$$

4.5.4 电场的电位函数表示

在4.5.1中，将 V 表示成了 $\boldsymbol{E}$ 的线积分。下面由式 (4.37) 所给的 V 的微分形式，推导二者的逆向关系

$$\mathrm{d}V = -\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{4.49}$$

对于标量函数 V，由式 (3.73) 可得

$$\mathrm{d}V = \nabla V\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}, \tag{4.50}$$

其中 ∇V 是 V 的梯度。比较式 (4.49) 以及式 (4.50) 可得

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V \tag{4.51}$$

利用 V 和 $\boldsymbol{E}$ 间这一微分形式的关系，可以通过先求 V 后求 $\boldsymbol{E}$ 的方法，确定任何分布的电荷所产生的电场 $\boldsymbol{E}$，即先根据4.5.1～4.5.3节中的表达式计算 V，然后再计算 V 的负梯度，就可以得到 $\boldsymbol{E}$。式 (4.47)～式(4.48c) 所给定的 V 表达式，牵涉的是标量和、标量积分等运算，比起在4.3节中由库仑定律推导出的 $\boldsymbol{E}$ 表达式中的矢量和、矢量积分来，要容易计算得多。因此，虽然经电位求 $\boldsymbol{E}$ 的方法需要两个步骤，但比起基于库仑定律的直接方法来，从计算的角度看，使用前者较为简单。

153

例 4-7　电偶极子的电场

电偶极子 (electric dipole) 由电量相等、极性相反、分开一小段距离的两个点电荷构成，如图4-13a所示。确定自由空间任意一点 P 的 V 和 $\boldsymbol{E}$。假定 P 相隔的距离 $R \gg d$，这里 d 为两点电荷的间距。

解答：式 (4.45) 给出了单个点电荷产生的电位。对于图4-13a的两电荷情况，应用式 (4.47) 可得

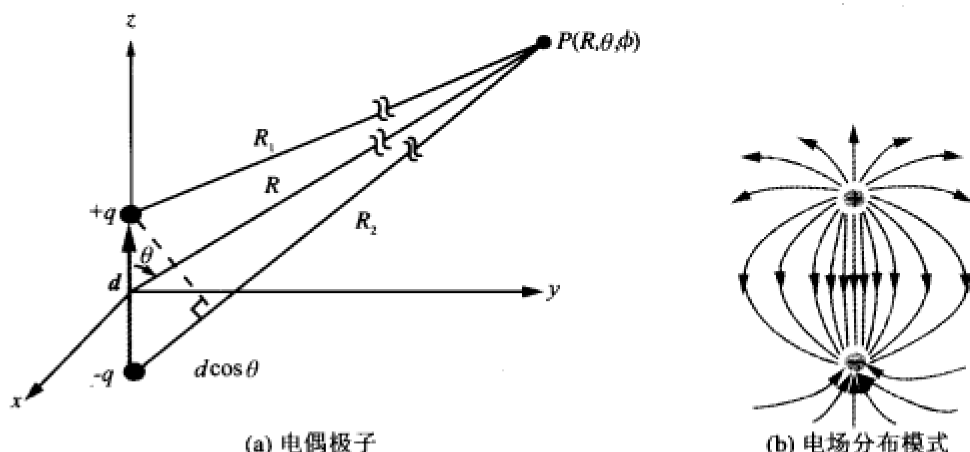
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R_1} + \frac{-q}{R_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)$$

因为 $d \ll R$，图4-13a中标记为 R_1、R_2 的线段近似平行，在这种情况下可以采用以下近似

$$R_2 - R_1 \approx d\cos\theta, R_1 R_2 \approx R^2$$

因此

$$V = \frac{q\,d\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \tag{4.52}$$



(a) 电偶极子 (b) 电场分布模式

图 4-13 偶极矩为 $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{d}$ 的电偶极子(例 4-7)

式（4.52）的分子可以写成 $q\boldsymbol{d}$ 和$\hat{\boldsymbol{R}}$的点积形式，其中 $\boldsymbol{d}$ 为从电荷 $-q$ 到 $+q$ 的距离矢量，单位矢量$\hat{\boldsymbol{R}}$则从偶极子的中心指向观测点 P

$$q\ d\cos\theta=q\boldsymbol{d}\cdot\hat{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{p}\cdot\hat{\boldsymbol{R}},\tag{4.53}$$

其中，$\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{d}$ 称为电偶极子的偶极矩（dipole moment）。将式（4.53）代入式（4.52）得到

$$V=\frac{\boldsymbol{p}\cdot\hat{\boldsymbol{R}}}{4\pi\varepsilon_0R^2}\quad（电偶极子）\tag{4.54}$$

在球坐标系中，式（4.51）变为

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V=-\left(\hat{\boldsymbol{R}}\frac{\partial V}{\partial R}+\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial\theta}+\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi}\right)\tag{4.55}$$

154

其中用到了封底插页所给的∇V表达式。对式（4.52）所给 V 的表达式关于 R、θ 求导数，然后将结果代入式（4.55），得到

$$\boldsymbol{E}=\frac{qd}{4\pi\varepsilon_0R^3}(\hat{\boldsymbol{R}}2\cos\theta+\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta)\quad(\text{V/m})\tag{4.56}$$

要注意的是，式（4.54）、式（4.56）所给 V 和 $\boldsymbol{E}$ 的表达式，只有在 $R\gg d$ 的情况下才可以使用。要计算电偶极子两电荷邻近点的 V 和 $\boldsymbol{E}$ 的话，就不能像推导式（4.52）那样采用远距离近似，而要进行直接的精确计算。对 $\boldsymbol{E}$ 的精确计算得到的电场分布模式如图 4-13b 所示。■

4.5.5 泊松方程

利用 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$，式（4.26）的高斯定理微分形式可以写成

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho_v}{\varepsilon}\tag{4.57}$$

将式（4.51）代入式（4.57），得到

$$\nabla\cdot(\nabla V)=-\frac{\rho_v}{\varepsilon}\tag{4.58}$$

考虑到式（3.110）给出的标量函数 V 的拉普拉斯定义

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot (\nabla V) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \qquad (4.59)$$

方程（4.58）可以简写成

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon} \quad \text{（泊松方程）} \qquad (4.60)$$

这就是*泊松方程*（Poisson's equation）。对于包含体电荷密度分布为 ρ_v 的体积 v'，前面已经推得其 V 表达式为式（4.48a），重写如下

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{v'} \frac{\rho_v}{R'} \mathrm{d}v' \qquad (4.61)$$

它满足公式（4.60）。如果所考虑的媒质中没有自由电荷，则式（4.60）简化为

$$\nabla^2 V = 0 \quad \text{（拉普拉斯方程）},$$

称为*拉普拉斯方程*（Laplace's equation）。对于边界电位 V 已知的区域，例如两端施加特定电位差的平行板电容器，泊松方程以及拉普拉斯方程可用于确定其内部区域的静态电位 V，因此十分有用。

复习题

Q4.10 什么是保守场？

Q4.11 为什么空间点的电位总要相对某个参考点的电位来定义？

Q4.12 解释为什么式（4.40）是基尔霍夫电压定律的数学表述？

Q4.13 为什么先从给定的电荷分布计算 V，再利用 $\mathbf{E} = -\nabla V$ 求 $\mathbf{E}$ 要比应用库仑定律直接计算 $\mathbf{E}$ 容易？

Q4.14 什么是电偶极子？

练习 4.10 四个电量为 20μC 的电荷，放置在 x-y 平面中边长为 2m、中心在原点的正方形的四个顶点上。求自由空间中的原点的电位。

155 答案：$V = \sqrt{2} \times 10^{-5} / (\pi\varepsilon_0)$（V）。（参见●）

练习 4.11 半径为 R 的球壳具有均匀面电荷密度 ρ_s，求球壳中心的电位。

答案：$V = \rho_s R / \varepsilon$（V）。（参见●）

4.6 材料的电特性

材料的*电磁构造参数*（constitutive parameter）包括介电常数 ε、磁导率 μ 以及电导率 σ。如果材料的构造参数不随位置变化，则称其为*均匀的*（homogeneous），而如果其构造参数与方向无关，则称其为*各向同性的*（isotropic）。大多数材料表现出各向同性的特点，但有些晶体除外。本书的全部材料均假定为均质和各向同性的。本章所关心的是 ε 和 σ，而 μ 则将在第5章讨论。

材料的*电导率*（conductivity）是在外电场作用下，电子通过材料容易程度的量度。根据电导率大小的不同，材料可分为导体（conductor，主要是金属）或电介质（dielectrics，主要是绝缘体）。在导体的原子核最外层，附着有大量弱束缚的电子。在没有外电场时，这些自由电子以随机的方向和变化的速度运动。这种随机运动在

导体中产生的平均电流为零。然而，当施加外部电场时，这些电子逆着外电场的方向，从一个原子迁移到下一个原子。这种运动的平均速度，称为**电子的漂移速度**（electron drift velocity），用 $\boldsymbol{u}_e$ 表示，它形成了一个**传导电流**（conduction current）。

在电介质中，电子紧紧地束缚在原子上，即使施加外电场，也很难将它们分离。因此材料中就不会有电流流过。**理想电介质**（prefect dielectric）的 $\sigma=0$；相反，**理想导体**（prefect conductor）的 $\sigma=\infty$。

大多数金属的电导率在 $10^6 \sim 10^7$ S/m 范围，一般良绝缘体的电导率则在 $10^{-10} \sim 10^{-17}$ S/m 之间，如表 4-1 所示。电导率介于导体与绝缘体之间的材料称为**半导体**（semiconductor）。其中纯锗的电导率为 2.2S/m。附录 B 列出了常用材料在 20℃时的电导率，表 4-1 对其中部分材料进行了重列。

表 4-1 部分常用材料 20℃时的电导率

材料	电导率	材料	电导率
导体		半导体	
银	6.2×10^7	纯锗	2.2
铜	5.8×10^7	纯硅	4.4×10^{-4}
金	4.1×10^7	绝缘体	
铝	3.5×10^7	玻璃	10^{-12}
铁	10^7	石蜡	10^{-15}
水银	10^6	云母	10^{-15}
碳	3×10^4	熔凝石英	10^{-17}

材料的电导率取决于好几个因素，包括温度、纯度等。通常，金属的 σ 随温度下降而增加，在接近绝对零度的低温时，有些导体因电导率变成无穷大而变成**超导体**（superconductor）。

156

复习题

Q4.15 什么是媒介的电磁构造参数？

Q4.16 如何区分材料是导体、半导体，还是电介质？什么是超导体？

Q4.17 理想电介质的电导率是多少？

4.7 导体

在导电材料中，电子的漂移速度 $\boldsymbol{u}_e$ 同外电场 $\boldsymbol{E}$ 的关系为

$$\boldsymbol{u}_e = -\mu_e \boldsymbol{E} \quad (\text{m/s}), \tag{4.62a}$$

其中 μ_e 是材料的一种特性，称为**电子迁移率**（electron mobility），单位为（$\text{m}^2/\text{V}\cdot\text{s}$）。在半导体中，电流是由电子和空穴两种运动引起的，由于空穴是正电荷的载流子，因此空穴的漂移速度 $\boldsymbol{u}_h$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的方向是相同的

$$\boldsymbol{u}_h = \mu_h \boldsymbol{E} \quad (\text{m/s}), \tag{4.62b}$$

其中，μ_h 是**空穴迁移率**（hole mobility）。迁移率用来表征带电粒子的有效质量，以及在外电场中粒子每次经历加速、同原子碰撞而停止、再开始加速的全过程所走过的平均距离。根据式（4.11），如果媒介中电荷的运动速度为 $\boldsymbol{u}$，体电荷密度 ρ_v，则

电流密度为$\boldsymbol{J}=\rho_v\boldsymbol{u}$。在半导体的情况下，电流密度中包含电子引起的$\boldsymbol{J}_e$分量，和空穴引起的$\boldsymbol{J}_h$分量。所以总的传导电流密度（conduction current density）为

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_e+\boldsymbol{J}_h=\rho_{ve}\boldsymbol{u}_e+\rho_{vh}\boldsymbol{u}_h \quad (\mathrm{A/m^2}) \tag{4.63}$$

由式（4.62a）和式（4.62b）可得

$$\boldsymbol{J}=(-\rho_{ve}\mu_e+\rho_{vh}\mu_h)\boldsymbol{E}, \tag{4.64}$$

这里，$\rho_{ve}=-N_e\mathrm{e}$，$\rho_{vh}=N_h\mathrm{e}$，N_e和N_h分别为单位体积的自由电子数目以及空穴数目，$\mathrm{e}=1.6\times10^{-19}\mathrm{C}$，是单个电子或空穴的带电量（绝对值）。式（4.64）括号中的物理量定义为材料的电导率，用σ表示。即

$$\sigma=-\rho_{ve}\mu_e+\rho_{vh}\mu_h=(N_e\mu_e+N_h\mu_h)\mathrm{e} \quad (\mathrm{S/m}) \quad (\text{半导体}) \tag{4.65}$$

其单位是西门子每米（S/m）。对良导体有$N_h\mu_h \ll N_e\mu_e$，因此公式（4.65）退化为

$$\sigma=-\rho_{ve}\mu_e=N_e\mu_e\mathrm{e} \quad (\mathrm{S/m}) \quad (\text{导体}) \tag{4.66}$$

在以上两种情况下，式（4.64）都变成为

$$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E} \quad (\mathrm{A/m^2}) \quad (\text{欧姆定律}), \tag{4.67}$$

它被称为欧姆定律的单点形式（point form of Ohm's law）或微分形式。注意，在$\sigma=0$的理想电介质中，无论$\boldsymbol{E}$的大小，总有$\boldsymbol{J}=0$；而在$\sigma=\infty$的理想导体中，无论$\boldsymbol{J}$多大，总有$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{J}/\sigma=0$。即

理想电介质：$\boldsymbol{J}=0$

理想导体：$\boldsymbol{E}=0$

对于大多数金属，如银、铜、金，以及铝等（见表4-1），因为它们的σ在$10^6\mathrm{S/m}$的数量级，习惯上将金属导体内的电场$\boldsymbol{E}$看成等于0。

理想导体是个等位媒介（equipotential medium），这意味着在导体的每一点都具有相同的电位。[157] 这个特性源自这样一个事实，即导体中任意两点的电位差V_{21}，根据式（4.39）的定义，等于两点间$\boldsymbol{E}$的线积分，由于理想导体中每点都有$\boldsymbol{E}=0$，所以$V_{21}=0$。然而，导体是等位体，并不一定就表示导体同其他导体之间的电位差也为零。每个导体是等位体，但它们表面存在的不同的电荷分布，可以在它们之间产生电位差。

例4-8 铜线中的传导电流

一直径为2mm的铜线，电导率为$5.8\times10^7\mathrm{S/m}$，电子迁移率为$0.0032(\mathrm{m^2/V\cdot s})$，处于20(mV/m)的电场中。求（a）自由电子的体电荷密度；（b）电流密度；（c）流过导线的电流；（d）电子的漂移速度；（e）自由电子的体密度。

解答：

（a）

$$\rho_{ve}=-\frac{\sigma}{\mu_e}=-\frac{5.8\times10^7}{0.0032}=-1.81\times10^{10}(\mathrm{C/m^3})$$

（b）

$$\boldsymbol{J}=\sigma E=5.8\times10^7\times20\times10^{-3}=1.16\times10^6(\mathrm{A/m^2})$$

（c）

$$I=JA=J\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)=1.16\times10^6\left(\frac{\pi\times4\times10^{-6}}{4}\right)=3.64(\mathrm{A})$$

(d)

$$u_e = -\mu_e E = -0.0032 \times 20 \times 10^{-3} = -6.4 \times 10^{-5} (\mathrm{m/s})$$

负号表示 $\boldsymbol{u}_e$ 同 $\boldsymbol{E}$ 的方向相反。

(e)

$$N_e = -\frac{\rho_{ve}}{e} = \frac{1.81 \times 10^{10}}{1.6 \times 10^{-19}} = 1.13 \times 10^{29} (电子/\mathrm{m}^3)$$ ■

练习 4.12 假定铝的电导率为 3.5×10^7 S/m，电子迁移率为 0.0015m²/V·s，确定其中的自由电子密度。

答案：$N_e = 1.46 \times 10^{29}$ （电子/m³） （参见）

练习 4.13 100m 长的均匀导线，电导率为 2×10^7 S/m，通过均匀横截面的电流密度为 3×10^5 A/m²。求导线的电压降。

答案：$V = 1.5$(V)。（参见）

4.7.1 电阻

为了说明单点形式的欧姆定律的用途，用它来推导图 4-14 所示的一根长度为 l，均匀横截面积为 A 的导体的电阻 R。导体的轴线沿着 x 轴方向，在点 x_1 和 x_2 之间延伸，长度 $l = x_2 - x_1$。电压 V 施加在导体两端，产生电场 $\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{x}}E_x$，$\boldsymbol{E}$ 从高电位的点（图 4-14 中的点 1）指向低电位的点（点 2）。根据式（4.39）可以得到 V 和 E_x 之间的关系。即

$$V = V_1 - V_2 = -\int_{x_2}^{x_1} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\int_{x_2}^{x_1} \hat{\boldsymbol{x}}E_x \cdot \hat{\boldsymbol{x}}dl = E_x l \quad (\mathrm{V}) \tag{4.68}$$

158

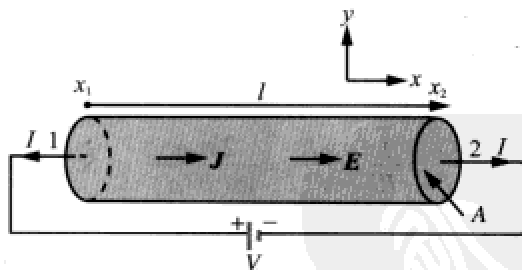


图 4-14 连接到直流电压源 V 长度为 l、横截面积为 A 的线性电阻

根据式(4.67)，在 x_2 处通过横截面积 A 的电流为

$$I = \int_A \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_A \sigma\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = \sigma E_x A \quad (\mathrm{A}) \tag{4.69}$$

根据 $R = V/I$，由式（4.68）同式（4.69）的比值得到

$$R = \frac{l}{\sigma A} \quad (\Omega) \tag{4.70}$$

现在将以上 R 的结果推广到任意形状的电阻。容易看出，电阻两端的电压 V 等于 $\boldsymbol{E}$ 沿两个特定点之间路径 l 上的线积分，电流 I 则等于流过电阻截面 S 的 $\boldsymbol{J}$ 通量。因此有

$$R = \frac{V}{I} = \frac{-\int_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}}{\int_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{s}} = \frac{-\int_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}}{\int_S \sigma\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}} \tag{4.71}$$

电阻 R 的倒数称为电导（conductance），用 G 表示，其单位是（Ω^{-1}），或西门子（S）。对于线性电阻，有

$$G = \frac{1}{R} = \frac{\sigma A}{l} \quad (\mathrm{S}) \tag{4.72}$$

例 4-9 同轴电缆的电导

长度为 l 的同轴电缆，内外导体半径分别是 a 和 b，如图 4-15 所示。绝缘材料的电导率为 σ。求每单位长度绝缘层的电导 G' 的表达式。

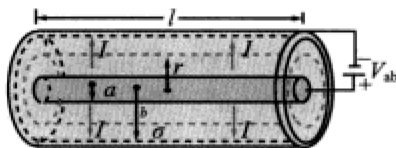


图 4-15 例 4-9 的同轴电缆

解答：假设 I 是从内导体经过绝缘材料流到外导体的总电流。在任意离电缆轴线的中心距离为 r 的地方，电流流过的面积为 $A=2\pi rl$。因此，

$$\boldsymbol{J} = \hat{\boldsymbol{r}}\frac{I}{A} = \hat{\boldsymbol{r}}\frac{I}{2\pi rl}, \tag{4.73}$$

根据 $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$，有

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{r}}\frac{I}{2\pi\sigma rl} \tag{4.74}$$

在电阻中，电流从高电位留到低电位。因此，如果 $\boldsymbol{J}$ 沿 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 方向，则内导体的电位必须高于外导体的电位。相应，导体间的电位差为

159

$$V_{ab} = -\int_b^a \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\int_b^a \frac{I}{2\pi\sigma l}\frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}dr}{r} = \frac{I}{2\pi\sigma l}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{4.75}$$

因此，每单位长度的电导为

$$G' = \frac{G}{l} = \frac{1}{Rl} = \frac{I}{V_{ab}l} = \frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)} \quad (\mathrm{S/m}) \tag{4.76}$$

■

4.7.2 焦耳定律

现在研究处于静电场 $\boldsymbol{E}$ 中的导电媒介所消耗的功率。设媒介包含的自由电子和空穴的电荷体密度分别为 ρ_{ve} 和 ρ_{vh}。在单元体积 Δv 中包含的电子电量和空穴电量分别为 $q_e=\rho_{ve}\Delta v$ 和 $q_h=\rho_{vh}\Delta v$，作用在 q_e 和 q_h 上的电场力分别为 $\boldsymbol{F}_e=q_e\boldsymbol{E}=\rho_{ve}\boldsymbol{E}\Delta v$ 和 $\boldsymbol{F}_h=q_h\boldsymbol{E}=\rho_{vh}\boldsymbol{E}\Delta v$。在移动 q_e 微分距离 Δl_e，移动 q_h 微分距离 Δl_h 时，电场所消耗的功（能）为

$$\Delta W = \boldsymbol{F}_e\cdot\Delta\boldsymbol{l}_e + \boldsymbol{F}_h\cdot\Delta\boldsymbol{l}_h. \tag{4.77}$$

功率的单位为瓦特（W），定义为能量随时间的变化率，用 P 表示。因此，对应 ΔW 的功率变化为

$$\begin{aligned}\Delta P &= \frac{\Delta W}{\Delta t} = \boldsymbol{F}_e\cdot\frac{\Delta\boldsymbol{l}_e}{\Delta t} + \boldsymbol{F}_h\cdot\frac{\Delta\boldsymbol{l}_h}{\Delta t} = \boldsymbol{F}_e\cdot\boldsymbol{u}_e + \boldsymbol{F}_h\cdot\boldsymbol{u}_h \\ &= (\rho_{ve}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{u}_e + \rho_{vh}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{u}_h)\Delta v = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}\Delta v,\end{aligned} \tag{4.78}$$

其中，$\boldsymbol{u}_e = \Delta \boldsymbol{l}_e/\Delta t$ 是电子漂移速度，而 $\boldsymbol{u}_h = \Delta \boldsymbol{l}_h/\Delta t$ 是空穴漂移速度。在获得式（4.78）的最后一步中，使用了式（4.63）。当体积为 v 时，消耗的总功率为

$$P = \int_v \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} \mathrm{d}v \quad (\mathrm{W}) \quad (\text{焦耳定律}), \tag{4.79}$$

考虑到式（4.67）的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{J}$ 的关系，有

$$P = \int_v \sigma |\boldsymbol{E}|^2 \mathrm{d}v \quad (\mathrm{W}) \tag{4.80}$$

式（4.79）是焦耳定律（Joule's law）的数学描述。对于前面考虑的电阻的例子，$|\boldsymbol{E}| = E_x$，体积为 $v = lA$。将式（4.80）中的体积分分成沿 A 的面积分以及沿 l 的线积分，得到

$$P = \int_v \sigma |\boldsymbol{E}|^2 \mathrm{d}v = \int_A \sigma E_x \mathrm{d}s \int_l E_x \mathrm{d}l = (\sigma E_x A)(E_x l) = IV \quad (\mathrm{W}), \tag{4.81}$$

其中，使用了电压 V 的式（4.68）以及电流 I 的式（4.69）。利用 $V = IR$ 关系，得到大家所熟知的表达式

$$P = I^2 R \quad (\mathrm{W}) \tag{4.82}$$

复习题

Q4.18 绝缘体、半导体以及导体之间的根本差别是什么？

Q4.19 证明图 4-15 中的同轴电缆所消耗的功率为 $P = I^2 \ln(b/a)/(2\pi\sigma l)$。

练习 4.14 一根 50m 长的圆截面铜导线，半径为 $r = 2\mathrm{cm}$，铜的电导率为 $5.8\times10^7(\mathrm{S/m})$。求：(a) 导线的电阻 R；(b) 当两端施加 1.5(mV) 的电压时，导线消耗的功率。

答案：(a) $R = 6.9\times10^{-4}\Omega$；(b) $P = 3.3(\mathrm{mW})$。(参见◉)

练习 4.15 应用式（4.80）重做练习 4.14 的 (b)。(参见◉)

160

4.8 电介质

如前所述，导体与电介质的本质差别在于，导体有大量弱束缚的自由电子，可以在材料的晶格结构内迁徙，而电介质的原子核外层电子紧紧地束缚在原子的周围。在没有外电场时，无论哪种材料，其中的电子都形成围绕原子核的对称电子云，电子云的中心同原子核的中心重合，如图 4-16a 所示。带正电的原子核产生的电场，将电子云吸附并约束在周围，相邻原子的电子云之间的相互排斥，使物质具有形状。当给导体施加外电场时，在每个原子中约束最松散的那些电子将很容易从一个原子跃迁到下一个原子，从而形成电流。然而，在电介质中，由于没有可以自由移动的电荷，因此外施电场 $\boldsymbol{E}_{ext}$ 无法引起电荷的大量迁徙，但 $\boldsymbol{E}_{ext}$ 的存在，可以使电子云的中心和原子核的中心发生变形，从而极化（polarize）材料的原子或分子。极化过程如图 4-16b 所示。极化的原子或分子可以用一个电偶极子来表示，该电偶极子的 $+q$ 位于原子核的中心，而 $-q$ 则位于电子云的中心，如图 4-16c 所示。这种偶极子每个都建立一个小电场，方向由带正电荷的原子核指向带负电荷的电子云的中心。这种感应（induced）出来的电场，称为极化场（polarization field），其方向与 $\boldsymbol{E}_{ext}$ 相反，强度也比 $\boldsymbol{E}_{ext}$ 弱。因此，在电介质材料中的净电场比 $\boldsymbol{E}_{ext}$ 要小。从微观角度看，每个偶极子都具有类似例 4-7 的偶极矩。在电介质中，偶极子自动沿着直线方向排列，如

图4-17所示。在材料的上沿和下沿，偶极子的排列导致上表面出现正的面电荷密度，下表面出现负的面电荷密度。

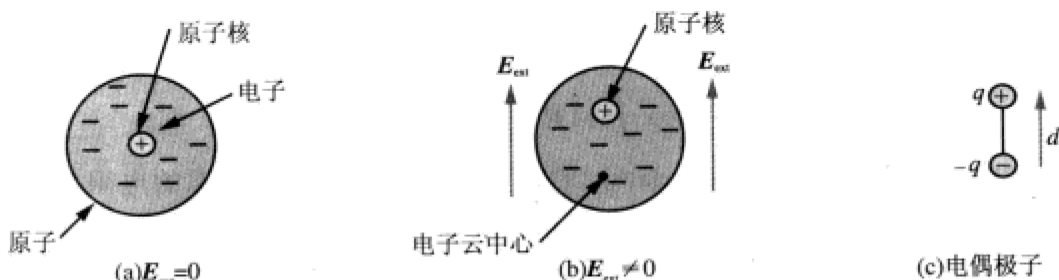


图4-16 当外电场 E_{ext} 不存在时，电子云的中心同原子核的中心是重合的，当施加外电场时，两个中心距离变为 d

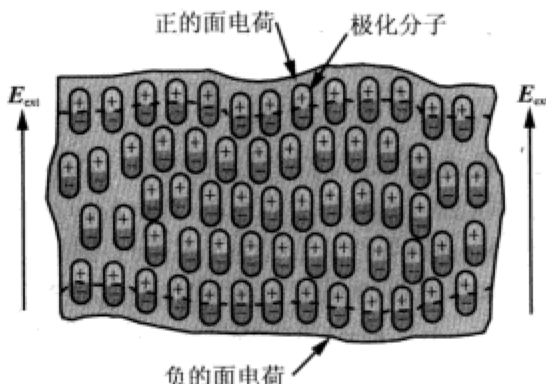


图4-17 外电场 E_{ext} 对电介质的极化

图4-16和图4-17所描述的是比较简单的图像，属于非极性材料（nonpolar material）的情况。非极性材料的分子不具有永久性的偶极矩。当外施电场时其分子被极化，当外电场消失时，其分子又回复到原始的非极化状态。而另外一些材料，例如水，其分子结构的特点使得分子本身具有内在的、永久性的偶极矩，在没有外电场时这些偶极矩彼此沿随机的方向排列着。这类具有永久性偶极矩的材料称为极性材料（polar material）。由于取向的随机性，在宏观上，极性材料的偶极子不产生净偶极矩（在宏观上，材料的每一点都代表包含有成千上万分子的小体积）。当施加外电场时，永久性的偶极子都在一定程度上偏向外电场的方向排列，排列的情况有点类似图4-17所示非极性材料的图像。

161

在自由空间中，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 之间的关系由 ε_0 确定，而在电介质材料中，由于微观偶极子的存在，二者的关系改变为

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}, \qquad (4.83)$$

其中，$\boldsymbol{P}$ 称为电极化场（electric polarization field），用以考虑材料的极化性质。极化场由电场 $\boldsymbol{E}$ 产生，并依赖于材料的性质。

如果感应的极化场幅值直接正比于 $\boldsymbol{E}$ 的幅值，则称该种电介质媒介是线性的

(linear)，如果极化场与 $\boldsymbol{E}$ 是同方向的，则称该种电介质材料是各向同性的。在某些晶体中，材料的周期性结构使得沿某些方向，譬如沿晶格轴线方向，比沿其他方向发生更多的极化。这类媒介称为各向异性（anisotropic）的电介质，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 可能具有不同的方向。如果媒介的构造参数（ε,μ,σ）在整个媒介中是常数，则称为均质的媒介。本书目前考虑的材料都是线性、各向同性、均质的。对于这类材料，极化场直接正比于 $\boldsymbol{E}$，可用以下关系表示

$$\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\chi_e\boldsymbol{E}, \tag{4.84}$$

这里，χ_e 称为材料的电极化率（electric susceptibility）。将式（4.84）代入式（4.83）可得

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\varepsilon_0\chi_e\boldsymbol{E}=\varepsilon_0(1+\chi_e)\boldsymbol{E}=\varepsilon\boldsymbol{E}, \tag{4.85}$$

其中定义了材料介电常数 ε，即

$$\varepsilon=\varepsilon_0(1+\chi_e) \tag{4.86}$$

如前所述，通常将材料的介电常数相对真空的 ε_0 给出更为方便，这就是相对介电常数 $\varepsilon_r=\varepsilon/\varepsilon_0$。表 4-2 列出了几个常用材料的 ε_r，其他更多材料请查阅附录 B。真空的 $\varepsilon_r=1$，对大多数导体有 $\varepsilon_r\approx 1$。在海平面上空气的相对介电常数约为 1.0006，随着海拔的升高，逐渐减少到接近于 1。除了某些特殊情况外（例如电磁波长距离经过大气层产生折射的计算），空气当作真空处理。

表 4-2 常用材料的相对介电常数以及介电强度

材料	相对介电常数 ε_r	介电强度 E_{ds}(MV/m)
空气（海平面）	1.0006	3
石油	2.1	12
聚苯乙烯	2.6	20
玻璃	4.5～10	25～40
石英	3.8～5	30
酚醛塑料（电木）	5	20
云母	5.4～6	200

注：$\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$ 和 $\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}$ F/m。

在前面建立电介质的极化模型时，没有对外施电场的强度上限进行限制。实际上，当 $\boldsymbol{E}$ 超过某个临界值时，它将导致电子从分子中完全释放，并以传导电流的形式加速通过材料，这个临界值称为材料的绝缘强度或介质强度（dielectric strength）。当发生这种情况时，可能出现火花，由于电子与分子结构间的碰撞，材料可能受到永久性的破坏。这种性能上的迅速变化称为电介质击穿（dielectric breakdown）。绝缘强度 E_{ds} 是材料不发生击穿而能够承受的外施电场 $\boldsymbol{E}$ 的最高值。气体、液体以及固体的电介质都会发生电介质击穿。相应的场强依赖于材料的成分，以及其他因素如温度、湿度等。空气的介电强度是 3(MV/m)，玻璃的是 25(MV/m)～40(MV/m)；云母的则是 200(MV/m)，见表 4-2。

162

相对地面具有电位 V 的带电雷云，将在地面和雷云之间的空气媒介中感应出 $E=V/d$ 大小的电场，其中 d 是相对地表面的雷云高度。如果 V 足够大，以致 E 超过了空气的介电强度，则会发生电离，进而引起放电（闪电）。例 4-11 将讨论平行

板电容器的击穿电压（breakdown voltage，V_{br}）。

复习题

Q4.20 什么是极性材料？什么是非极性材料？

Q4.21 **D** 和 **E** 是否总是指向同一方向？在什么情况下不是？

Q4.22 当电介质击穿的时候，会有什么现象和后果出现？

4.9 电场的边界条件

如果电场的幅值和方向不随空间位置发生突变，则称其是空间连续的。对于不同的两种媒介，如果在交界上存在面电荷的话，那么即使电场在每种媒介内部是连续的，它在交界上也将是不连续的。边界条件将确定边界两侧媒介中的对应场分量（切向分量和法向分量）之间的互相关系。下面推导一组通用的边界条件，它们适合于任何两种媒介，可以是两种不同的电介质（包括真空），也可以是一个导体、一个电介质。虽然这些边界条件是为静电场推导的，但也同样适用于时变电场。图4-18为两种媒介的交界示意图，其中媒介1的介电常数为 ε_1，媒介2的介电常数为 ε_2。在通常情况下，交界面上会存在面电荷密度 ρ_s。

163

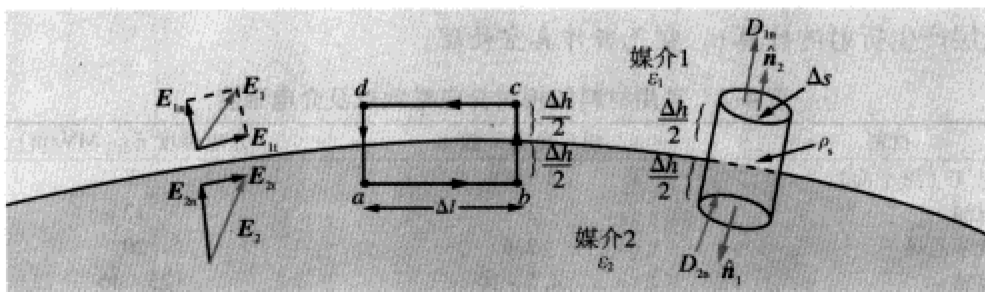


图4-18 两种电介质媒介的交界面

为了推导 **E** 和 **D** 的切向分量边界条件，先构造图4-18所示的闭合矩形回路 $a\ b\ c\ d\ a$，然后再根据电场的保守性，即静电场沿着任何闭合路径的线积分为零，利用式（4.40）进行推导。令 $\Delta h \to 0$，bc 段和 da 段对线积分的贡献变为零。所以

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} + \int_c^d \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} = 0, \tag{4.87}$$

其中 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{E}_2$ 分别是媒介1和2中的电场，用图4-18中的切向分量和法向分量表示时，有

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{1t} + \mathbf{E}_{1n}, \tag{4.88a}$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{2t} + \mathbf{E}_{2n} \tag{4.88b}$$

在 $a\ b$ 段上，$\mathbf{E}_{2t}$ 和 $d\mathbf{l}$ 具有相同的方向，而在 $d\ c$ 段，$\mathbf{E}_{1t}$ 和 $d\mathbf{l}$ 方向相反。因此，式（4.87）变为

$$E_{2t}\Delta l - E_{1t}\Delta l = 0 \tag{4.89}$$

即

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (\text{V/m}) \tag{4.90}$$

因此，任何两种媒介交界面两侧的电场切向分量是连续的。因为 $D_{1t}=\varepsilon_1 E_{1t}$，$D_{2t}=\varepsilon_2 E_{2t}$，所以电通量密度的切向分量的边界条件为

$$\frac{D_{1t}}{\varepsilon_1}=\frac{D_{2t}}{\varepsilon_2} \tag{4.91}$$

接下来应用高斯定理，即式（4.29），以确定 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 的法向分量的边界条件。根据高斯定理，从图 4-18 中的小圆柱体的三个表面流出 D 的总通量，必须等于圆柱体包围的总电荷。令圆柱体的高度 $\Delta h\to 0$，侧面对总通量的贡献变为零。此外，即使两种媒介内部恰巧有自由的（或束缚的）体电荷密度，但由于 $\Delta h\to 0$，圆柱体中剩余的电荷也将只能是分布在边界上的电荷。因此，$Q=\rho_s\Delta s$，所以有

164

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{s}=\int_{\text{top}}\boldsymbol{D}_1\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_2 ds+\int_{\text{bottom}}\boldsymbol{D}_2\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_1 ds=\rho_S\Delta s, \tag{4.92}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{n}}_1$ 和 $\hat{\boldsymbol{n}}_2$ 分别是下底和上底的单位外法向矢量。一定要记住的是，任何媒介表面的单位法向矢量，总是定义为从该媒介往外的。由于 $\hat{\boldsymbol{n}}_1=-\hat{\boldsymbol{n}}_2$，因此式（4.92）简化为

$$\hat{\boldsymbol{n}}_2\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\rho_S \quad (\text{C/m}^2) \tag{4.93}$$

定义 D_{1n}和 D_{2n}为沿着 $\hat{\boldsymbol{n}}_2$ 的 $\boldsymbol{D}_1$ 和 $\boldsymbol{D}_2$ 的法向分量，则有

$$D_{1n}-D_{2n}=\rho_S \quad (\text{C/m}^2) \tag{4.94}$$

所以，在交界面充有电荷的情况下，$\boldsymbol{D}$ 的法向分量存在突变，突变的数值等于面电荷密度。$\boldsymbol{E}$ 的法向分量对应边界条件为

$$\varepsilon_1 E_{1n}-\varepsilon_2 E_{2n}=\rho_S \tag{4.95}$$

总之：（1）电场 $\boldsymbol{E}$ 的保守场性质导致了电场 $\boldsymbol{E}$ 的切向分量沿边界连续；

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0\Longleftrightarrow\oint_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=0, \tag{4.96}$$

（2）电通量密度 $\boldsymbol{D}$ 的散度性质导致了电通量密度 $\boldsymbol{D}$ 的法向分量在边界上发生 ρ_s 的突变。

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_v\Longleftrightarrow\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{s}=Q, \tag{4.97}$$

不同媒介之间的边界条件归总在表 4-3 中。

表 4-3 电场的边界条件

场分量	任何两种媒介	媒介 1 电介质 ε_1 / 媒介 2 电介质 ε_2	媒介 1 电介质 ε_1 / 媒介 2 导体
切向的 $\boldsymbol{E}$	$E_{1t}=E_{2t}$	$E_{1t}=E_{2t}$	$E_{1t}=E_{2t}=0$
切向的 $\boldsymbol{D}$	$D_{1t}/\varepsilon_1=D_{2t}/\varepsilon_2$	$D_{1t}/\varepsilon_1=D_{2t}/\varepsilon_2$	$D_{1t}=D_{2t}=0$
法向的 $\boldsymbol{E}$	$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\varepsilon_1\boldsymbol{E}_1-\varepsilon_2\boldsymbol{E}_2)=\rho_S$	$\varepsilon_1 E_{1n}-\varepsilon_2 E_{2n}=\rho_S$	$E_{1n}=\rho_S/\varepsilon_1$　$E_{2n}=0$
法向的 $\boldsymbol{D}$	$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\rho_S$	$D_{1n}-D_{2n}=\rho_S$	$D_{1n}=\rho_S$　$D_{2n}=0$

注：（1）ρ_s 是边界上的面电荷密度；（2）$\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{D}_1$、$\boldsymbol{E}_2$ 和 $\boldsymbol{D}_2$ 的法向分量是沿 $\hat{\boldsymbol{n}}_2$ 定义的，即沿媒介 2 的外法向的。

例 4-10 边界条件的应用

如图 4-19 所示，x-y 平面上没有电荷，它将介电常数分别为 ε_1、ε_2 的两种媒介分开。如果媒介 1 中的电场为 $\boldsymbol{E}_1=\hat{\boldsymbol{x}}E_{1x}+\hat{\boldsymbol{y}}E_{1y}+\hat{\boldsymbol{z}}E_{1z}$，求：（a）媒介 2 中的电场 $\boldsymbol{E}_2$；

(b) 角度 θ_1 和 θ_2。

解答：(a) 设 $\boldsymbol{E}_2=\hat{\boldsymbol{x}}E_{2x}+\hat{\boldsymbol{y}}E_{2y}+\hat{\boldsymbol{z}}E_{2z}$。求解的任务就是用 $\boldsymbol{E}_1$ 的分量来表示 $\boldsymbol{E}_2$ 的分量。边界的法向为 $\hat{\boldsymbol{z}}$。因此场的 x、y 分量同边界相切，z 分量同边界垂直。在边界上无电荷的情况下，$\boldsymbol{E}$ 的切向分量及 $\boldsymbol{D}$ 的法方向分量是连续的。所以

165

$$E_{2x}=E_{1x},\qquad E_{2y}=E_{1y}$$

以及

$$D_{2z}=D_{1z}\quad 或\ \varepsilon_2E_{2z}=\varepsilon_1E_{1z}$$

因此

$$\boldsymbol{E}_2=\hat{\boldsymbol{x}}E_{1x}+\hat{\boldsymbol{y}}E_{1y}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}E_{1z} \tag{4.98}$$

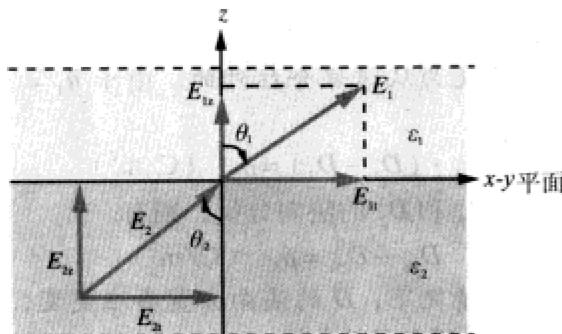


图4-19 两媒介交界边界条件的应用（例4-10）

(b) $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 的切向分量分别是 $E_{1t}=\sqrt{E_{1x}^2+E_{1y}^2}$，$E_{2t}=\sqrt{E_{2x}^2+E_{2y}^2}$。所以角度 θ_1 和 θ_2 为

$$\tan\theta_1=\frac{E_{1t}}{E_{1z}}=\frac{\sqrt{E_{1x}^2+E_{1y}^2}}{E_{1z}},$$

$$\tan\theta_2=\frac{E_{2t}}{E_{2z}}=\frac{\sqrt{E_{2x}^2+E_{2y}^2}}{E_{2z}}=\frac{\sqrt{E_{1x}^2+E_{1y}^2}}{(\varepsilon_1/\varepsilon_2)E_{1z}},$$

角度之间的关系为

$$\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1}=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \tag{4.99}$$

■

练习4.16 参考图4-19，求 $\boldsymbol{E}_1$。已知 $\boldsymbol{E}_2=\hat{\boldsymbol{x}}2-\hat{\boldsymbol{y}}3+\hat{\boldsymbol{z}}3$ (V/m)，$\varepsilon_1=2\varepsilon_0$ 和 $\varepsilon_2=8\varepsilon_0$，并假定边界无电荷。

答案：$\boldsymbol{E}_1=\hat{\boldsymbol{x}}2-\hat{\boldsymbol{y}}3+\hat{\boldsymbol{z}}12$ (V/m)。(参见◉)

练习4.17 若边界面电荷密度为 $\rho_s=3.54\times10^{-11}$ (C/m²)，重做练习4.16。

答案：$\boldsymbol{E}_1=\hat{\boldsymbol{x}}2-\hat{\boldsymbol{y}}3+\hat{\boldsymbol{z}}14$ (V/m)。(参见◉)

4.9.1 电介质－导体边界

在图4-18中，考虑媒介1为电介质，媒介2为理想导体的情况。在理想导体中，任何一点都有 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{D}=0$。因此有 $\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{D}_2=0$，这要求 $\boldsymbol{E}_2$ 和 $\boldsymbol{D}_2$ 的切向分量和法向分量

都为零。所以，根据式（4.90）和式（4.94），在同导体交界的电介质中，其场分量为

$$E_{1t} = D_{1t} = 0, \quad (4.100a)$$

$$D_{1n} = \varepsilon_1 E_{1n} = \rho_s \quad (4.100b)$$

这两个边界条件可以组合为

$$\boldsymbol{D}_1 = \varepsilon_1 \boldsymbol{E}_1 = \hat{\boldsymbol{n}}\rho_s \quad \text{（在导体表面）}, \quad (4.101)$$

166

其中 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 是从导体表面指向外部的单位矢量。这意味着，当 ρ_s 为正时，电场线是垂直从导体表面穿出的，当 ρ_s 为负时，电场线是垂直从导体表面进入的。

在图 4-20 中，一个无限长的导电厚板放置在均匀电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中。厚板上下的媒介介电常数为 ε_1。由于在上表面电场 $\boldsymbol{E}_0$ 垂直离开，它在上表面感应出正的电荷面密度 $\rho_s = \varepsilon_1 |\boldsymbol{E}_0|$。在下表面电场 $\boldsymbol{E}_0$ 垂直进入，因此感应出负的电荷面密度 $-\rho_s$。两表面上电荷的出现，在导体内部感应出电场 $\boldsymbol{E}_i$，导体内部总电场变为 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_i$。为了满足导体内部电场处处为零的要求，$\boldsymbol{E}_i$ 必须等于 $-\boldsymbol{E}_0$。

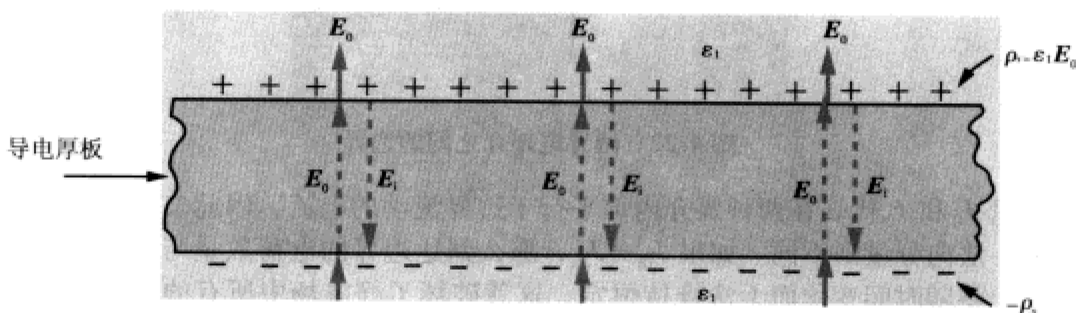


图 4-20　当导电厚片放置在外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中时，积聚在导体表面的电荷产生内电场 $\boldsymbol{E}_i = -\boldsymbol{E}_0$。因此导体内部的总电场为零

如图 4-21 所示，若将一个金属球放入静电场中，负电荷将聚集在下半球，正电荷将聚集在上半球。球的出现，引起场线弯曲，以满足式（4.101）给定的条件，即 $\boldsymbol{E}$ 总垂直于导体的边界面。

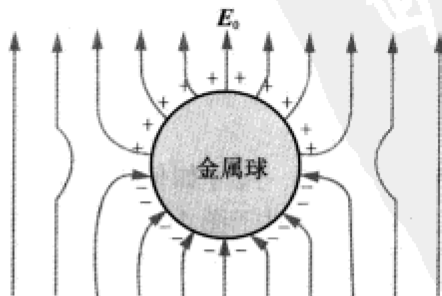


图 4-21　金属球放入外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中

4.9.2　导体－导体边界

现在讨论一般性的情况，即边界两侧的媒介既不是理想的电介质，也不是理想

167

的导体的情况。如图4-22所示，媒介1的介电常数为ε_1，电导率为σ_1，媒介2的介电常数为ε_2，电导率为σ_2，两者的交界面上有电荷面密度ρ_s。对于电场，由式(4.90)和式(4.95)可得

$$E_{1t}=E_{2t},\quad \varepsilon_1 E_{1n}-\varepsilon_2 E_{2n}=\rho_s \tag{4.102}$$

因为处理的是导电媒介，电场将引起电流密度$\boldsymbol{J}_1$和$\boldsymbol{J}_2$，其中$\boldsymbol{J}_1$正比于$\boldsymbol{E}_1$，$\boldsymbol{J}_2$正比于$\boldsymbol{E}_2$。根据$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$，可得

$$\frac{J_{1t}}{\sigma_1}=\frac{J_{2t}}{\sigma_2},\quad \varepsilon_1\frac{J_{1n}}{\sigma_1}-\varepsilon_2\frac{J_{2n}}{\sigma_2}=\rho_s \tag{4.103}$$

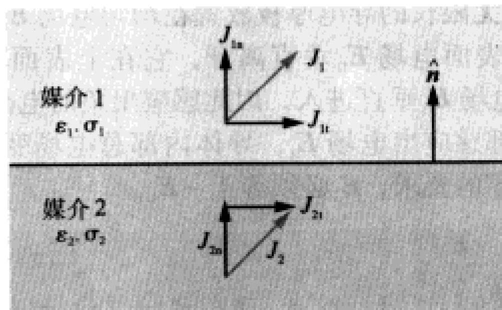


图4-22　两导电媒介之间的边界

切向分量J_{1t}和J_{2t}代表在两种媒介内部平行于边界流动的电流，因此二者之间没有电荷传递。法向分量则不同。如果$J_{1n}\neq J_{2n}$，那么到达边界的电荷数量与离开的数量不相同，ρ_s将随时间变化而无法维持恒定，这就破坏了静电场中所有的场和电荷保持常数的要求。因此，在静电场中，在两种不同媒介的交界面上，$\boldsymbol{J}$的法向分量必须连续。在式(4.103)中，令$J_{1n}=J_{2n}$，得到

$$J_{1n}\left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}-\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}\right)=\rho_s\quad（静电场） \tag{4.104}$$

复习题

Q4.23　在导体-电介质交界的情况下，电场的边界条件是什么？

Q4.24　在静电场中，为什么要求两种导体交界面上$J_{1n}=J_{2n}$？

4.10　电容

任何两个导电物体，无论其形状、尺寸如何，当它们被绝缘体（电介质）分隔时，就形成一个电容器（capacitor）。对于图4-23所示的任意导体，当直流电压源连接到它们上面时，电量相等、极性相反的电荷就聚集到两导体的表面。连接到电源正极的导体表面将聚集$+Q$的电荷，而另一个导体表面则聚集$-Q$的电荷。根据4.7节的讨论，当导体上存在多余的电荷时，这些电荷将以维持导体内的电场处处为零的方式，分布在导体的表面。这保证了导体为一个等位体，即保证了导体中每一点的电位相同。两导体电容器的电容（capacitance）定义为

168

$$C = \frac{Q}{V} \quad (\text{C/V 或 F}), \tag{4.105}$$

其中 V 是具有电荷 $+Q$ 和 $-Q$ 的两导体间的电位差。电容的单位是法拉（F），跟库仑每伏特（C/V）是等效的。

如图 4-23 所示，自由电荷在导体表面的出现，将产生一个电场 $\boldsymbol{E}$。场线起始于正电荷，终结于负电荷，因为在导体表面 $\boldsymbol{E}$ 的切向分量总是零，所以 $\boldsymbol{E}$ 总是垂直于导体表面的。在两导体表面任何一点，$\boldsymbol{E}$ 的法向分量为

$$E_n = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho_s}{\varepsilon} \quad (\text{在导体表面}), \tag{4.106}$$

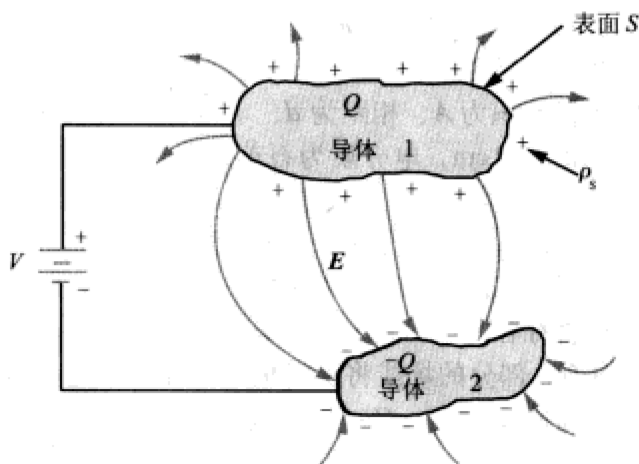


图 4-23 直流电压源连接到两个导电体构成的电容器

其中，ρ_s 是导体表面一点上的面电荷密度，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 是同一点的外法向单位矢量，ε 是分隔两导体的电介质的介电常数。电荷 Q 等于 ρ_s 沿表面 S 的面积分（图 4-23）：

$$Q = \int_S \rho_s \mathrm{d}s = \int_S \varepsilon \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{E} \mathrm{d}s = \int_S \varepsilon \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}, \tag{4.107}$$

其中使用了式（4.106）。式（4.39）将电压 V 和电场 $\boldsymbol{E}$ 联系在一起，即

$$V = V_{12} = -\int_{P_2}^{P_1} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}, \tag{4.108}$$

其中，点 P_1、P_2 分别是导体 1 和导体 2 上的任意两点。将式（4.107）、式（4.108）分别代入式（4.105），得到

$$C = \frac{\int_S \varepsilon \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}}{-\int_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}} \quad (\text{F}) \tag{4.109}$$

其中，l 是从导体 2 到导体 1 的积分路径。在应用式（4.109）时，为了避免符号错误，必须记住表面 S 是 $+Q$ 所在的面，P_1 是 S 上的一点。由于 $\boldsymbol{E}$ 同时出现在式（4.109）的分子和分母中，因此，对于任何配置的电容器，其电容值 C 总是跟电场 $\boldsymbol{E}$ 无关的。实际上，C 仅仅依赖于电容器的几何参数（尺寸、形状和两导体的相对位置）以及绝缘材料的介电常数。

如果两导体间的绝缘材料不是理想的电介质（即存在一个小电导率 σ），则将显示出一定的电阻 R，在两导体间将形成通过绝缘材料的电流。对于任意形状的电阻，其 R 的计算通式为式（4.71），即

$$R = \frac{-\int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}} \quad (\Omega) \tag{4.110}$$

对于具有均匀 σ 和 ε 的材料，由式（4.109）和式（4.110）的乘积得到

169

$$RC = \frac{\varepsilon}{\sigma} \tag{4.111}$$

当已知 C 时，用这个简单关系可以求得 R，反之亦然。

例 4-11 平行板电容器的电容及击穿电压

平行板电容器的极板面积为 A、相距为 d，求电容 C 的表达式。填充电容器的电介质介电常数为 ε。如果 $d = 1\text{cm}$，电介质为石英，确定其击穿电压。

解答： 在图4-24中，将电容器的下极板放置在 x-y 平面上，上极板放在 $z = d$ 处。因为所施加的电压为 V，$+Q$ 电荷均匀分布在上极板，$-Q$ 均匀分布在下极板。在极板之间的电介质中，电荷感应出一个均匀的电场，方向沿 $-\hat{z}$（从正电荷到负电荷）。此外，在极板的边沿还将存在一些边缘场线（fringing field line），但只要极板的尺寸远大于分隔距离 d，则绝大部分的场线将从极板间的媒介通过，边缘场线的影响可以忽略不计。上极板的电荷密度为 $\rho_s = Q/A$。因此

$$\mathbf{E} = -\hat{z}E,$$

根据式（4.106），在导体－电介质的交界面上，$\mathbf{E}$ 的幅值为 $E = \rho_s/\varepsilon = Q/\varepsilon A$。根据式（4.108），电位差为

$$V = -\int_0^d \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_0^d (-\hat{z}E) \cdot \hat{z}dz = Ed, \tag{4.112}$$

电容为

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{Ed} = \frac{\varepsilon A}{d}, \tag{4.113}$$

其中利用了关系 $E = Q/\varepsilon A$。

图4-24 一直流电压源连接到平行板电容器（例4-11）

根据 $V = Ed$，即式（4.112），当 $E = E_{ds}$，即等于材料的绝缘强度时，有 $V = V_{br}$。从表 4-2 得到石英的 $E_{ds} = 30(\text{MV/m})$。因此，击穿电压为

$$V_{br} = E_{ds}d = 30 \times 10^6 \times 10^{-2} = 3 \times 10^5(\text{V})$$

■ 170

例 4-12 同轴线的电容

求如图 4-25 所示同轴电缆的电容表达式。

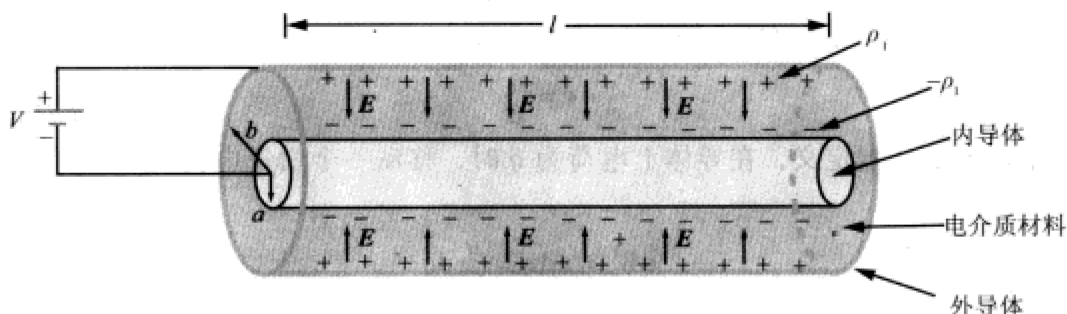


图 4-25 绝缘材料的介电常数为 ε 的同轴电容（例 4-12）

解答：如图 4-25 所示，当大小为 V 的电压施加在电容上时，外导体与内导体上将分别聚集 $+Q$ 和 $-Q$ 的电荷。假定这些电荷均匀分布在导体长度上，外导体每单位长度的线电荷密度为 $\rho_l = Q/l$，内导体为 $-\rho_l$。忽略同轴线端部的边缘场，围绕内导体构建一个圆柱形高斯面，半径为 $r(a<r<b)$。内导体是类似例 4-6 的线电荷，只不过其电荷极性是负的。因此，将式（4.33）的电场 $\boldsymbol{E}$ 的表达式加上一个负号，得到

$$\boldsymbol{E} = -\hat{\boldsymbol{r}}\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon r} = -\hat{\boldsymbol{r}}\frac{Q}{2\pi\varepsilon r l} \tag{4.114}$$

内外导体间的电位差 V 为

$$V = -\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_a^b \left(-\hat{\boldsymbol{r}}\frac{Q}{2\pi\varepsilon r l}\right)\cdot(\hat{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{4.115}$$

所以电容 C 为

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln(b/a)} \tag{4.116}$$

每单位长度同轴电缆的电容为

$$C' = \frac{C}{l} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)} \quad (\text{F/m}) \tag{4.117}$$

■

复习题

Q4.25 两导体结构间的电容同导体间绝缘材料的电阻之间有何关系？

Q4.26 什么是边缘场？何时可以忽略？

171

4.11 静电场的位能

将电源连接到电容器上，在电容器的充电过程中，电源要消耗能量。如果导体

极板由等效电阻为零的良导体构成，并且分离极板的电介质的电导率也可以忽略，那么将不会有实际的电流通过电介质，在电容器中不会有任何欧姆损耗。在这种情况下，充电的能量到哪里去了呢？能量最终以静电位能（electrostatic potential energy）的形式存储到电介质中去了！所存储的能量 W_e 由 $\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 决定。

在两导体间电介质中的电场作用下，一个导体积聚了电荷 q，另外一个导体则积聚了电量相同、极性相反的电荷。从效果上看，这等效于电荷 q 从一个导体转移到了另外一个导体。电容器两端的电压 v 同 q 间的关系为

$$v = \frac{q}{C} \tag{4.118}$$

根据电位 V 的基本定义，在导体上电荷为 q 时，移动一个增量电荷 $\mathrm{d}q$ 所要做的功 $\mathrm{d}W_e$ 为

$$\mathrm{d}W_e = v\,\mathrm{d}q = \frac{q}{C}\mathrm{d}q \tag{4.119}$$

如果从尚未充电的状态开始，将电容器从 0 电荷充电到电荷 Q，所做的总功为

$$W_e = \int_0^Q \frac{q}{C}\mathrm{d}q = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \quad (\mathrm{J}) \tag{4.120}$$

利用定义 $C = Q/V$（V 为最终的电压），W_e 可以写成

$$W_e = \frac{1}{2}CV^2 \quad (\mathrm{J}) \tag{4.121}$$

对于例 4-11 所讨论的平行板电容器，其电容由式（4.113）给定为 $C = \varepsilon A/d$（其中 A 为每个极板的面积，d 是极板间的距离）。此外，电容器两端的电压 V 同电介质中电场的幅值 E 的关系为 $V = Ed$。将这两个表达式代入式（4.121），得

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon A}{d}(Ed)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2(Ad) = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 v, \tag{4.122}$$

其中，$v = Ad$ 是电容器的体积。

静电能密度（electrostatic energy density）w_e 定义为每单位体积中的静电位能 W_e

$$w_e = \frac{W_e}{v} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \quad (\mathrm{J/m^3}) \tag{4.123}$$

虽然这一表达式是从平行板电容器推得的，却对任何处于电场 $\boldsymbol{E}$ 中的电介质同样有效。更进一步，对于包含电介质 ε 的任何体积 v，存储在其中的总静电位能为

$$W_e = \frac{1}{2}\int_v \varepsilon E^2 \mathrm{d}v \quad (\mathrm{J}) \tag{4.124}$$

再回到平行板电容器的情况，其反向充电的两个极板之间，存在着相互吸引的电场力 $\boldsymbol{F}$。作用在任何电荷系统的力，都可以从能量角度求取。在接下来的内容中，将介绍如何从 W_e，即电荷在系统中引起的静电储能，来求取 $\boldsymbol{F}$。下面的推导尽管有时用电容器的例子进行解释说明，但在本质上是通用的。

如果平行板电容器的两极板可以彼此移动靠近的话，那么在电场力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下，两板彼此移近一个微分距离 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，在保持板上电荷不变的条件下，系统（指充电的电容器）所做的机械功为

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{4.125}$$

172

对于孤立系统，这一机械功将通过消耗静电能来提供。因此，$\mathrm{d}W$ 等于电容的电介质绝缘材料中所存储能量的损失，即

$$\mathrm{d}W = -\mathrm{d}W_e \tag{4.126}$$

根据式（3.73），$\mathrm{d}W_e$可以写成 W_e的梯度形式

$$\mathrm{d}W_e = \nabla W_e \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{4.127}$$

将式（4.125）和式（4.127）代入式（4.126），比较两端可得

$$\boldsymbol{F} = -\nabla W_e \quad (\mathrm{N}) \tag{4.128}$$

必须注意的是，式（4.128）是在假定系统的电荷保持恒定的情况下获得的。

为了将式（4.128）用于平行板电容器，把式（4.120）重写成以下形式

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2 z}{2\varepsilon A}, \tag{4.129}$$

其中把极板间的垂直距离 d 替换成了变量 z。将式（4.129）代入式（4.128）得

$$\boldsymbol{F} = -\nabla W_e = -\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Q^2 z}{2\varepsilon A}\right) = -\hat{\boldsymbol{z}}\left(\frac{Q^2}{2\varepsilon A}\right), \tag{4.130}$$

因为 $Q = \varepsilon A E$，所以 $\boldsymbol{F}$ 可以写成

$$\boldsymbol{F} = -\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\varepsilon A E^2}{2} \quad （平行板电容器） \tag{4.131}$$

复习题

Q4.27 将电荷 q 从无穷远处移动到空间给定点，要消耗一定的功 W。对应 W 的能量哪里去了？

Q4.28 当电压源连接到电容器上时，作用在两导电表面的电场力的方向如何？

练习 4.18 同轴电缆的内、外导体半径分别是 2cm 和 5cm，内外导体之间绝缘材料的相对介电常数为 4。外导体上的电荷密度是 $\rho_l = 10^{-4}$ (C/m)。利用例 4-12 中推导的 $\boldsymbol{E}$ 的表达式，求 20cm 长的一段电缆中存储的总能量。

答案：$W_e = 4.1$J。（参见 ）

4.12 镜像法

在图 4-26 的左侧，有一个接地的无穷大的理想导电平板，在其上方距离为 d 的位置，有一个点电荷 Q。现在要确定接地导体上方空间任何一点的 V、$\boldsymbol{E}$ 以及 $\boldsymbol{D}$，以及导电平板上的面电荷分布。本章前面介绍了三种不同的求 $\boldsymbol{E}$ 的方法。第一种方法基于库仑定律，要确定空间某点的 $\boldsymbol{E}$，就必须已知所有对 $\boldsymbol{E}$ 有贡献的电荷的位置和大小。对于目前的问题，由于 Q 将在导体表面感应出未知的非均匀分布的电荷，因此库仑定律无法使用。第二种方法基于高斯定理，它同样难以适应目前的问题，因为难以构造出一个这样的高斯面，它上面的电场 $\boldsymbol{E}$ 始终与它相切或始终与它垂直。第三种方法是先根据已知的边界条件，求解泊松方程或拉普拉斯方程，以获得 V，再由 $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ 求电场。对目前的问题，边界条件就是在接地导电平面上以及在无穷远处，$V = 0$。从原理上讲，这种方法是可行的，然而其求解在数学上却极其复杂。

173

对于目前的问题，其实有一种极其容易的方法，就是利用镜像原理（image theo-

ry)。镜像原理指出，位于无穷大的、理想导电平板上方空间的任何电荷配置，在电气上都等效于原来的电荷配置和它的镜像配置在拿走导电平板以后二者的组合。在图4-26的右边，给出了导电平板上部电荷 Q 的镜像法等效。它包包括电荷 Q 以及距离它 $2d$ 的镜像电荷 $-Q$，在二者之间没有任何其他东西。由这两个孤立电荷在任何点 (x,y,z) 产生的电场，可以像后面的例4-13那样，很容易地利用库仑定律确定。这两个电荷的组合，将在原来导电平板所在的表面上产生 $V=0$ 的电位。如果电荷处在不止一个接地平面的场合中，就必须相对每个平面设置电荷的镜像，然后再为每个电荷相对未等效的平面设置镜像。这个过程要一直持续下去，直到所有接地平面上各点都满足 $V=0$ 条件为止。镜像法不仅适用于点电荷，也适用于任何形式的分布电荷，例如图4-27所示的线分布电荷、体分布电荷等。

174

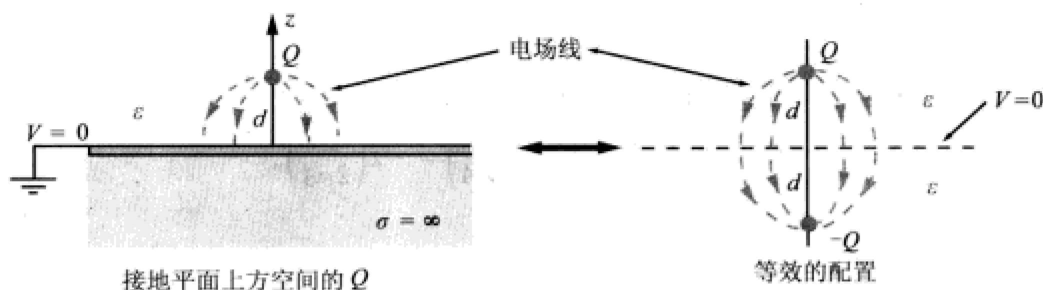


图4-26　根据镜像原理，在接地的理想导体平面上方空间的电荷 Q，等效于在移去接地平面以后 Q 和它的镜像 $-Q$ 的组合

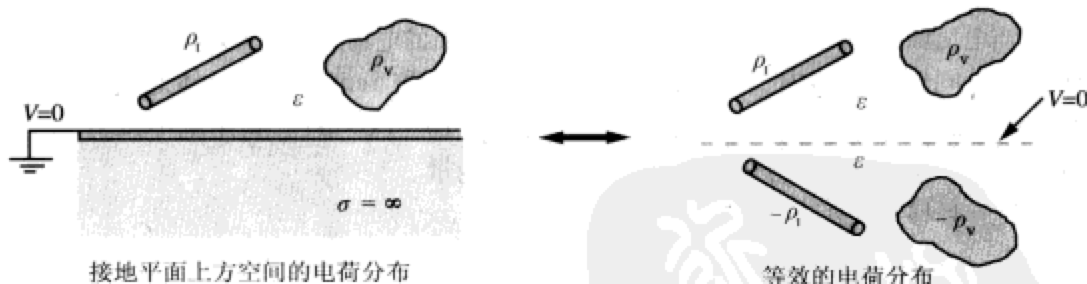


图4-27　导电平面上方空间的分布电荷及其镜像法等效

例4-13　导电平面上方空间电荷的镜像法

接地的无穷大导电平面和 x-y 平面重合，电荷 Q 位于 z 轴上 $z=d(d>0)$ 处的自由空间，应用镜像法求自由空间中 $z>0$ 的区域中任一点 $P(x,y,z)$ 处的 $\mathbf{E}$。

解答：在图4-28的直角坐标系中，电荷 Q 位于点 $(0,0,d)$，其镜像 $-Q$ 位于点 $(0,0,-d)$。根据式（4.19），两个点电荷在点 $P(x,y,z)$ 产生的电场为

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q\mathbf{R}_1}{R_1^3}+\frac{-Q\mathbf{R}_2}{R_2^3}\right)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\hat{\mathbf{x}}x+\hat{\mathbf{y}}y+\hat{\mathbf{z}}(z-d)}{[x^2+y^2+(z-d)^2]^{3/2}}-\frac{\hat{\mathbf{x}}x+\hat{\mathbf{y}}y+\hat{\mathbf{z}}(z+d)}{[x^2+y^2+(z+d)^2]^{3/2}}\right]$$

其中 $z\geqslant0$。■

练习4.19　利用例4-13的结果求导电平面的面电荷密度 ρ_s。

答案：$\rho_s=-Qd/[2\pi(x^2+y^2+d^2)^{3/2}]$。（参见光盘）

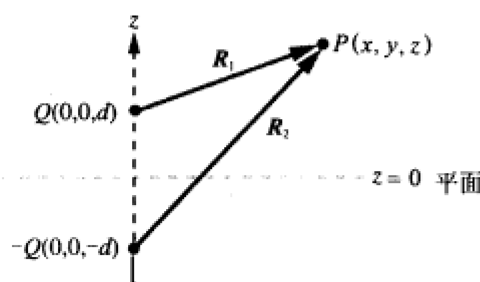


图 4-28 应用镜像法求点 P 的 $\boldsymbol{E}$（例 4-28）

D4.11-4.13

复习题

Q4.29 镜像法的基本前提是什么？

Q4.30 给定某种电荷分布，本章介绍了哪些方法可以计算空间给定点的电场 $\boldsymbol{E}$？

本章要点

- 麦克斯韦方程组是电磁理论的基本骨架。
- 在静态条件下，麦克斯韦方程组分离成互不耦合的两对，一对描述静电场，另一对描述静磁场。
- 库仑定律为给定分布的电荷所产生的电场提供了一个显式表达式。
- 高斯定理指出，通过封闭面的总电场通量等于该面所包围的净电荷。
- 在静电场中，一点的电场 $\boldsymbol{E}$ 同该点的电位 V 之间的关系为 $\boldsymbol{E}=-\nabla V$，电位 V 采用无穷远处做零参考电位。
- 大多数金属的电导率在 10^6(S/m)的数量级，因此在实际应用中当做理想导体处理。同样，电导率小于 10^{-10}(S/m)的绝缘体则当做理想电介质处理。
- 两种媒介交界面的边界条件，确定了其中一种媒介的 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{J}$ 的法向分量以及切向分量，同另一种媒介中的对应分量之间的关系。
- 双导体结构的电容以及导体间媒介的电阻，可以利用该媒介中的电场的信息来计算。
- 存储在电介质媒介中的静电能密度为 $w_e=(1/2)\varepsilon E^2$ (J/m^3)。
- 当一个电荷配置存在于无限大、理想的导电平面上方时，其感应出的电场 $\boldsymbol{E}$，与移走导电平面时，由原电荷配置及其镜像一起产生的电场相同。

175

重要术语汇总

给出下列术语的解释或定义

静态条件	静电学	体（面、线）电荷密度	电流密度 $\boldsymbol{J}$
传导电流	运流电流	电场强度 $\boldsymbol{E}$	电通量密度 $\boldsymbol{D}$
库仑定律	高斯定理	高斯面	保守场
电位	电偶极子	偶极矩 $\boldsymbol{p}$	构造参数

电导率 σ	导体	电介质材料	半导体
超导体	电子漂移速度 $\boldsymbol{u}_e$	空穴漂移速度 $\boldsymbol{u}_h$	理想导体
理想电介质	电子迁移率 μ_e	空穴迁移率 μ_h	欧姆定律
电导 G	焦耳定律	边界条件	极化矢量 $\boldsymbol{P}$
线性媒介	各向同性媒介	均质媒介	电极化率 χ_e
介电常数 ε	相对介电常数 ε_r	电介电强度	电介质击穿
电容 C	静电位能 W_e	静电能密度 w_e	镜像法

习题

4.2 电荷及电流分布

4.1* 边长为2m的立方体位于直角坐标系的第一象限，其一个顶点同原点重合。已知其体电荷密度为 $\rho_v = xy^2 e^{-2z}$ (mC/m^3)，求立方体中的总电荷。

4.2 求圆柱体包含的总电荷。已知圆柱体由 $r \leqslant 2$m 及 0m$\leqslant z \leqslant$3m 确定，$\rho_v = 10rz$ (mC/m^3)。

4.3* 求圆锥包含的总电荷。已知圆锥由 $R \leqslant 2$m 及 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$ 确定，$\rho_v = 20R^2\cos^2\theta$ (mC/m^3)。

176

4.4 如果线电荷密度为 $\rho_l = 12y^2$ (mC/m)，求分布在 y 轴上从 $y = -5$m 到 $y = 5$m 的总电荷。

4.5* 求 $r \leqslant a$，$z = 0$ 的圆盘上的总电荷（已知 ρ_{s0} 为常数）：

(a) $\rho_s = \rho_{s0}\sin\phi$ (C/m^2)；

(b) $\rho_s = \rho_{s0}\sin^2\phi$ (C/m^2)；

(c) $\rho_s = \rho_{s0}e^{-r}$ (C/m^2)；

(d) $\rho_s = \rho_{s0}e^{-r}\sin^2\phi$ (C/m^2)。

4.6 如果 $\boldsymbol{J} = \hat{\boldsymbol{y}}\,2xz$ (A/m^2)，一个正方形的四角在点(0,0,0)、(2,0,0)、(2,0,2)以及(0,0,2)，求流过该正方形区域的电流 I。

4.7* 如果 $\boldsymbol{J} = \hat{\boldsymbol{R}}\,25/R$ (A/m^2)，求流过 $R = 5$m 的球面的电流 I。

4.8 电子束的形状是半径为 r_0 的圆柱体，其电荷密度为

$$\rho_v = \left(\frac{-\rho_0}{1+r^2}\right) \quad (\text{C/m}^3)$$

其中，ρ_0 正常数，电子束轴线与 z 轴一致。

(a) 求长度为 L 的一段电子束中的总电荷。

(b) 如果电子沿正 z 轴以均匀速度 u 运动，求流过 z 平面的电流的幅值和方向。

4.3 库仑定律

4.9* 边长为2m的正方形，有四个20μC的点电荷分布在四角上。求正方形中心以上5m处的电场。

4.10 三个电量为 $q = 3$nC 的点电荷，位于 x-y 平面的直角三角形的顶点上，其中一个顶点在原点，另外一个在(2cm,0,0)，第三个在(0,2cm,0)。求原点的电荷所受的力。

---

* 答案见附录D。

解答见CD-ROM。

4.11* 电荷 $q_1=4\mu C$ 位于点(1cm,1cm,0)，电荷 q_2 位于(0,0,4cm)。已知点(0,2cm,0)的 $\boldsymbol{E}$ 没有 y 分量，求 q_2。

4.12 位于空气中沿着 z 轴的线电荷，密度为 $\rho_l=4(\mu C/m)$，范围为 $z=0$ 到 $z=5cm$。求点（0，10cm，0）处的电场 $\boldsymbol{E}$。

4.13* x-y 平面上 $r=2cm$，$0\leqslant\phi\leqslant\pi/4$ 的一段圆弧上分布有线电荷，$\rho_l=5(\mu C/m)$。求点 $(0,0,z)$ 处的 $\boldsymbol{E}$，并计算以下点的值：

(a) 原点；

(b) $z=5cm$；

(c) $z=-5cm$。

4.14 均匀线电荷 ρ_l 分布在 z 轴的 $z=-L/2$ 和 $z=L/2$ 的范围。应用库仑定律求位于 x-y 平面上任意点 $P(r,\phi,0)$ 的电场表达式。证明当 L 趋向于无穷大时，结果退化为式(4.33)。

4.15* 针对半径为 a 的电荷圆盘，重做例4-5。假定这里面电荷密度随半径 r 变化的规律为

$$\rho_s=\rho_{s0}r^2\ (C/m^2)$$

这里 ρ_{s0} 为常数。

4.16 不同位置的多个电荷，如果每个电荷所受的作用力大小相等，方向相同，则称该电荷系统处于平衡状态（equilibrium）。假定有两个负电荷，一个位于原点，电量为 $-9e$，另一个位于正 x 轴上离原点 d 距离的地方，电量为 $-36e$。求能使整个系统达到平衡的第三个电荷的位置、极性和大小。

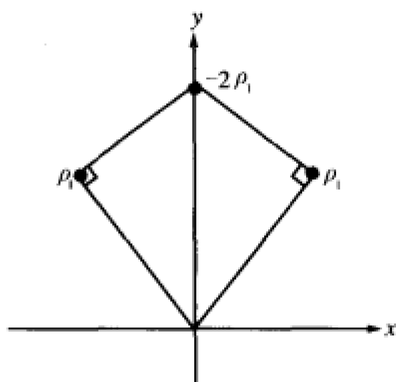


图4-29　习题4.17的风筝状排列的线电荷

4.17* 三根无限长的线电荷，平行 z 轴放置在风筝形状的三个角点上，如图4-29所示。如果两个直角三角形对称（对应边相等），证明原点的电场为零。

4.18 三个无限长的线电荷 $\rho_{l1}=5(nC/m)$，$\rho_{l2}=-5(nC/m)$，以及 $\rho_{l3}=5(nC/m)$，平行于 z 轴放置。它们分别通过 x-y 平面上的点 $(0,-b)$、$(0,0)$、$(0,b)$，求点 $(a,0,0)$ 的电场，并计算当 $a=2cm$，$b=1cm$ 时的值。

4.19 x-y 平面中的一带状区域，y 轴方向的宽度为 d，x 轴方向为无限长，位于空气中，带有均匀电荷面密度 ρ_s。利用库仑定律，求带状区域中心线上方高度为 h 处的 P 点的电场表达式。并令 d 趋于无穷大，将结果同式（4.25）比较。

4.4 高斯定理

4.20 给定电通量密度

$$\boldsymbol{D}=\hat{x}2(x+y)+\hat{y}(3x-2y)\quad (C/m^2)$$

(a) 应用式（4.26）求 ρ_v；

(b) 求位于第一象限，一个顶点在原点，有三边同 x、y、z 轴重合，且边长为2m的立方体中包围的总电荷 Q；

(c) 应用式（4.29）求该立方体中的总电荷 Q。

4.21* 重做习题4.20，假定 $\boldsymbol{D}=\hat{z}xy^2z^3\ (C/m^2)$。

4.22 电荷 Q_1 均匀分布在半径为 a、中心在原点的薄球壳上，电荷 Q_2 均匀分布在半径为

b（$b>a$）、中心在原点的薄球壳上。应用高斯定理分别求区域 $R<a$，$a<R<b$，以及$R>b$中的 $\boldsymbol{E}$。

4.23* 半径为 a、中心在原点的电介质球内的电通量密度为

$$\boldsymbol{D}=\hat{\boldsymbol{R}}\rho_0 R \quad (\mathrm{C/m^2})$$

其中 ρ_0 为常数。求球中的总电荷。

4.24 空间某区域中的电荷密度在柱坐标系中给定为

$$\rho_v=20re^{-r} \quad (\mathrm{C/m^3})$$

应用高斯定理求 $\boldsymbol{D}$。

4.25* 一根无限长的圆柱壳，壳厚从 $r=1\mathrm{m}$ 到 $r=3\mathrm{m}$，包含均匀分布的电荷密度 ρ_{v0}。应用高斯定理求所有区域中的 $\boldsymbol{D}$。

4.26 如果电荷体密度随着到原点的距离增加而线性增加，并已知在原点 $\rho_v=0$，在 $R=$ 2m 处 $\rho_v=10\mathrm{C/m^3}$。求相应的 $\boldsymbol{D}$ 的变化情况。

178

4.5 电位

4.27 自由空间的 x-y 平面上有个边长为 a 的正方形，中心在原点，四边同 x、y 轴平行，在顶点$(a/2,a/2)$以及$(a/2,-a/2)$上各有一个电荷 $+Q$，另外两个顶点上各有一个电荷 $-Q$。

(a) 求 x 轴上任一点 P 的电位；

(b) 求 $x=a/2$ 处的 V。

4.28 图 4-7 的半径为 a 的圆盘具有均匀电荷面密度 ρ_s。

(a) 求 z 轴上点 $P(0,0,z)$的电位 V。

(b) 利用 V 的结果求 $\boldsymbol{E}$，并计算 $z=h$ 处的 $\boldsymbol{E}$。将最终结果同基于库仑定律所得的式(4.24) 比较。

4.29* 半径为 a 的均匀带电圆环位于空气中 x-y 平面，中心在原点，线电荷密度为 ρ_l。

(a) 证明点$(0,0,z)$的电位为 $V=\rho_l a/[2\varepsilon_0(a^2+z^2)^{1/2}]$。

(b) 求对应的电场 $\boldsymbol{E}$。

4.30 证明：在真空中，无限长线电荷 ρ_l 沿 z 轴分布，则离该线电荷的径向距离分别为 r_1 和 r_2的两点之间的电位差 $V_{12}=(\rho_l/2\pi\varepsilon_0)\ln(r_2/r_1)$。

❀ 4.31* 长度为 l 的线电荷与 z 轴重合，范围从 $z=-l/2$ 到 $z=l/2$，线电荷密度为 ρ_l。求x-y 平面上到原点的距离为 b 的一点的电位 V。

4.32 对于图 4-13 所示的电偶极子，$d=1\mathrm{cm}$，在 $R=1\mathrm{m}$，$\theta=0°$处，$|\boldsymbol{E}|=2(\mathrm{mV/m})$。求 $R=2\mathrm{m}$，$\theta=90°$处的 $\boldsymbol{E}$。

4.33 对于图 4-30 所示的每种电位 V 的分布，画出对应的 $\boldsymbol{E}$ 的分布（每种情况下，纵轴的单位都是伏特，横轴的单位是米）。

179

4.34 给定电场

$$\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{R}}\frac{12}{R^2} \quad (\mathrm{V/m})$$

求点 A 相对点 B 的电位。其中 A、B 两点都在 z 轴上，A 点在 $+2\mathrm{m}$ 处，B 点在 $-4\mathrm{m}$ 处。

4.35* 带有均匀线电荷分布 $\rho_l=6(\mathrm{nC/m})$的无限长线，位于 x-y 平面上，平行于 y 轴且 $x=$ 2m 的位置。利用习题 4.30 的结果，求直角坐标系中的点 $A(3\mathrm{m},0,4\mathrm{m})$相对点 $B(0,0,0)$的电位 V_{AB}。

4.36 x-y 平面包含均匀的电荷密度 $\rho_{s1}=0.2(\mathrm{nC/m^2})$，在 $z=6\mathrm{m}$ 的另一个平面上，包含均

匀电荷密度 $\rho_{s2}=-0.2(\mathrm{nC/m^2})$。求 V_{AB}、V_{BC}、V_{AC}。其中坐标为，$A(0,0,6\mathrm{m})$、$B(0,0,0)$、$C(0,-2\mathrm{m},2\mathrm{m})$。

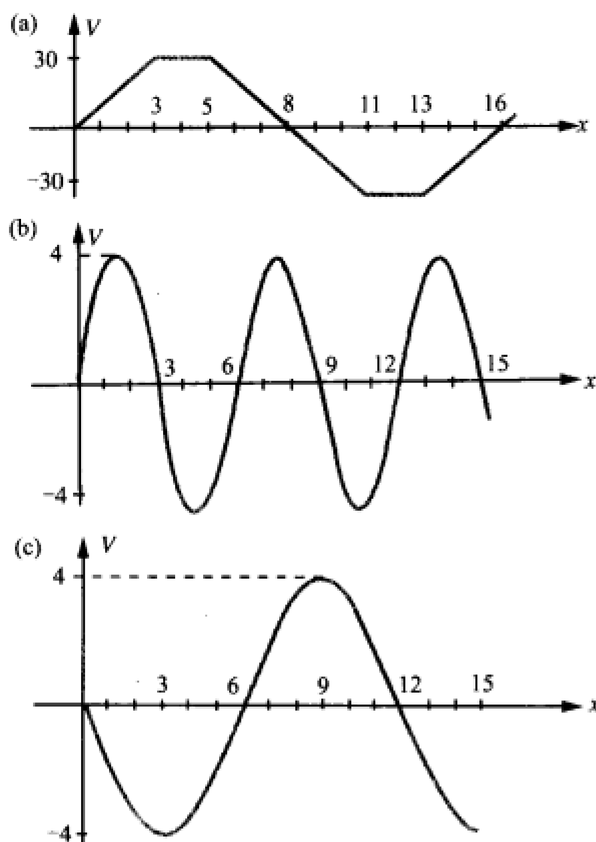


图 4-30　习题 4.33 的电位分布

4.7　导体

4.37* 圆柱形硅棒半径 2mm，长度 5cm。两端施加 5V 电压，$\mu_e=0.13(\mathrm{m^2/V\cdot s})$，$\mu_h=0.05(\mathrm{m^2/V\cdot s})$，$N_e=1.5\times10^{16}$电子/m³，$N_h=N_e$求：

(a) 硅的电导率；

(b) 硅棒中的电流 I；

(c) 漂移速度 $\boldsymbol{u}_e$和 $\boldsymbol{u}_h$；

(d) 硅棒的电阻；

(e) 硅棒消耗的功率。

4.38　重做习题 4.37：材料为锗棒，$\mu_e=0.4(\mathrm{m^2/V\cdot s})$，$\mu_h=0.2(\mathrm{m^2/V\cdot s})$，$N_e=N_h=2.4\times10^{19}$电子或空穴/m³。

4.39　长 100m、横截面均匀的导体，两端电压降为 2V，流经的电流密度为 $7\times10^5(\mathrm{A/m^2})$，鉴定导体的材料。

4.40　长度为 l 的同轴电阻，包括两个同心圆柱。内圆柱半径为 a，材料电导率为 σ_1，外圆柱范围从 $r=a$ 到 $r=b$，材料电导率为 σ_2。如果电阻两端用导电板盖住，证明两端之间的电阻为 $R=l/[\pi(\sigma_1a^2+\sigma_2(b^2-a^2))]$。

4.41* 应用习题4.40的结果，求图4-31所示10cm长空心圆柱体的电阻。材料为碳，电导率为 $\sigma = 3 \times 10^4 (\mathrm{S/m})$。

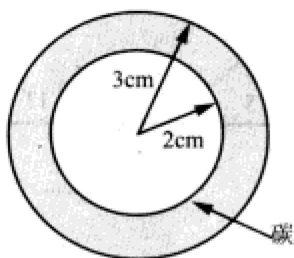


图4-31 习题4-41的空气圆柱体的横截面

4.42 对厚度为 2×10^{-3}mm、边长为10cm的方形铝箔，求

(a) 方形两对边之间的电阻；

180

(b) 两方形面之间的电阻。(材料的电气常数请见附录B)

4.9 边界条件

4.43* 参考图4-19，已知 $\boldsymbol{E}_2 = \hat{\boldsymbol{x}}3 - \hat{\boldsymbol{y}}2 + \hat{\boldsymbol{z}}4 (\mathrm{V/m})$，$\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$，$\varepsilon_2 = 18\varepsilon_0$，交界面上面电荷密度 $\rho_s = 7.08 \times 10^{-11} (\mathrm{C/m^2})$，求 $\boldsymbol{E}_1$。$\boldsymbol{E}_2$ 同 z 轴的夹角是多少？

4.44 一个无限长电介质圆柱体，$\varepsilon_{1r} = 4$，$r \leqslant 10$cm，周围被 $\varepsilon_{2r} = 8$ 的电介质围绕。如果圆柱体区域 $\boldsymbol{E}_1 = \hat{\boldsymbol{r}} r^2 \sin\phi + \hat{\boldsymbol{\phi}} 3r^2 \cos\phi + \hat{\boldsymbol{z}}3 (\mathrm{V/m})$，求周围区域中的 $\boldsymbol{E}_2$ 和 $\boldsymbol{D}_2$。假定圆柱体边界不存在自由电荷。

4.45* 一个半径为2cm的 $\varepsilon_{1r} = 3$ 的电介质球，嵌入在 $\varepsilon_{2r} = 9$ 的媒介中。如果周围介质中 $\boldsymbol{E}_2 = \hat{\boldsymbol{R}}3\cos\phi - \hat{\boldsymbol{\theta}}3\sin\theta (\mathrm{V/m})$，求球中的 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{D}_1$。

4.46 如果一个半径为5cm的导电球中心位于原点，其表面的 $\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{R}}50 (\mathrm{V/m})$，球表面的总电荷 Q 是多少？

4.47* 图4-32所示，三层厚度相同电介质厚板具有不同的介电常数。已知上部空气中 $\boldsymbol{E}_0$ 与 z 轴成45°夹角，求其他各层中 $\boldsymbol{E}$ 的夹角。

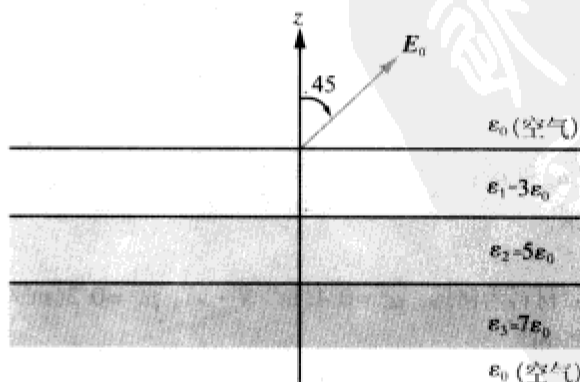


图4-32 习题4.47的电介质厚板

4.10～4.11 电容与静电能

4.48 平行板电容器的面积 $A = 10\mathrm{cm}^2$，两板间距 $d = 1$cm，$\varepsilon_r = 4$。如果施加50V电压，求

两板间的吸引力。

4.49* 当材料中任何地方电场 $\boldsymbol{E}$ 的幅值超过了介电强度，材料就会发生电介质击穿现象。对于例 4-12 的同轴电容器：

(a) 当 r 为多少时，$|\boldsymbol{E}|$ 达到最大值?

(b) 如果 $a=1\text{cm}$，$b=2\text{cm}$，电介质材料为云母，其 $\varepsilon_r=6$，击穿电压是多少?

4.50 如图 4-33 所示，填充空气的平行板电容器的极板面积为 10cm^2，板间距为 1cm，板间电压为 10V。电子的电荷为 $Q_e=-1.6\times10^{-19}\text{C}$，质量为 $m_e=9.1\times10^{-31}\text{kg}$，一个电子从充有负电荷的极板以初始速度 0 进入到极板间的空气中，求：

181

(a) 作用在电子上的力；

(b) 电子的加速度；

(c) 电子到达正极板所需要的时间。

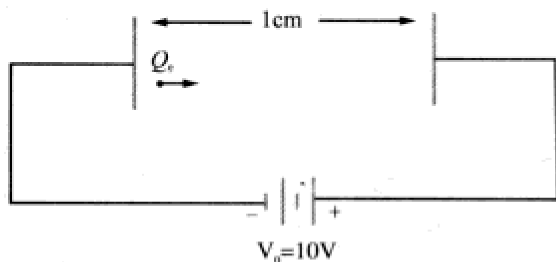


图 4-33　充电极板间的电子（习题 4.50）

4.51* 在 $\varepsilon_r=4$ 的电介质中，电场为

$$\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{x}}(x^2+2z)+\hat{\boldsymbol{y}}x^2-\hat{\boldsymbol{z}}(y+z)\quad(\text{V/m})$$

计算存储在区域 $-1\text{m}\leqslant x\leqslant1\text{m}$、$0\leqslant y\leqslant2\text{m}$、$0\leqslant z\leqslant3\text{m}$ 中的静电能。

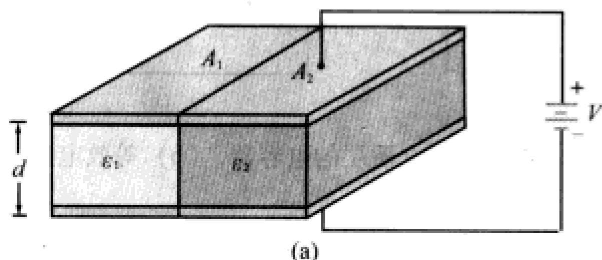
4.52 图 4-34a 所示为平行板电容器，极板间隔为 d。极板间的电介质由两种材料并联组成，介电常数分别为 ε_1 和 ε_2，面积分别为 A_1 和 A_2。这种配置的电容器，其电容 C 等效于图 4-34b 所示的两个电容的并联，即

$$C=C_1+C_2 \tag{4.132}$$

其中

$$C_1=\frac{\varepsilon_1A_1}{d} \tag{4.133}$$

$$C_2=\frac{\varepsilon_2A_2}{d} \tag{4.134}$$



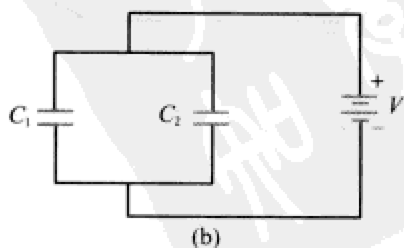


图 4-34　(a) 具有并联电介质的电容；(b) 等效电路

按照以下步骤，证明以上结论

(a) 求两种电介质层中的电场 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$；

(b) 计算各部分存储的能量，并用以计算 C_1 和 C_2；

(c) 利用电容器存储的总能量，求 C 的表达式。从而证明式（4.132）正确。

4.53* 利用习题4.52的结果，确定以下各种配置的电容：

(a) 导电平板位于图4-35a的长方体结构的上、下表面；

(b) 导电平板位于图4-35a的长方体结构的前、后表面；

(c) 导电平板位于图4-35b的圆柱体结构的上、下表面。

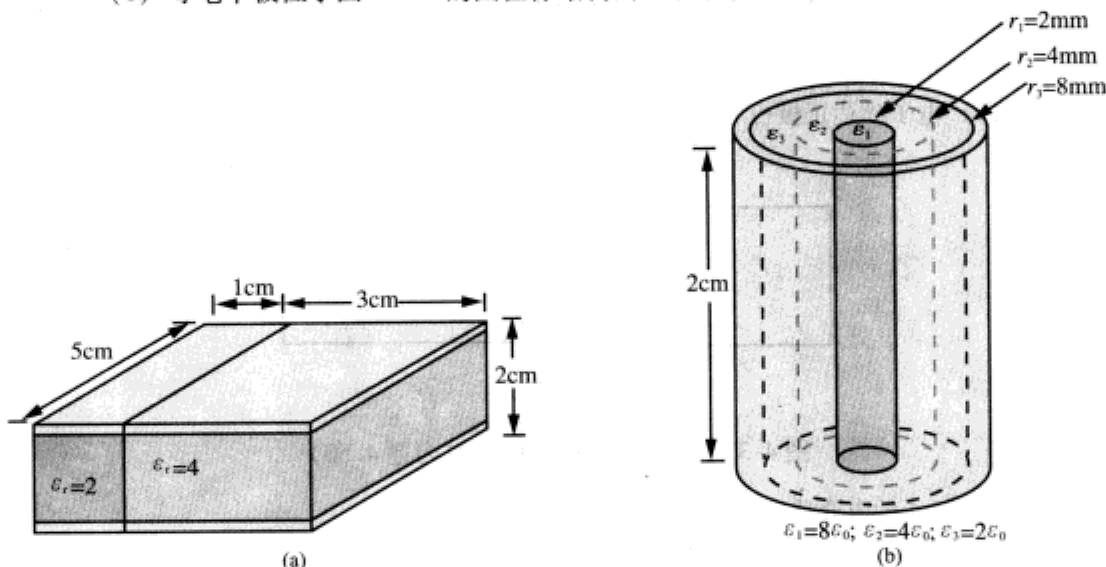


图4-35　习题4.53和习题4.55的电介质配置

4.54　图4-36所示的电容器包含两平行的电介质层。按照后面给出的步骤，从储能的角度证明：整个电容器的等效电容 C，等于单独各层的电容 C_1 和 C_2 的串联组合，即

182

$$C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2} \tag{4.135}$$

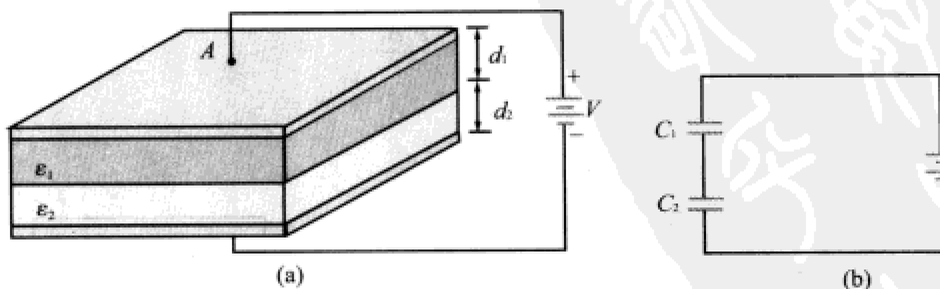


图4-36　习题4.54的电容器：(a) 具有平行电介质层的电容器，(b) 等效电路

其中

$$C_1=\varepsilon_1\frac{A}{d_1},\quad C_2=\varepsilon_2\frac{A}{d_2}$$

(a) 设 V_1、V_2 分别是上、下层电介质两端的电位差。对应的电场 E_1、E_2 是多少？

在两媒介的交界面上，应用适当的边界条件，获得用 ε_1、ε_2、V、以及图中标出的电容器尺寸参数等表示的 E_1 和 E_2 的表达式。

（b）计算每层电介质的储能，然后用储能和求取 C 的表达式。

（c）证明 C 就是式（4.135）。

183

4.55　利用习题 4.54 的表达式，对于图 4-35a 中的电容器配置，当导电极板放置在结构的左、右两端面时，确定电容器的电容。

4.12　镜像法

4.56　如图 4-37 所示，电荷 Q 距离 x-y 平面上的接地半平面高度为 d，距离 x-z 平面中的接地半平面的尺寸也是 d。利用镜像法：

（a）相对每个接地半平面（每个都当成无穷大平面看），设置电荷 Q 的镜像（包括幅值、极性和位置）；

（b）求任一点 $P(0,y,z)$ 的电位和电场。

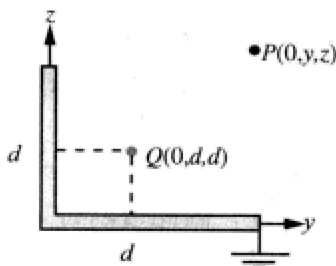


图 4-37　在两个相互垂直、接地、导电的半平面附近的电荷 Q

4.57　在导电平面上方，有两跟导线分别载有电流 I_1、I_2，电流方向如图 4-38 所示。对应电流 I_1、I_2的镜像电流的方向如何？（注意电流的方向定义为正电荷运动的方向。）



图 4-38　导电平面上方的电流（习题 4.57）

4.58　如图 4-39 所示，一个无限长的导电圆柱体，半径为 a，与一个接地导电平面平行放置，二者相距为 d。利用镜像法求圆柱体每单位长度的电容。

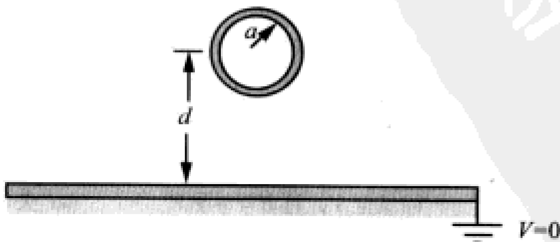


图 4-39　导电平面上方的导电圆柱体（习题 4.58）

4.59 ~ 4.64　附加习题——题目及完整解答见。

184

第5章 静 磁 学

5.1 概述

前一章介绍了静电学，本章则介绍静磁学，这两章的内容是对应的关系。固定的电荷产生静态的电场，而恒定的（不随时间变化）电流则产生静态的磁场。当 $\partial/\partial t=0$ 时，磁导率为 μ 的媒介中的磁场，将由麦克斯韦方程组中的第二对方程，即式（4.3a）、式（4.3b）确定：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0, \tag{5.1a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}, \tag{5.1b}$$

其中 $\boldsymbol{J}$ 是电流密度。磁通密度 $\boldsymbol{B}$ 和磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的关系为

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H} \tag{5.2}$$

在第4章的讨论已经指出，电介质中场的关系 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$ 仅仅对线性、各向同性的媒介成立。由于大多数材料具有这种特性，因此可以将 ε 当成不依赖于 $\boldsymbol{E}$ 的幅值和方向的常数。同样的结论也适用于磁场的关系式（5.2）。除了铁磁材料的 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 是非线性关系外，大多数材料具有恒定的磁导率。其实，绝大多数的电介质和金属（铁磁材料除外）具有 $\mu=\mu_0$ 的特点。本章的目的，就是要针对不同类型的媒介、不同类型的电流分布，分析和理解恒定电流同磁场 $\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{H}$ 之间的关系，并介绍一系列相关的物理量，如磁矢量位 $\boldsymbol{A}$，磁能密度 w_m，以及导电结构的电感 L 等。静磁场的物理量同静电场的物理量之间具有对偶的关系，这种对应性在表5-1中列出。

表5-1 静电场与静磁场的属性

属性	静电场	静磁场
源	固定电荷	恒定电流
场	$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$	$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{B}$
构造参数	ε 和 σ	μ
基本方程		
微分形式	$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_v$ $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$	$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ $\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$
积分形式	$\oint_S\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{s}=Q$ $\oint_C\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=0$	$\oint_S\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}=0$ $\oint_C\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\boldsymbol{I}$
位	标量位 V，且 $\boldsymbol{E}=-\nabla V$	矢量位 $\boldsymbol{A}$，且 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$
能量密度	$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon E^2$	$w_m=\frac{1}{2}\mu H^2$
电荷 q 受力	$\boldsymbol{F}_e=q\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{F}_m=q\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}$
电路元件	C 和 R	L

5.2 磁场力与转矩

空间一点的电场 $\boldsymbol{E}$，定义为放置在该点的单位测试电荷所受到的力 $\boldsymbol{F}_e$。与此类似，下面用带电粒子以速度 $\boldsymbol{u}$ 通过空间某点时所受到的*磁场力*（magnetic force）$\boldsymbol{F}_m$，来定义该点的*磁通密度*（magnetic flux density）$\boldsymbol{B}$。基于研究带电粒子在磁场中运动的大量实验，人们发现作用在电荷 q 上的磁场力 $\boldsymbol{F}_m$ 可以表示成以下形式：

$$\boldsymbol{F}_m = q\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B} \quad (\text{N}) \tag{5.3}$$

因此，$\boldsymbol{B}$ 的单位是 N/(C·m/s)，在国际单位制中称为特斯拉（T）。对于带正电的粒子，$\boldsymbol{F}_m$ 的方向与叉积 $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}$ 的方向一致，即垂直于 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 所在的平面，并遵从右手定则。如果 q 是负的，则 $\boldsymbol{F}_m$ 的方向反向，如图 5-1 所示。F_m 的幅值为

$$F_m = quB \sin\theta, \tag{5.4}$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角。可以看出，当 $\boldsymbol{u}$ 垂直 $\boldsymbol{B}(\theta = 90°)$ 时，F_m 最大，当 $\boldsymbol{u}$ 平行 $\boldsymbol{B}(\theta = 0$ 或 $180°)$ 时，F_m 为零。

187

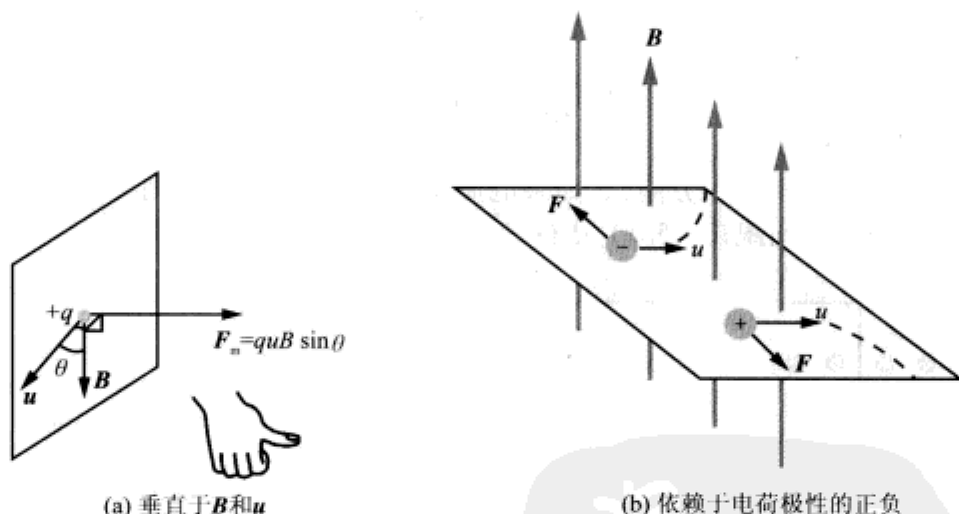


图 5-1 带电粒子在磁场中运动时的磁场力方向

如果电荷同时处在电场和磁场之中，那么，它所受到的总的*电磁力*（electromagnetic force）为

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_e + \boldsymbol{F}_m = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) \tag{5.5}$$

式（5.5）所描述的力就是通常所说的*洛仑兹力*（Lorentz force）。电场力和磁场力具有许多显著的差别：

（1）电场力总是同电场的方向一致，而磁场力则总是垂直于磁场。

（2）无论电荷是否运动都会受到电场力，而磁场力则仅仅作用于运动的电荷。

（3）在移动电荷时，电场力消耗能量，而当电荷运动时，磁场力不做功。

对上面的最后一个特性，有必要作进一步的解释。由于磁场力 $\boldsymbol{F}_m$ 总是垂直于 $\boldsymbol{u}$ 的，所以 $\boldsymbol{F}_m \cdot \boldsymbol{u} = 0$。因此当粒子移动微分距离 $\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{u}\mathrm{d}t$ 时，所做的功为

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}_m \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = (\boldsymbol{F}_m \cdot \boldsymbol{u})\mathrm{d}t = 0 \tag{5.6}$$

因为不做功，所以磁场无法改变带电粒子的动能，磁场可以改变带电粒子的运动方

188

向，但不能改变其速度的大小。

练习 5.1　一个电子沿正 x 轴方向垂直磁场运动，发生了往负 z 轴方向的偏移。问磁场在哪个方向？

答案：正 y 轴方向。(参见❀)

练习 5.2　一个质子以 2×10^6 m/s 的速度通过磁通密度为 2.5T 的磁场，所受的磁场力大小为 4×10^{-13}N。磁场与质子速度之间的夹角是多少？

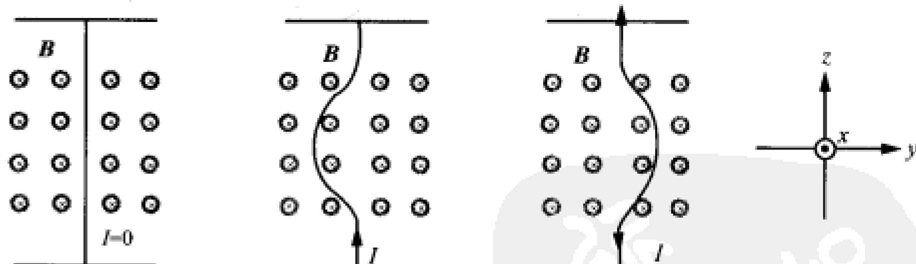
答案：$\theta=30°$或 150°。(参见❀)

练习 5.3　速度为 $\mathbf{u}$ 的带电粒子，在具有均匀电场 $\mathbf{E}=\hat{\mathbf{x}}E$ 和均匀磁场 $\mathbf{B}=\hat{\mathbf{y}}B$ 的媒介中运动。粒子未受到合力的作用，$\mathbf{u}$ 应该是怎样的？

答案：$\mathbf{u}=\hat{\mathbf{z}}E/B$。　($\mathbf{u}$ 也可以包含一个任意的 y 轴分量 u_y)。(参见❀)

5.2.1　作用在载流导体上的磁场力

流经导线的电流，是由在导线中漂移的带电粒子组成的。因此，当载流导线放置在磁场中时，作用在所有带电运动粒子上的磁场力的合力，也就是作用在该导线上的力。例如，考虑图 5-2 的配置，其中，垂直导线沿着 z 轴方向放置，磁场 $\mathbf{B}$（由磁铁产生）沿着负 x 轴方向（垂直进入纸面）。当没有电流时，$\mathbf{F}_m=0$，导线保持其垂直取向，如图 5-2a 所示；而当有电流流经导线时，如果电流朝上（沿正 z 轴方向），则导线偏左（负 y 轴方向），如果电流朝下沿负 z 轴方向，则导线偏右（正 y 轴方向）。偏移的方向跟式（5.3）中的叉积方向是一致的。



(a) 无电流则不偏移　(b) 当 I 朝上时，导线偏左　(c) 当 I 朝下时，导线偏右

图 5-2　稍有弹性的垂直导线放置在垂直进入纸面（以叉表示）的磁场中

为了建立 $\mathbf{F}_m$ 和导线电流 I 的定量关系，考虑横截面积为 A、微分长度为 $\mathrm{d}\mathbf{l}$ 的一

189

小段导线，并用 $\mathrm{d}\mathbf{l}$ 的方向表示电流的方向。不失一般性，假定构成电流的载流子全部为电子（这对于良导体总是成立的）。如果导线中的自由电子密度为 $\rho_{ve}=-N_e e$，其中 N_e 是单位体积中运动电子的数目，那么，在导线的单元体积中所包含的运动电荷的总数目为

$$\mathrm{d}Q=\rho_{ve}A\mathrm{d}l=-N_e eA\mathrm{d}l, \tag{5.7}$$

磁场 $\mathbf{B}$ 作用在 $\mathrm{d}Q$ 上的磁场力为

$$\mathrm{d}\mathbf{F}_m=\mathrm{d}Q\mathbf{u}_e\times\mathbf{B}=-N_e e\,A\,\mathrm{d}l\,\mathbf{u}_e\times\mathbf{B}, \tag{5.8a}$$

这里 $\boldsymbol{u}_e$是电子的漂移速度。因为电流的方向定义为正电荷运动的方向，所以电子漂移速度 $\boldsymbol{u}_e$同 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 平行，但方向相反。因此 $\mathrm{d}l\boldsymbol{u}_e = -\mathrm{d}l u_e$，式（5.8a）变为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_m = N_e e A u_e \mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} \tag{5.8b}$$

根据式（4.11）和式（4.12），当电子密度为 $\rho_{ve} = -N_e e$，漂移速度为 $-\boldsymbol{u}_e$时，通过横截面积 A 的电流为 $I = \rho_{ve}(-u_e)A = (-N_e e)(-u_e)A = N_e e A u_e$。因此，式(5.8b)可以写成以下紧凑形式

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_m = I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} \quad (\mathrm{N}) \tag{5.9}$$

对于路径为 C、载流为 I 的闭合电路，总的磁场力为

$$\boldsymbol{F}_m = I\oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} \quad (\mathrm{N}) \tag{5.10}$$

现在来讨论式（5.10）在两种特殊情况下的应用。

均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中的闭合电路

考虑一个载有电流 I 的闭合回路，放置在均匀的外磁场 $\boldsymbol{B}$ 中，如图 5-3a 所示。因为 $\boldsymbol{B}$ 是常数，可以从式（5.10）的积分中拿出来，即

$$\boldsymbol{F}_m = I\left(\oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{l}\right) \times \boldsymbol{B} = 0 \tag{5.11}$$

因为位移矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 沿任何闭合路径的矢量和等于零，所以受力为零是必然的。这意味着，均匀磁场中的任何闭合电流回路，其承受的总磁场力为零。 190

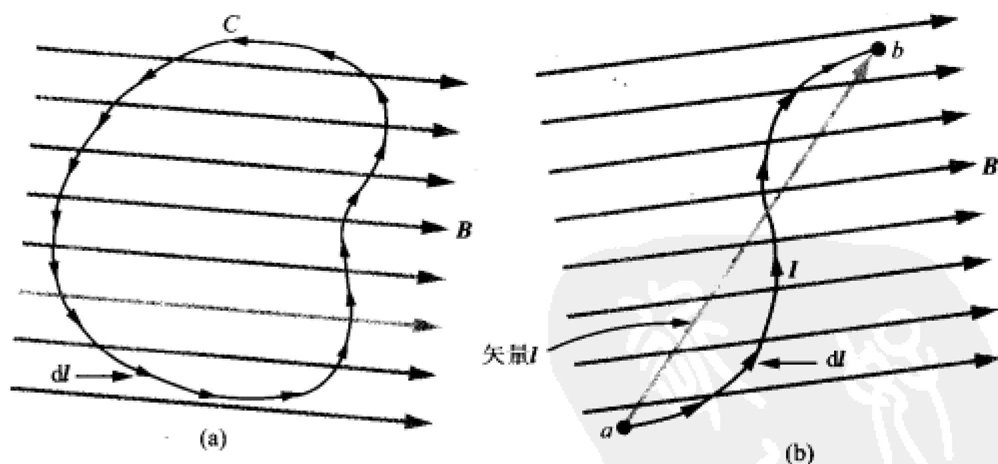


图 5-3 在均匀磁场中(a)闭合载流回路的合力为零，因为位移矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 沿任何闭合路径的线积分为零；(b)作用在曲线段上的力，正比于曲线段两端点间的距离矢量($\boldsymbol{F}_m = I\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$)

均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中的弯曲导线

如果感兴趣的是一段导线所受的磁场力，以图 5-3b 的弯曲导线为例，当放在均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中时，式（5.10）变为

$$\boldsymbol{F}_m = I\left(\int_a^b \mathrm{d}\boldsymbol{l}\right) \times \boldsymbol{B} = I\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}, \tag{5.12}$$

这里 $\boldsymbol{l}$ 是从 a 到 b 的距离矢量，如图 5-3b 所示。不论 a、b 间的路径如何，从 a 到 b 的 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 积分是同一个数值。对于闭合回路，a、b 为同一点，因此 $\boldsymbol{l}=0$，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}}=0$。

例 5-1　作用在半圆环导体上的磁场力

如图 5-4 所示半圆环导体位于 x-y 平面，载有电流 I。该闭合电路放置在均匀磁场 $\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{y}}B_0$ 中。确定：(a) 直线段所受的磁场力 $\boldsymbol{F}_1$；(b) 曲线段所受的力 $\boldsymbol{F}_2$。

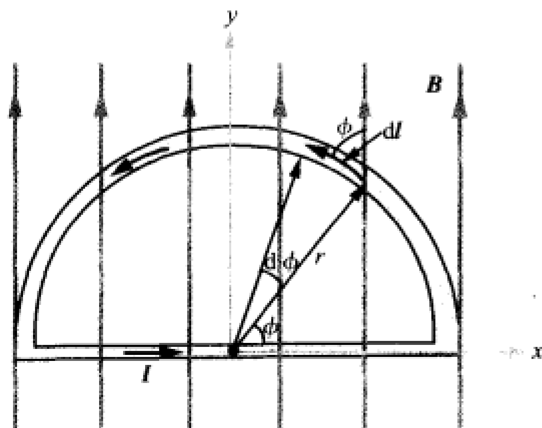


图 5-4　均匀磁场中的半圆环导体（例 5-1）

191 **解答：**(a) 电路直线段的长度为 $2r$，其中的电流沿正 x 方向。将 $\boldsymbol{l}=\hat{\boldsymbol{x}}2r$ 代入式 (5.12) 得

$$\boldsymbol{F}_1=\hat{\boldsymbol{x}}(2Ir)\times\hat{\boldsymbol{y}}B_0=\hat{\boldsymbol{z}}\,2IrB_0\quad(\mathrm{N})$$

(b) 考虑圆弧部分上的一小段，其微分长度为 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$。$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的方向选得同电流方向一致。因为 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 同在 x-y 平面上，两者的叉积 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$ 指向负 z 轴，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$ 的幅值正比于 $\sin\phi$，ϕ 为 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角。而 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的幅值为 $\mathrm{d}l=r\mathrm{d}\phi$。因此，

$$\boldsymbol{F}_2=I\int_{\phi=0}^{\pi}\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}=-\hat{\boldsymbol{z}}I\int_{\phi=0}^{\pi}rB_0\sin\phi\,\mathrm{d}\phi=-\hat{\boldsymbol{z}}2IrB_0\quad(\mathrm{N})$$

可见，$\boldsymbol{F}_2=-\boldsymbol{F}_1$，因此作用在回路上的合力为零。■

练习 5.4　水平导线单位长度质量为 0.2kg/m，载流为 4A，沿着正 x 方向。如果该导线放置在均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中，为了垂直提升该导线，磁场 $\boldsymbol{B}$ 的方向以及最小幅值应该如何？（提示：重力加速度 $\boldsymbol{g}=-\hat{\boldsymbol{z}}9.8\mathrm{m/s^2}$）

答案：$\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{y}}0.49\mathrm{T}$。（参见光盘）

复习题

Q5.1　电场力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}$ 和磁场力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}}$ 的主要差别有哪些？

Q5.2　载流为 I、长度为 10cm 的导线，两端固定在 x 轴上的 $x=0$ 和 $x=6\mathrm{cm}$ 点。如果导线放置在 x-y 平面上，并且放置在均匀磁场 $\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{y}}B_0$ 中，以下哪种配置在导线上产生的磁场力较大：(a) 导线为 V 形，三顶点在 (0,0)、(3,4)、(6,0)；(b) 导线为缺少一边的矩形，四顶点为 (0,0)、(0,2)、(6,2)、(6,0)。

5.2.2　作用在载流回路上的磁力转矩

装在固定转轴上的刚体受力时，将绕轴旋转，以反抗外力。反抗的强度，取决

于施力点到旋转轴的垂直距离失量 $\boldsymbol{d}$ 以及外力 $\boldsymbol{F}$ 这两者的叉积，如图 5-5 所示。其中，$\boldsymbol{d}$ 的长度称为*力臂*（moment arm），叉积则称为*转矩*（torque），以 $\boldsymbol{T}$ 表示：

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{F} \quad (\text{N} \cdot \text{m}) \tag{5.13}$$

192

$\boldsymbol{T}$ 的单位在量纲上和功、能量相同，但转矩既不代表功，也不代表能量，因此不采用焦耳（J），而采用原始形式的"N · m"。在图 5-5 中，施加在圆盘上的力 $\boldsymbol{F}$ 位于 x-y 平面上，同 $\boldsymbol{d}$ 的夹角为 θ。因此，

$$\boldsymbol{T} = \hat{\boldsymbol{z}} rF\sin\theta, \tag{5.14}$$

这里，$|\boldsymbol{d}| = r$，即为圆盘的半径，$F = |\boldsymbol{F}|$。由式（5.14）可见，沿着正 z 轴的转矩，对应着圆盘有逆时针旋转的趋势；而沿着负 z 轴的转矩，则对应着顺时针的旋转趋势。这些方向遵从以下*右手定则*（right-hand rule）：*当右手大拇指沿着转矩的方向时，四指将沿着该转矩试图旋动物体的方向*。

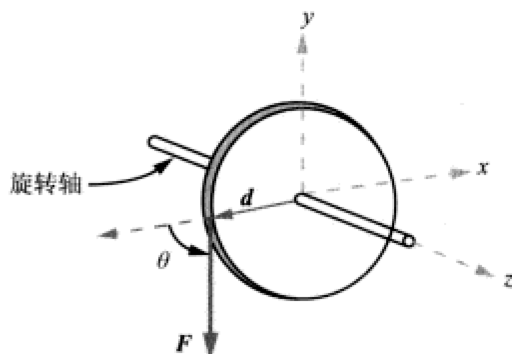


图 5-5　圆盘的转轴同 z 轴重合，当外力 $\boldsymbol{F}$ 作用在圆盘上时，产生转矩 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{F}$，引起圆盘旋转

下面分析磁场力在导电回路上引起的*磁力转矩*（magnetic torque）。首先考虑磁场 $\boldsymbol{B}$ 与导电回路位于同一平面的简单情况，然后再将分析结果扩展到 $\boldsymbol{B}$ 与导电回路的法向成 θ 角度的一般情况。

磁场与导电回路位于同一平面的情况

图 5-6a 所示的矩形导电回路由坚固的导线构成，载有电流 I。回路位于 x-y 平面中，并安装在图示的转轴上。在均匀的外磁场 $\boldsymbol{B} = \hat{\boldsymbol{x}} B_0$ 作用下，回路的边 1 和边 3 分别受到力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_3$ 的作用，根据式（5.12）有：

$$\boldsymbol{F}_1 = I(-\hat{\boldsymbol{y}} b) \times (\hat{\boldsymbol{x}} B_0) = \hat{\boldsymbol{z}} I\, b\, B_0, \tag{5.15a}$$

及

$$\boldsymbol{F}_3 = I(\hat{\boldsymbol{y}} b) \times (\hat{\boldsymbol{x}} B_0) = -\hat{\boldsymbol{z}}\, I\, b\, B_0 \tag{5.15b}$$

由于边 2 和边 4 中的电流与 $\boldsymbol{B}$ 平行，因此边 2、边 4 所受的磁场力为零。

图 5-6b 为沿 y 轴方向的回路端视图，可见，力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_3$ 产生了一个绕原点 O 的转矩，引起回路顺时针旋转。两个力的力臂都是 $a/2$，但 $\boldsymbol{d}_1$ 和 $\boldsymbol{d}_2$ 方向相反，产生的总磁力转矩为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{T} &= \boldsymbol{d}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{d}_3 \times \boldsymbol{F}_3 = \left(-\hat{\boldsymbol{x}}\frac{a}{2}\right) \times (\hat{\boldsymbol{z}} I b B_0) \\
&+ \left(\hat{\boldsymbol{x}}\frac{a}{2}\right) \times (-\hat{\boldsymbol{z}} I b B_0) = \hat{\boldsymbol{y}} I a b B_0 = \hat{\boldsymbol{y}} I A B_0,
\end{aligned} \tag{5.16}
$$

193

其中，$A=ab$ 是回路的面积。由右手定则可知，旋转趋势是顺时针的。式（5.16）的结果，仅仅在磁场 $\boldsymbol{B}$ 平行回路所在平面时才是正确的。一旦回路开始旋转，转矩 $\boldsymbol{T}$ 就开始下降，当旋转到一整转的1/4时，转矩变成零，这将在下面介绍。

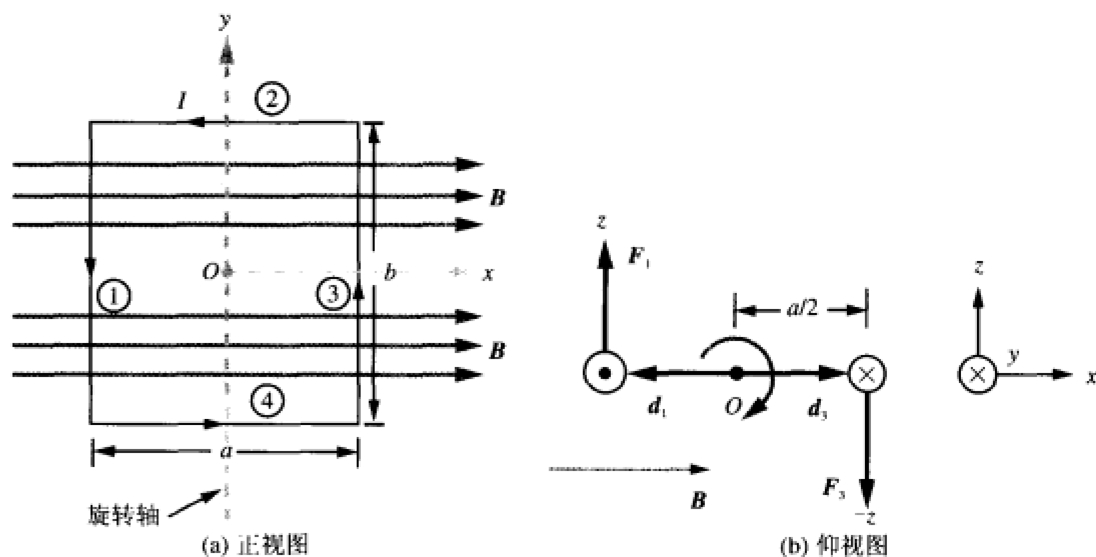


图5-6 旋转轴沿 y 轴的矩形回路。如图（b）所示，力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 共同在回路上产生转矩，使回路具有顺时针旋转的趋势

磁场垂直于矩形回路转轴的情况

在图5-7中，$\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{x}}B_0$，磁场仍然垂直于回路的旋转轴，但方向不再限于在回路平面之内，而是可以同回路的法向 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 成任意的夹角 θ。此时，矩形的四个边上都可能有非零的磁力作用，但力 $\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_4$ 幅值相同，方向相反，且沿着转轴，它们对净转矩的贡献为零。边1和边3则不同，不论 θ 角多大，它们的电流总是垂直于磁场 $\boldsymbol{B}$ 的，力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_3$ 的表达式与前面的式（5.15a）、式（5.15b）是一样的，但它们的力臂变成了 $(a/2)\sin\theta$，如图5-7b所示。因此，绕着旋转轴由磁场所引起的净转矩的幅值，同式（5.16）类似，只是需要乘以系数 $\sin\theta$，即

$$T = IAB_0\sin\theta \tag{5.17}$$

根据式（5.17），当磁场平行回路所在平面时（$\theta=90°$），转矩最大；当磁场垂直该平面时（$\theta=0$），转矩为零。如果回路有 N 匝，每匝的转矩由式（5.17）给定，总转矩为

$$T = NIAB_0\sin\theta \tag{5.18}$$

量 NIA 称为回路的磁矩（magnetic moment），用 $\boldsymbol{m}$ 表示，它可以看成是方向为 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 的

194

矢量 $\boldsymbol{m}$，这里 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 是回路平面的法向，遵从右手定则：当右手四指沿着电流 I 的方向绕行时，大拇指的方向就是 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 的方向。即

$$\boldsymbol{m} \triangleq \hat{\boldsymbol{n}} NIA \quad (\mathrm{A \cdot m^2}), \tag{5.19}$$

当用 $\boldsymbol{m}$ 表示时，转矩矢量 $\boldsymbol{T}$ 可以写成

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B} \quad (\mathrm{N \cdot m}) \tag{5.20}$$

虽然式（5.20）是从 $\boldsymbol{B}$ 垂直于矩形回路的旋转轴这种特殊情况推导出来的，它却适用于任何 $\boldsymbol{B}$ 方向以及任何回路形状。

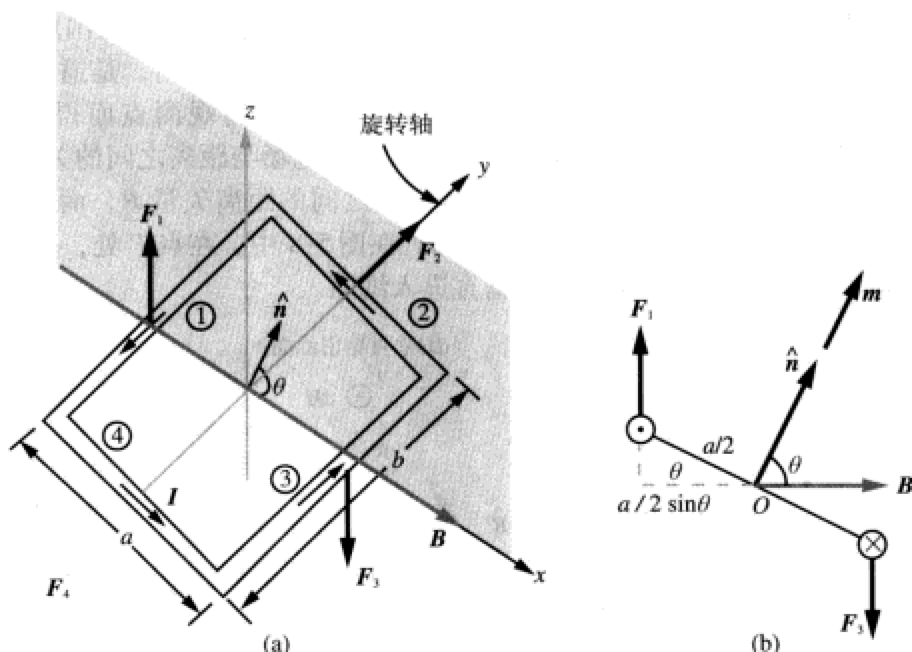


图 5-7 矩形回路位于均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中，其中 $\boldsymbol{B}$ 垂直于回路的旋转轴，但方向与回路平面的法向 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 的夹角为 θ

复习题

Q5.3 回路的磁矩方向是如何定义的？

Q5.4 如果两根等长的导线，一根做成闭合的正方形，另外一根做成闭合的环形，当两个回路通过相同的电流，并且都放在平行于回路平面的均匀磁场中，请问哪个回路的转矩大？

练习 5.5 边长 0.5m、100 匝的正方形线圈，处于 0.2T 的均匀磁场中，如果最大磁力转矩为 4×10^{-2}（N·m），请问流经回路的电流是多大？

答案：$I = 8\mathrm{mA}$。（参见◉）

5.3 毕奥-萨伐尔定律

在前一节中，选用了磁通密度 $\boldsymbol{B}$ 来表示在给定区域中磁场的存在。下面用磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 代替 $\boldsymbol{B}$ 来表示磁场。这样做的部分目的是为了提醒读者，对于大多数材料，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 是通过 $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ 这一关系线性相关的，所以，在 μ 已知的情况下，两者是等同的，了解了其中一个，也就了解了另外一个。

通过载流导线使指南针偏转的实验，奥斯特建立了电流能够感应出一个围绕着载流导线而闭合的磁场的理论（见1.3.3节）。基于奥斯特的结果，毕奥和萨伐尔获得了空间任意一点的磁场 $\boldsymbol{H}$ 同产生它的电流 I 之间的关系表达式，这就是毕奥－萨伐尔定律（Biot-Savart law）。该定律指出，当恒定的电流 I 流经微分长度为 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的导线时，其产生的微分磁场 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}$ 为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H}=\frac{I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\hat{\boldsymbol{R}}}{R^2}\quad(\mathrm{A/m}),\tag{5.21}$$

其中，$\boldsymbol{R}=\hat{\boldsymbol{R}}R$ 为 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 与观测点 P 之间的距离矢量，如图5-8所示。在国际单位制中，$\boldsymbol{H}$ 的单位是 $\mathrm{A\cdot m/m^2}=(\mathrm{A/m})$。需要注意的是，磁场 $\boldsymbol{H}$ 的方向，是通过将 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 定义为沿着电流 I 的方向，将单位矢量 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 定义为从电流元指向观测点而得到的。从式(5.21)可见，$\mathrm{d}\boldsymbol{H}$ 随 R^{-2} 变化，这类似于电荷感应的电场与距离之间的关系。但与电场 $\boldsymbol{E}$ 不同的是，$\boldsymbol{E}$ 的方向沿着连接电荷与观测点之间的距离矢量 $\boldsymbol{R}$，而磁场 $\boldsymbol{H}$ 则垂直于电流元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 与距离矢量 $\boldsymbol{R}$ 二者构成的平面。在图5-8中，在点 P 处，$\mathrm{d}\boldsymbol{H}$ 的方向垂直穿出纸面，而在点 P' 处，$\mathrm{d}\boldsymbol{H}$ 的方向垂直进入纸面。

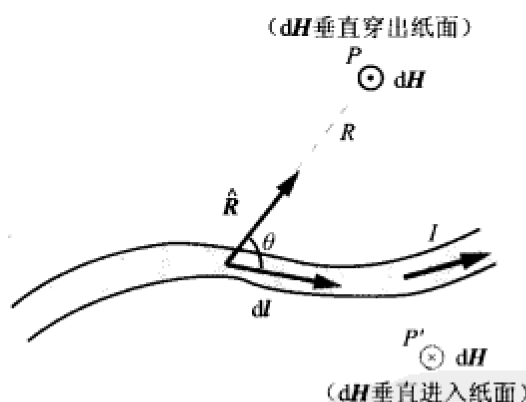


图5-8　电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 产生的磁场 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}$。P 点与 P' 点产生的磁场方向相反

195

为了确定尺寸有限的导体所产生的总磁场 $\boldsymbol{H}$，有必要将构成导体的所有电流元的贡献累加起来。这样，毕奥－萨伐尔定律就成为

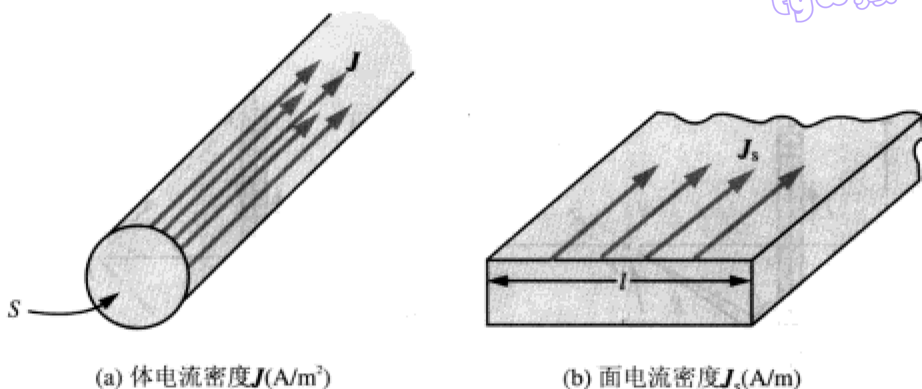
$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{4\pi}\int_l\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\hat{\boldsymbol{R}}}{R^2}\quad(\mathrm{A/m})\tag{5.22}$$

其中 l 是沿着电流 I 的路径。

5.3.1　面电流及体电流分布产生的磁场

毕奥－萨伐尔定律也可以表示成分布电流源的形式，例如图5-9中的体电流密度 $\boldsymbol{J}$（单位为 $\mathrm{A/m^2}$），或面电流密度 $\boldsymbol{J}_s$（单位为 A/m）的形式。面电流密度 $\boldsymbol{J}_s$ 应用在有效厚度为零的片状导体表面流过的电流。当电流源以表面 S 上的 $\boldsymbol{J}_s$ 或体积 v 上的 $\boldsymbol{J}$ 给定时，可以采用电流元的以下等效形式

$$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{J}_s\mathrm{d}s=\boldsymbol{J}\mathrm{d}v\tag{5.23}$$



(a) 体电流密度$\boldsymbol{J}$(A/m^2)　　(b) 面电流密度$\boldsymbol{J}_s$(A/m)

图 5-9 (a)通过圆柱横截面 S 的总电流为 $I=\int_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$;(b)通过导体表面的总电流为 $I=\int_l J_S \mathrm{d}l$

将毕奥－萨伐尔定律表示成下面的形式

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\boldsymbol{J}_S\times\hat{\boldsymbol{R}}}{R^2}\mathrm{d}s(\text{对面电流}), \tag{5.24a}$$

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{4\pi}\int_v \frac{\boldsymbol{J}\times\hat{\boldsymbol{R}}}{R^2}\mathrm{d}v(\text{对体电流}), \tag{5.24b}$$

例 5-2 线状导体的磁场

如图 5-10 所示，长度为 l 的线状导体，载有电流 I，沿 z 轴放置。 196

 **M5.3**

点 P 位于自由空间的 x-y 平面上，到导体的距离为 r。求点 P 的磁通密度 $\boldsymbol{B}$。

解答：如图 5-10，电流元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\hat{\boldsymbol{z}}\mathrm{d}z$，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\hat{\boldsymbol{R}}=\mathrm{d}z\ (\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{R}})\ =\hat{\boldsymbol{\phi}}\sin\theta\,\mathrm{d}z$，其中$\hat{\boldsymbol{\phi}}$是方位角，$\theta$ 是 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 和$\hat{\boldsymbol{R}}$间的角度。应用式（5.22）可得：

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{4\pi}\int_{z=-l/2}^{z=l/2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\hat{\boldsymbol{R}}}{R^2}=\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{I}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{\sin\theta}{R^2}\mathrm{d}z \tag{5.25}$$

为方便起见，应用以下变换，将积分变量 z 转换成 θ

$$R=r\ \mathrm{coc}\ \theta, \tag{5.26a}$$

$$z=-r\cot\theta, \tag{5.26b}$$

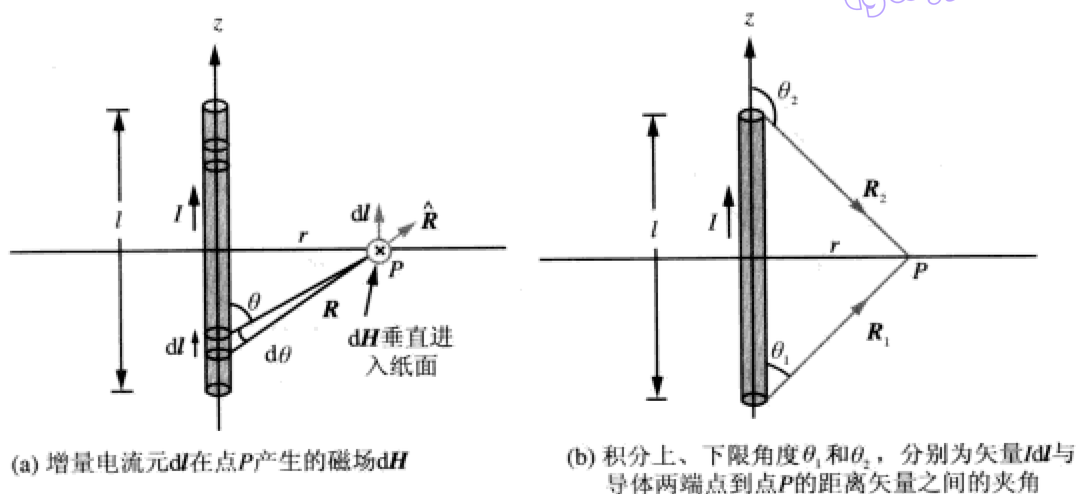
$$\mathrm{d}z=r\ \mathrm{coc}^2\ \theta\ \mathrm{d}\theta \tag{5.26c}$$

将式（5.26a）和式（5.26c）代入式（5.25）可得

$$\boldsymbol{H}=\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{I}{4\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\sin\theta\ r\ \mathrm{coc}^2\theta\ \mathrm{d}\theta}{r^2\mathrm{coc}^2\theta}=\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{I}{4\pi r}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\ \mathrm{d}\theta=\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{I}{4\pi r}(\cos\theta_1-\cos\theta_2) \tag{5.27}$$

这里，θ_1 和 θ_2 分别为对应 $z=-l/2$ 和 $z=l/2$ 的积分上、下限角度。根据图 5-10b 中的直角三角形可得

$$\cos\theta_1=\frac{l/2}{\sqrt{r^2+(l/2)^2}}, \tag{5.28a}$$



(a) 增量电流元d*l*在点*P*产生的磁场d*H*

(b) 积分上、下限角度θ_1和θ_2，分别为矢量$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$与导体两端点到点*P*的距离矢量之间的夹角

图 5-10 （例 5-2）长度为 l 的线状导体载有电流 I

$$\cos\theta_2 = -\cos\theta_1 = \frac{-l/2}{\sqrt{r^2+(l/2)^2}} \tag{5.28b}$$

因此

$$\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H} = \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{\mu_0 Il}{2\pi r\sqrt{4r^2+l^2}} \quad (\mathrm{T}) \tag{5.29}$$

对于无限长的导线，因为 $l \gg r$，式（5.29）简化为

197

$$\boldsymbol{B} = \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (\text{无限长导线}) \quad \blacksquare \tag{5.30}$$

例 5-3 π形回路的磁场

如图 5-11 所示的π形回路，忽略顶点 O 附近的小圆弧电流的贡献，求顶点 O 的磁场。

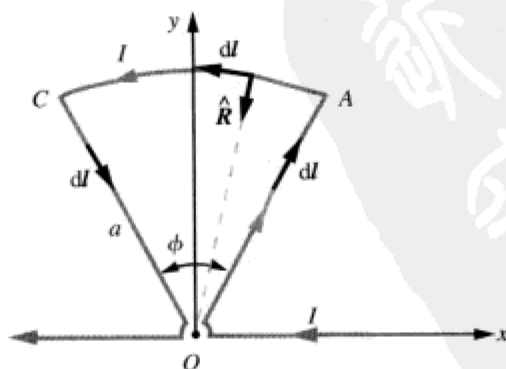


图 5-11 载流为 I、半径为 a 的π形回路（例 5-3）

解答：对于直线段 OA 和 OC，它们在点 O 产生的磁场都是零。这是由于其上各点的 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 平行或反向平行于$\hat{\boldsymbol{R}}$，所以 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\hat{\boldsymbol{R}}=0$。对于 AC 段，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 垂直于$\hat{\boldsymbol{R}}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\hat{\boldsymbol{R}}=\hat{\boldsymbol{z}}\mathrm{d}l=$

$\hat{z}ad\phi$。所以，根据式（5.22）有

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\hat{z}ad\phi}{a^2}=\hat{z}\frac{I}{4\pi a}\phi,$$

其中 ϕ 的单位为 rad。 ■

例 5-4　环形回路的磁场

环形回路半径为 a，载流为 I。确定回路轴线上一点的磁场 $\boldsymbol{H}$。

解答：将该回路放置在 x-y 平面上，如图 5-12 所示，则任务为确定 $P(0,0,z)$ 点的 $\boldsymbol{H}$ 表达式。

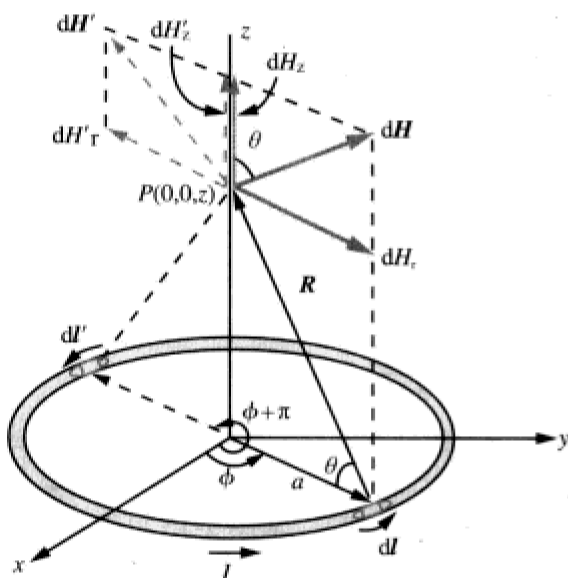


图 5-12　载流为 I 的圆环回路（例 5-4）

可以发现，圆环上任何单元 $d\boldsymbol{l}$ 都是垂直于距离矢量 $\boldsymbol{R}$ 的，并且所有单元到点 P 的距离都是 R，这里 $R=\sqrt{a^2+z^2}$。根据式（5.21），由单元 $d\boldsymbol{l}$ 产生的 $d\boldsymbol{H}$ 的幅值为

$$dH=\frac{1}{4\pi R^2}|d\boldsymbol{l}\times\hat{\boldsymbol{R}}|=\frac{Idl}{4\pi(a^2+z^2)},\tag{5.31}$$

而 $d\boldsymbol{H}$ 的方向则垂直于 $\boldsymbol{R}$ 和 $d\boldsymbol{l}$ 构成的平面。如图 5-12 所示，$d\boldsymbol{H}$ 在 r-z 平面中，因此包含 dH_r 分量和 dH_z 分量。如果同时考虑和 $d\boldsymbol{l}$ 直径相对的单元 $d\boldsymbol{l}'$，可以发现来自 $d\boldsymbol{l}$ 和 $d\boldsymbol{l}'$ 的 z 轴分量磁场是相加的，因为它们方向相同；而 r 分量的磁场则因方向相反而互相抵消。所以净磁场仅仅存在 z 轴方向的分量，即 [198]

$$d\boldsymbol{H}=\hat{z}dH_z=\hat{z}dH\cos\theta=\hat{z}\frac{I\cos\theta}{4\pi(a^2+z^2)}dl\tag{5.32}$$

对于固定在回路轴线上的点 $P(0,0,z)$，除 dl 以外，式（5.32）中的各量都是常数。因此，对式（5.32）沿半径为 a 的圆积分可得

$$\boldsymbol{H}=\hat{z}\frac{I\cos\theta}{4\pi(a^2+z^2)}\oint dl=\hat{z}\frac{I\cos\theta}{4\pi(a^2+z^2)}(2\pi a)\tag{5.33}$$

利用关系 $\cos\theta=a/(a^2+z^2)^{1/2}$，得到最终的表达式如下

$$\boldsymbol{H} = \hat{z}\frac{Ia^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}} \quad (\text{A/m}) \tag{5.34}$$

在回路的中心（$z=0$）处，式（5.34）简化为

$$\boldsymbol{H} = \hat{z}\frac{I}{2a} \quad (\text{当 } z=0 \text{ 时}) \tag{5.35}$$

在远离回路的地方（当 $z^2 \gg a^2$ 时），式（5.34）可近似为

$$\boldsymbol{H} = \hat{z}\frac{Ia^2}{2|z|^3} \quad (\text{当 } |z| \gg a \text{ 时}) \quad ■ \tag{5.36}$$

5.3.2　磁偶极子的磁场

根据电流回路的磁矩 $\boldsymbol{m}$ 的定义式（5.19），图5-12所示的位于 x-y 平面上的单匝载流回路，其磁矩为 $\boldsymbol{m}=\hat{z}m$，其中 $m=I\pi a^2$。因此，式（5.36）可以表示成

$$\boldsymbol{H} = \hat{z}\frac{m}{2\pi|z|^3} \quad (\text{当 } |z| \gg a \text{ 时}), \tag{5.37}$$

这个表达式适用于点 P 远离回路，但仍在回路轴线上的情况。假使针对球坐标系中任一点 $P'(R',\theta',\phi')$ 的磁场 $\boldsymbol{H}$，这里 R' 为回路中心到点 P' 的距离，重新求解前面的例题5-4，则在 $R' \gg a$ 时，将得到以下表达式

$$\boldsymbol{H} = \frac{m}{4\pi R'^3}(\hat{\boldsymbol{R}}2\cos\theta' + \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta') \tag{5.38}$$

一个电流回路，若尺寸远小于回路到观测点的距离，则称为**磁偶极子**（magnetic dipole）。这样取名的原因在于，这种情况下磁场的分布模式类似永久磁铁的磁场，也类似电偶极子的的电场（请参考例4-7）。从图5-13可以看出，这种模式的相似性是显然的。

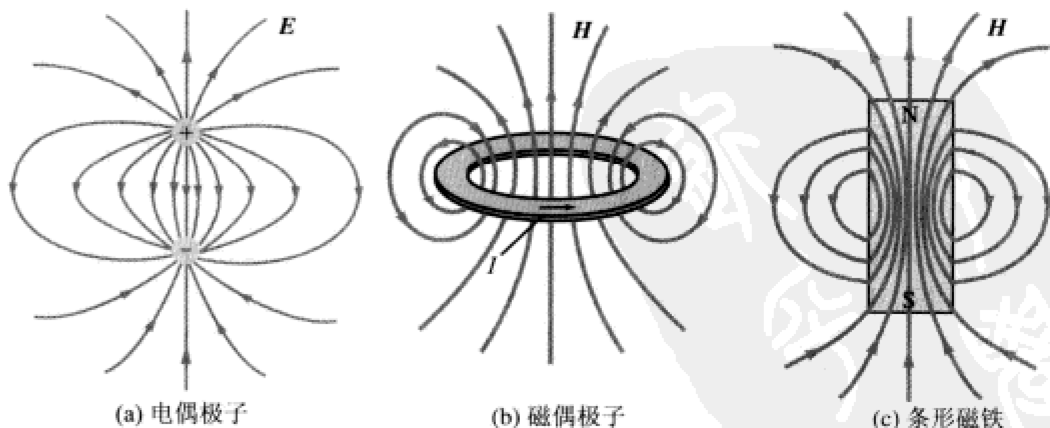


图5-13　场的分布模式：（a）电偶极子的电场；（b）磁偶极子的磁场；（c）条形磁铁的磁场。当远离场源时，三种情况的场分布模式是相似的

复习题

Q5.5　两无限长的平行导线，载有相同幅值的电流，在电流方向（a）相同、（b）反向两种情况下，同单独一条导线存在时的磁场相比，两线间中点的合成磁场是多少？

199

Q5.6 设计一个右手定则，以确定直线载流导线产生的磁场的方向。

Q5.7 什么是磁偶极子？描述其磁场分布。

练习 5.6 半无限长的直线导体，沿 z 轴从 $z=0$ 延伸到 $z=\infty$。如果导体中的电流为 I，沿着正 z 轴方向，求 x-y 平面中到导体径向距离为 r 的点处的 $\boldsymbol{H}$。

答案：$\boldsymbol{H}=\hat{\boldsymbol{\phi}}I/(4\pi r)$ (A/m)。（参见❀）

练习 5.7 载流 4A 的导线构成了一个环形回路。如果圆环中心的磁场为 20A/m，求以下回路匝数时的回路半径 a：(a) 1 匝；(b) 10 匝。

答案：(a) $a=10$cm；(b) $a=1$m。（参见❀）

练习 5.8 边长为 40cm 的正方形回路，位于 x-y 平面上，中心在原点，四边分别与 x 轴或 y 轴平行，载流 5A，从上往下看电流的方向为顺时针。计算回路中心的磁场。

答案：$\boldsymbol{H}=-\hat{z}4I/(\sqrt{2}\pi l)=-\hat{z}11.25$(A/m)。（参见❀）

5.4 两平行导体间的磁场力

在 5.2.1 节中，分析了放置在外磁场中的载流导体所受到的磁场力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}}$。实际上，导体中的电流也产生它自己的磁场。因此，当两个载流导体相互邻近时，彼此都将受到对方的磁力作用。考虑放置在自由空间中两根无限长的平行直导线，彼此相隔的距离为 d，载有相同方向的电流 I_1 和 I_2，如图 5-14 所示。电流 I_1 位于 $y=-d/2$ 处，电流 I_2 位于 $y=d/2$ 处，都指向正 z 轴方向。用 $\boldsymbol{B}_1$ 表示电流 I_1 在载流导线 I_2 处产生的磁场，$\boldsymbol{B}_2$ 则表示电流 I_2 在载流导线 I_1 处产生的磁场。在式 (5.30) 中，令 $I=I_1$，$r=d$，以及 $\hat{\boldsymbol{\phi}}=-\hat{\boldsymbol{x}}$，则得到在 I_2 位置的磁场 $\boldsymbol{B}_1$ 为

200

$$\boldsymbol{B}_1=-\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \tag{5.39}$$

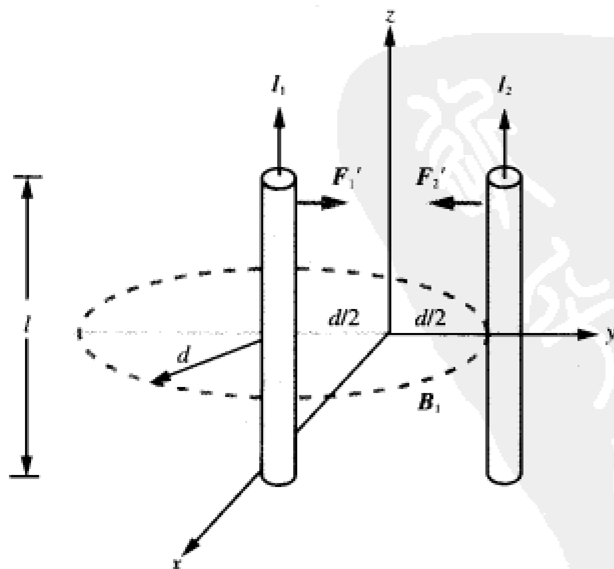


图 5-14 平行载流导线间的磁场力

应用式（5.12），可以得到载流导线 I_2 上长度为 l 的一段导体在磁场 $\boldsymbol{B}_1$ 中所受的力 $\boldsymbol{F}_2$ 为

$$\boldsymbol{F}_2 = I_2 l\hat{z} \times \boldsymbol{B}_1 = I_2 l\hat{z} \times (-\hat{x})\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} = -\hat{y}\frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi \mathrm{d}}, \tag{5.40}$$

每单位长度对应的力为

$$\boldsymbol{F}_2' = \frac{\boldsymbol{F}_2}{l} = -\hat{y}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi \mathrm{d}} \tag{5.41}$$

经过类似的推导，可以得到载流导线 I_1 每单位长度的受力为

$$\boldsymbol{F}_1' = \hat{y}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi \mathrm{d}} \tag{5.42}$$

可见，$\boldsymbol{F}_1' = -\boldsymbol{F}_2'$，这表明两导线以相等的力彼此相互吸引。如果两者的电流方向相反，则两导线将以相等的力彼此相互排斥。

M5.1-5.2

5.5 麦克斯韦静磁场方程

到本节为止，我们定义了磁通密度 $\boldsymbol{B}$ 以及与之对应的磁场强度 $\boldsymbol{H}$，基于毕奥－萨伐尔定律，导出了任何分布电流产生的磁场 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的计算公式，并分析了磁场在运动的带电粒子以及载流导体上产生磁场力的过程。接下来将分析静磁场的另外两个重要性质，即对应数学式（5.1a）、式（5.1b）的两个特性。

5.5.1 磁场的高斯定理

通过第4章的学习大家知道，电通量密度 $\boldsymbol{D}$ 通过闭合面往外的净通量，等于该闭合面所包围的净电荷 Q。这一特性称为（电场的）高斯定理，其微分和积分形式的数学表示分别为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_v \Longleftrightarrow \oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = Q \tag{5.43}$$

其中，从微分形式到积分形式的转换，是通过对具有封闭面 S 以及电荷 $Q = \int_v \rho_v \mathrm{d}v$ 的体积 v 应用散度定理来完成的（见4.4节）。电荷的磁场对偶物是磁极，但电荷可以孤立存在，磁极却不行。磁极总是成对出现的，不论一个永久磁铁细分多少次，新产生出来的任何一小块都有一个南极一个北极，即使细分到原子的尺度也是如此。因此，现实世界中并不存在电荷 Q 或电荷密度 ρ_v 的磁场对等物，所以磁场的高斯定理（Gauss's law for magnetism）具有以下形式也就毫不奇怪

201

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \Longleftrightarrow \oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0 \tag{5.44}$$

其中的微分形式是麦克斯韦的四个方程中的一个，而积分形式则是利用散度定理从微分形式转换而来的。在正式场合，"高斯定理"这个名称用来指称电场的高斯定理，而无需作特别说明。式（5.44）所描述的性质，常称为"孤立磁单极不存在定理"（the law of nonexistence of isolated monopoles）、"磁通守恒定理"（the law of conservation of magnetic flux）以及"磁场的高斯定理"等。本书倾向于采用最后一个名称，因为它既能让人联想起电场与磁场的对应关系，又能提醒人们电、磁两个

特性之间的差别。

电场高斯定理与磁场高斯定理二者之间的差别，可以从场线的角度来区分。电场线从正电荷发出，终止于负电荷。因此，对于图 5-15a 所示的电偶极子，从包围单个电荷的闭合面中通过的电通量不等于零。相反，磁场线总是形成闭合的回路。正如在 5.2 节所见那样，电流产生的磁场线不在任何点上开始或结束。这对于图 5-10 的直线导体成立，对于图 5-12 的环形回路成立，对于任何的分布电流都成立，同样对于磁铁也成立，如图 5-15b 中条形磁铁的磁场线。由于磁场线形成闭合的回路，从包围磁铁南极的闭合面（或任何其他封闭面）流出的净磁通总是零，而与封闭面的形状无关。

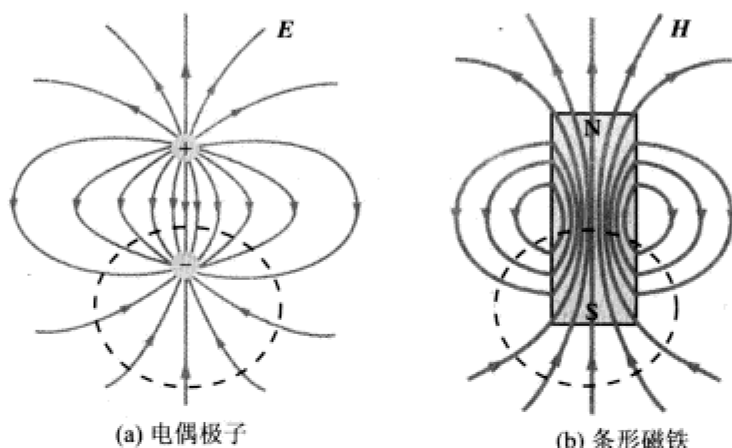


图 5-15 （a）从包围一个电荷的封闭面流出的净电通量不等于零；（b）从包围磁铁一个磁极的封闭面流出的净磁通等于零

5.5.2 安培定律

现在分析式（5.1b）所代表的性质

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J},\tag{5.45}$$

这是关于磁场的一对麦克斯韦方程中的第二个方程，它确定了静态情况下磁场 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的特性。式（5.45）的积分形式称为静磁场条件（恒定电流）下的安培环路定律（Ampère's circuital law），或简称安培定律（Ampère's law）。它是通过对式（5.45）两端在一个非封闭面 S 上积分而得的。即

$$\int_S(\nabla\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_S\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s},\tag{5.46}$$

然后应用式（3.107）的斯托克斯定理，可得：

$$\oint_C\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=I\quad（安培定律）,\tag{5.47}$$

其中，C 是曲面 S 的边界构成的闭合轮廓，$I=\int\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 是流过 S 的总电流。习惯上 C 的正方向定义是，使 I 和 $\boldsymbol{H}$ 的正方向符合右手定则（该定则已在毕奥－萨伐尔定律中使用过）。具体就是，如果 I 的方向沿着右手大拇指，那么轮廓 C 应该选择为其他

四指绕行的方向。简单地说，安培环路定律就是，**H** 沿着闭合路径的线积分，等于该闭合路径包围的面积中通过的总电流。为了说明起见，请先看图 5-16a 和图 5-16b，这两个路径差别很大，**H** 的幅值沿着图 b 的路径根本就不均匀，但两个 **H** 的线积分却相同，都等于电流 I，再看图 5-16c，由于其路径没有包围电流 I，虽然 **H** 沿路径不等于零，但 **H** 的线积分却等于零。

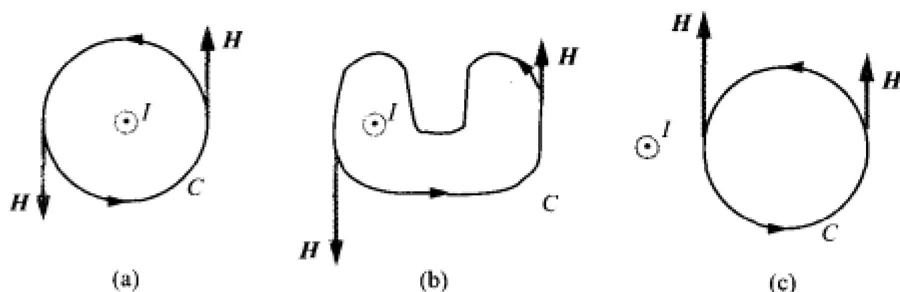


图 5-16 安培定律指出，**H** 沿闭合轮廓 C 的线积分，等于从该轮廓为边界的面中通过的电流。对于(a)和(b)的闭合轮廓，**H** 线积分为 I，对于(c)的轮廓，因为电流 I（以符号⊙表示）不在闭合轮廓 C 的包围之中，所以 **H** 的线积分为零

在 4.4 节分析电场的高斯定理时发现，当它用于计算电通量密度 **D** 时，实际只适用于电荷分布具有某种对称性的情况，计算过程的关键在于如何选择合适的包围电荷的高斯面。使用安培定律时也存在类似的限制：其用途局限于电流分布具有对称性的情况，这时选择出来的包围电流的安培回路（Ampère's contours），才便于计算。这一点将用例 5-5 ~ 例 5-7 来做具体说明。

例 5-5 长导线的磁场

半径为 a 的长直导线（可看成无限长），所载恒定电流 I 均匀地分布在横截面上。确定离轴线的距离为 r 的点处的磁场 **H**：(a) 点位于导线内部（$r\leqslant a$）；(b) 点位于导线外部（$r\geqslant a$）。

解答：(a) 让 I 沿着正 z 轴方向，如图 5-17a 所示。为了确定 $r_1\leqslant a$ 的一点处的 $\boldsymbol{H}_1$，选择半径为 r_1 的安培回路 C_1，如图 5-17b 所示。这时，安培定律的形式为

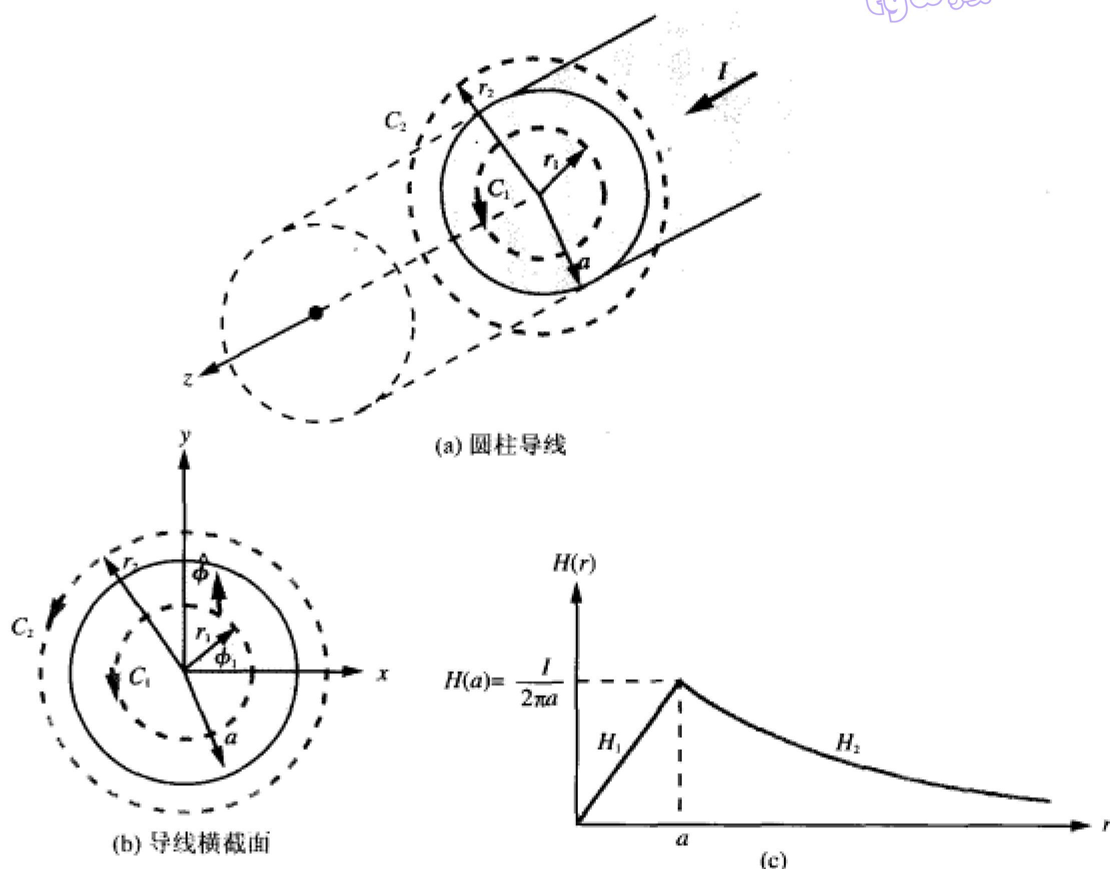
$$\oint_{C_1}\boldsymbol{H}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1=I_1,$$

其中，I_1 是总电流 I 中，流经 C_1 的部分。根据对称性，在路径上各点处 $\boldsymbol{H}_1$ 的幅值相等，方向和回路平行。另外，在 I_1 沿着 z 轴的前提下，根据右手定则，$\boldsymbol{H}_1$ 必须沿着柱坐标系的正 ϕ 方向。因此有 $\boldsymbol{H}_1=\hat{\boldsymbol{\phi}}H_1$。由于 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1=\hat{\boldsymbol{\phi}}r_1\mathrm{d}\phi$，安培定律的左端为

$$\oint_{C_1}\boldsymbol{H}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1=\int_0^{2\pi}H_1(\hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}})r_1\mathrm{d}\phi=2\pi r_1H_1$$

在 C_1 包围的面积中流过的电流 I_1，等于总电流 I 乘以 C_1 包围的面积与导线总横截面积之比：

$$I_1=\left(\frac{\pi r_1^2}{\pi a^2}\right)I=\left(\frac{r_1}{a}\right)^2I$$



(a) 圆柱导线

(b) 导线横截面

(c)

图 5-17 （例 5-5）半径为 a、载流为 I、沿着正 z 轴的无限长导线：（a）安培回路 C_1 和 C_2 的选择；（b）横截面图；（c）$\boldsymbol{H}$ 随 r 变化的曲线

令安培定律两端的结果相等，然后求解 $\boldsymbol{H}_1$，可得

$$\boldsymbol{H}_1=\hat{\boldsymbol{\phi}}H_1=\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{r_1}{2\pi a^2}I \quad (\text{当 } r_1\leqslant a \text{ 时}) \tag{5.48}$$

（b）当 $r_2\geqslant a$ 时，选择路径 C_2，它包围总电流 I。因此，

$$\oint_{C_2}\boldsymbol{H}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2=2\pi r_2H_2=I$$

得

$$\boldsymbol{H}_2=\hat{\boldsymbol{\phi}}H_2=\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{I}{2\pi r_2} \quad (\text{当 } r_2\geqslant a \text{ 时}) \tag{5.49}$$

如果忽略下标 2，可以看到，由式（5.49）得出的 $\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$ 的表达式，与前面直接由毕奥－萨伐尔定律推导出来的式（5.30）完全一样。

幅值 H 随半径 r 变化的函数关系绘制在图 5-17c 中。在 $r=0$ 到 $r=a$ 之间（导体内部），H 线性增加，到达导体外部以后，H 以 $1/r$ 的规律减小。 ■

练习 5.9 电流 I 沿同轴电缆的内导体流出，从外导体返回。同轴电缆外部的磁场是多少？为什么？(参见 ⊛)

答案：同轴电缆外部的 $\boldsymbol{H}=0$，因为安培回路包围的净电流为零。

204 **练习 5.10** 当金属铌冷却到绝对温度 9K 以下时，变成电阻为零的超导体，但当其表面磁通密度超过 0.12T 时，它的超导特性就会消失。确定直径为 0.1mm 的铌导线保持超导特性所能承受的最大电流。

答案：$I = 30\text{A}$。（参见◉）

例 5-6 环形螺线管中的磁场

将导线紧密地绕在一个称作磁心的圆环形结构上，则形成一个环形螺线管（也称环形线圈），如图 5-18 所示。为了让大家看清线圈的绕法，特意将线圈的各匝画成分隔很远的样子，而实际上，相邻的各匝是紧挨在一起绕制到磁心上的，每匝都近似圆形。环形螺线管用来把多个电路磁耦合在一起，以及用来测量材料的磁特性，这将在后面的图 5-30 中进行说明。对应载流为 I、匝数为 N 的环形螺线管，试确定以下三个区域中环形螺线管的方位角平面内的磁场强度 $\boldsymbol{H}$：(a) $r < a$、(b) $r > b$、(c) $a < r < b$。

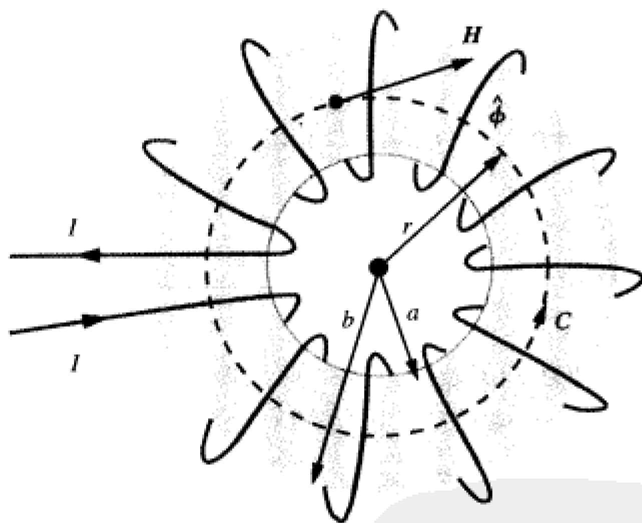


图 5-18 内半径为 a、外半径为 b 的圆环螺线管。导线各匝通常要比图中画的绕得紧密得多（例 5-6）

解答：由于对称的原因，显然 $\boldsymbol{H}$ 沿方位角具有均匀的特点。

(a) 对于 $r<a$ 的区域，如果构造一个以原点为圆心、环形的安培积分路径，则将不会有电流流过该路径所包围的面，因此 $\boldsymbol{H}=0$。

(b) 类似地，对于 $r>b$ 的安培积分路径，因为有相同数量的电流沿相反的方向穿过该路径所包围的面积，所以穿过该面积的净电流为零，因此在 $r>b$ 的区域中，$\boldsymbol{H}=0$。

(c) 对于磁心内部的区域，先构造图 5-18 所示的半径为 r 的路径。从例 5-4 可知，对于环形电流，其中心处 $\boldsymbol{H}$ 的方向与圆环的轴线一致，在本例中就是与 ϕ 的方向一致。对于图 5-18 所示的电流方向，根据右手定则，$\boldsymbol{H}$ 应该沿着 $-\phi$ 的方向，即 $\boldsymbol{H} = -\hat{\boldsymbol{\phi}}H$。半径为 r 的路径所包围的总电流为 NI，电流方向为进入纸面。根据安培环路定律及相应的右手定则的规定，当右手大拇指沿着路径 C 的方向时，如果电流

穿过路径包围的面积的方向与右手其余四指的方向一致，则为正电流。所以，在本例中，电流为 $-NI$。应用安培环路定律可得：

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} (-\hat{\boldsymbol{\phi}}H)\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}}r\,\mathrm{d}\phi = -2\pi rH = -NI$$

因此，$H = NI/(2\pi r)$，且

$$\mathbf{H} = -\hat{\boldsymbol{\phi}}H = -\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{NI}{2\pi r} \quad (\text{当 } a<r<b \text{ 时}) \qquad ■ \qquad (5.50)$$

例 5-7　无限大电流片的磁场

图 5-19 所示的 x-y 平面为一无穷大的电流片，其面电流密度为 $\mathbf{J}_s = \hat{\mathbf{x}}J_s$。求其磁场 $\mathbf{H}$。

205

解答：因为对称性以及右手定则，$\mathbf{H}$ 应该沿着图中的方向，即

$$\mathbf{H} = \begin{cases} -\hat{\mathbf{y}}H, & \text{当 } z>0 \text{ 时，} \\ \hat{\mathbf{y}}H, & \text{当 } z<0 \text{ 时。} \end{cases}$$

为了便于计算安培环路定律中的线积分，选择长和宽分别为 l 和 w、围绕着电流片的矩形路径，如图 5-19 所示。回顾一下 $\mathbf{J}_s$的定义，它在此处代表沿着 y 方向每单位长度的电流，因此，矩形路径所包围的总电流为 $I = J_s l$。由于沿着路径的 w 部分，$\mathbf{H}$ 为零，所以，应用安培环路定律可得

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 2Hl = J_s l,$$

由此可得

$$\mathbf{H} = \begin{cases} -\hat{\mathbf{y}}\dfrac{J_s}{2}, \text{当 } z>0 \text{ 时，} \\ \hat{\mathbf{y}}\dfrac{J_s}{2}, \text{当 } z<0 \text{ 时。} \end{cases} \qquad (5.51)$$

可见，磁场是均匀的，且处处平行于电流片。 ■

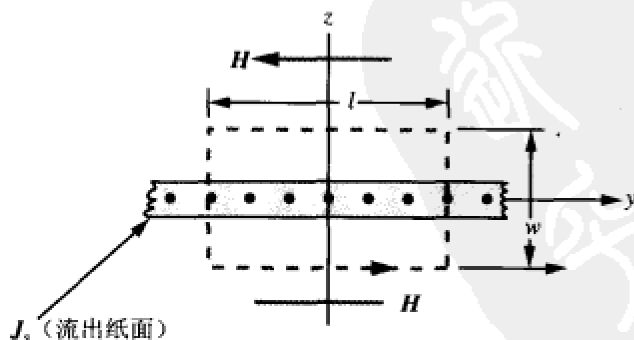


图 5-19　x-y 平面上的薄电流片，载有面电流密度 $\mathbf{J}_s = \hat{\mathbf{x}}J_s$（流出纸面）（例 5-7）

复习题

Q5.8　电场线和磁场线的根本差别是什么？

Q5.9　如果 $\mathbf{H}$ 沿一个封闭路径的线积分为零，这是否表示在该路径上的每一点处 $\mathbf{H}=0$？如

果不是的话，它又暗示着什么呢？

Q5.10 比较应用毕奥－萨伐尔定律、应用安培环路定律两种方法计算载流导线产生的磁场时的用法。

Q5.11 什么是环形螺线管？管外的磁场是多少？

5.6 矢量磁位

在第 4 章处理静电场问题时，引入了静电位 V，并定义其为电场 $\boldsymbol{E}$ 的线积分。当用微分形式表示时，V 和 $\boldsymbol{E}$ 的关系为 $\boldsymbol{E}=-\nabla V$。这一关系不仅将电路元件（如电阻、电容）的电场分布与其两端的电位差联系起来，而且使得我们在某些难以直接应用库仑定律来求解 $\boldsymbol{E}$ 的情况下，可以先求给定电荷分布的电位 V，然后再应用关系 $\boldsymbol{E}=-\nabla V$ 来方便地获得 $\boldsymbol{E}$，因而极其有用。下面针对磁通密度 $\boldsymbol{B}$，开发一种类似的方法。

206

根据式（5.44），有 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$。当用某种磁位来定义 $\boldsymbol{B}$ 时，希望该种磁位应该能够使 $\boldsymbol{B}$ 的散度始终为 0。考虑到式（3.106b）的矢量恒等式，即对于任意矢量 $\boldsymbol{A}$，有

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0 \tag{5.52}$$

因此，定义*矢量磁位*（vector magnetic potential）$\boldsymbol{A}$，使

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \quad (\text{Wb/m}^2), \tag{5.53}$$

则可以保证 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$。在国际单位制中，$\boldsymbol{B}$ 的单位是特斯拉（T），而在一些文献中，则常用等效的单位为韦伯每平方米（Wb/m^2）。因此，在国际单位制中，$\boldsymbol{A}$ 的单位是 Wb/m。

应用 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$，安培定律微分形式的式（5.45）可以写成

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{J}, \tag{5.54}$$

其中，$\boldsymbol{J}$ 是由运动的自由电荷产生的电流密度。将式（5.53）代入式（5.54）可得

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\mu\boldsymbol{J} \tag{5.55}$$

对于任何矢量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}$ 的拉普拉斯遵循矢量恒等式（3.113），即

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) \tag{5.56}$$

其中，$\nabla^2\boldsymbol{A}$ 在直角坐标系中的定义为

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{x}}\,\nabla^2A_x+\hat{\boldsymbol{y}}\,\nabla^2A_y+\hat{\boldsymbol{z}}\,\nabla^2A_z \tag{5.57}$$

综合式（5.55）和式（5.56）可得

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}=\mu\boldsymbol{J} \tag{5.58}$$

在引入矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 的定义式（5.53）时，施加在 $\boldsymbol{A}$ 上的唯一限制就是，它满足条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$。式（5.58）中有一项牵涉到 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$。根据矢量微积分，人们有充分的自由将 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 规定为某个数值或某种形式的函数，而不会同式（5.52）的要求相矛盾。在所有允许的选择中，最简单的选择是取以下规范

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0 \tag{5.59}$$

应用这一选择，式（5.58）变为*矢量泊松方程*（vector Poisson's equation）：

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{J} \tag{5.60}$$

利用式（5.57）定义的 $\nabla^2\boldsymbol{A}$，矢量泊松方程可以分离为三个标量泊松方程：

$$\nabla^2 A_x = -\mu J_x, \quad (5.61a)$$
$$\nabla^2 A_y = -\mu J_y, \quad (5.61b)$$
$$\nabla^2 A_z = -\mu J_z, \quad (5.61c)$$

在静电场中，标量位 V 的泊松方程由式（4.60）给定为

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}, \quad (5.62)$$

对于在体积 v' 中的体电荷分布 ρ_v，上式的解由式（4.61）给出

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{v'}\frac{\rho_v}{R'}dv' \quad (5.63)$$

由于 A_x、A_y、A_z 的泊松方程同式（5.62）在数学形式上完全相同，因此，对于分布在体积 v' 中、具有 x 分量 J_x 的电流密度 $\boldsymbol{J}$，式（5.61a）的解为

$$A_x = \frac{\mu}{4\pi}\int_{v'}\frac{J_x}{R'}dv' \ (\text{Wb/m}) \quad (5.64)$$

207

同样，可以将 A_y 表达为 J_y，将 A_z 表达为 J_z。三个解可以组合成以下矢量方程形式

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_{v'}\frac{\boldsymbol{J}}{R'}dv' \quad (\text{Wb/m}) \quad (5.65)$$

考虑到式（5.23），如果电流分布是以表面 S' 上的面电流密度 $\boldsymbol{J}_S$ 的形式来给定，则 $\boldsymbol{J}dv'$ 应该用 $\boldsymbol{J}_S ds'$ 代替，v' 应该用 S' 代替；同样，对于线电流分布，$\boldsymbol{J}dv'$ 应该用 $I d\boldsymbol{l}'$ 代替，且积分应该在相应的路径 l' 上进行。

除毕奥－萨伐尔定律、安培定律之外，矢量磁位提供了第三种计算载流导体磁场的方法。对于确定的电流分布，可以利用式（5.65）来求解 $\boldsymbol{A}$，然后利用式（5.53）来计算 $\boldsymbol{B}$。对于电流分布具有几何对称性的简单情况，往往可以应用安培定律求解磁场，而剩余的问题，则通常在毕奥－萨伐尔定律与矢量磁位之间选择解法。但通常矢量磁位法更加容易，因为处理式（5.65）的积分要比处理式（5.22）的积分容易得多。

铰链表面 S 的磁通（magnetic flux）Φ 定义为通过 S 的总磁通密度，即

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} \quad (\text{Wb}) \quad (5.66)$$

将式（5.53）代入式（5.66），并应用斯托克斯定理，可得

$$\Phi = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{s} = \oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} \quad (\text{Wb}), \quad (5.67)$$

其中，C 是包围表面 S 的轮廓路径。因此，Φ 既可以用式（5.66），也可以用式（5.67）来计算，在考虑实际问题时，哪个积分容易就选择哪个。

5.7 材料的磁特性

根据前面的分析，电流环产生的磁场模式跟永久磁铁产生的磁场模式是类似的，因此将电流环看成具有一个北极和一个南极的磁偶极子（参见 5.2.2 节以及图 5-13）。面积为 A 的电流环，其磁矩 $\boldsymbol{m}$ 的幅值为 $m = IA$，$\boldsymbol{m}$ 的方向则由右手定则确定，为回路平面的法向。物质的磁化与原子电流环有关，产生原子电流环的机理主

要有两个：（1）电子绕核的轨道运动，以及原子核中的质子彼此围绕类似轨道进行的运动；（2）电子的自旋运动。电子的磁矩是其轨道运动及围绕自己的轴线进行的自旋运动的合成结果。在后面将看到，原子核的磁矩比电子的磁矩小很多，因此，一个原子的总磁矩主要取决于其各电子的磁矩之和。材料在磁场中的行为，受控于其原子的磁偶极矩同外磁场的相互作用。这种行为取决于材料的晶格结构，以此为基础，人们将材料分为抗磁性的（diamagnetic），顺磁性的（paramagnetic），以及铁磁性的（ferromagnetic）。抗磁性材料的原子不具有永久的磁偶极矩。相反，顺磁性以及铁磁性材料的原子则都具有永久的磁偶极矩，但二者的原子具有完全不同的组织结构，这一点将在后面介绍。

5.7.1 轨道磁矩和自旋磁矩

为了简化下面的介绍，先从原子的经典模型开始讨论，即假定电子围绕原子核作圆周运动，然后将结果同更为准确的物质量子力学模型所提供的预测相结合，使结果得到扩展。在图5-20a中，电荷量为 $-e$、运动速度恒定为 u、轨道半径为 r 的电子，其运动一周的时间为 $T=2\pi r/u$。电子的这种圆周运动，构成了一个具有电流 I 的微小电流环，

208

$$I=-\frac{e}{T}=-\frac{eu}{2\pi r} \tag{5.68}$$

相应的轨道磁矩（orbital magnetic moment）$\boldsymbol{m}_o$ 的幅值为

$$m_o=IA=\left(-\frac{eu}{2\pi r}\right)(\pi r^2)=-\frac{eur}{2}=-\left(\frac{e}{2m_e}\right)L_e, \tag{5.69}$$

其中，$L_e=m_e ur$，为电子的角动量，m_e 则为电子的质量。根据量子物理学，轨道角动量是量子化的，即 L_e 总是 $\hbar=h/2\pi$ 的整数倍，其中 h 是普朗克常数。因此有，$L_e=0,\hbar,2\hbar,\cdots$。可见，电子的轨道磁矩的最小非零幅值为

$$m_o=-\frac{e\hbar}{2m_e} \tag{5.70}$$

尽管所有的物质都包含电子，电子都具有磁偶极矩，但实际上大多数物质都是非磁性的。出现这种情况的原因在于，当没有外磁场的时候，大多数物质的原子是随机（randomly）取向的，其电子产生的净磁矩要么为零，要么很小。

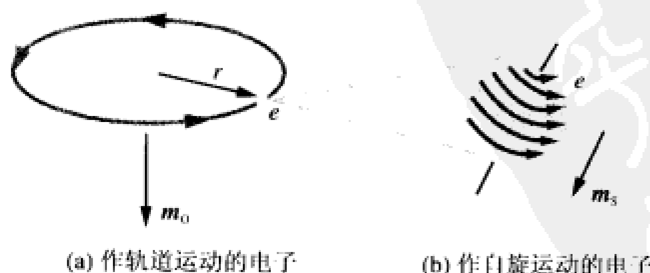


图5-20 一个电子产生的磁矩：（a）当其绕原子核旋转时，产生轨道磁矩 $\boldsymbol{m}_o$，（b）当其绕自身轴线旋转时，产生自旋磁矩 $\boldsymbol{m}_s$

除了轨道运动产生的磁矩，电子还环绕自身的轴线自旋，产生自旋磁矩（spin magnetic moment）$\boldsymbol{m}_s$，如图 5-20b 所示。量子理论给出的 $\boldsymbol{m}_s$ 幅值为

$$m_s = -\frac{e\hbar}{2m_e}, \tag{5.71}$$

它等于轨道磁矩的最小值 m_o。具有偶数个电子的原子，其电子通常是成对的，每对的两个电子自旋方向相反，因此自旋磁矩相互抵消。如果电子数为奇数，则原子将有一个未配对的电子，因而具有非零的自旋磁矩。

根据式（5.71），电子的自旋磁矩反比于电子质量 m_e。原子核也具有自旋磁矩，但因其质量远大于电子，其磁矩约为电子的 10^{-3} 数量级。

5.7.2 磁导率

材料的磁化矢量（magnetization vector）$\boldsymbol{M}$ 定义为，在每单位体积的材料中所包含的原子磁偶极矩的矢量和。对应 $\boldsymbol{M}$ 的磁通密度为 $\boldsymbol{B}_m = \mu_0\boldsymbol{M}$。当施加外磁场 $\boldsymbol{H}$ 时，材料中总的磁通密度为

$$\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H} + \mu_0\boldsymbol{M} = \mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M}), \tag{5.72}$$

209

其中，第一项代表外磁场的贡献，第二项代表材料磁化的贡献。通常，材料的磁化乃是对外磁场 $\boldsymbol{H}$ 作出的响应，因此，$\boldsymbol{M}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{M} = \chi_m\boldsymbol{H}, \tag{5.73}$$

其中，χ_m 是个无量纲的量，称材料的磁化率（magnetic susceptibility）。对于抗磁性和顺磁性物质，在给定温度的情况下，χ_m 是一个常数，因此 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 之间是线性关系。铁磁性物质则不同，其 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{H}$ 关系不仅是非线性的，而且同材料以前的“历史”有关，这将在下一节进行解释。

基于以上认识，组合式（5.72）、式（5.73）可得

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H}+\chi_m\boldsymbol{H}) = \mu_0(1+\chi_m)\boldsymbol{H}, \tag{5.74}$$

或表示为

$$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}, \tag{5.75}$$

其中，μ 为材料的磁导率（magnetic permeability），由 χ_m 确定为：

$$\mu = \mu_0(1+\chi_m) \quad (\mathrm{H/m}) \tag{5.76}$$

通常，用相对磁导率（relative permeability）μ_r 来定义材料的磁特性更为方便。μ_r 为：

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1+\chi_m, \tag{5.77}$$

其中，μ_0 是真空中的磁导率。根据 χ_m 数值的大小，材料通常被分为抗磁性、顺磁性，以及铁磁性等几种，如表 5-2 所示。抗磁性材料具有负的磁化率，而顺磁性材料则具有正的磁化率。由于这两类材料的磁化率绝对值都在 10^{-5} 数量级，因此在式（5.77）中，可以忽略 χ_m（同 1 相比，χ_m 极小）。所以，对于抗磁性和顺磁性物质，包括介电材料和大多数金属材料，有 $\mu_r \approx 1$，$\mu \approx \mu_0$。相反，对于铁磁材料，有 $|\mu_r| \gg 1$。例如，纯铁的 $|\mu_r|$ 约为 2×10^5 数量级（铁磁材料将在下一节讨论）。

表5-2　磁性材料的性质

	抗磁性	顺磁性	铁磁性
永久磁偶极矩	无	有，但很弱	有，且很强
主要磁化机制	电子轨道磁矩	电子自旋磁矩	磁畴
感应磁场的方向（相对外磁场）	反向	同向	磁滞（见图5-22）
常见物质举例	铋，铜，金刚石，金，铅，水银，银，硅	铝，钙，铬，锰，铌，铂，钨	铁，钴，镍
χ_m 的典型值	$\approx -10^{-5}$	$\approx 10^{-5}$	$\|\chi_m\| \gg 1$ 且磁滞
μ_r 的典型值	≈ 1	≈ 1	$\|\mu_r\| \gg 1$ 且磁滞

练习5.11　磁化强度矢量 $\boldsymbol{M}$ 是单位体积（1m^3）中包含的所有原子磁矩的矢量和。某种铁，具有 8.5×10^{28} 个原子/m^3，若每个原子有一个电子的自旋磁矩沿着外磁场的方向，求：（a）单个电子的自旋磁矩，已知 $m_e=9.1\times10^{-31}\text{kg}$，$\hbar=1.06\times10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}$；（b）$\boldsymbol{M}$ 的幅值。

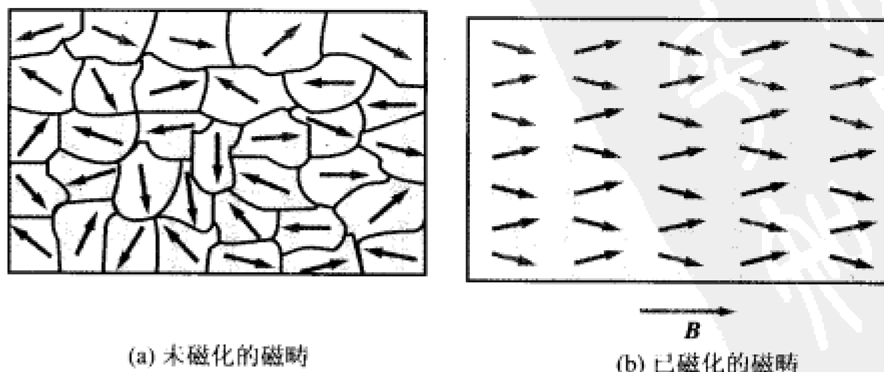
答案：（a）$m_s=9.3\times10^{-24}(\text{A}\cdot\text{m}^2)$；（b）$M=7.9\times10^5(\text{A/m})$。（参见*）

5.7.3　铁磁材料的磁滞

铁、钴、镍等铁磁材料，由于其磁矩具有沿着外磁场方向的倾向，因而表现出很强的磁性。此外，即使在外磁场去除之后，这类材料仍将残留部分磁性。由于这个特性，铁磁材料被用来制造永久磁铁。

铁磁材料的一个共同特征，就是都存在*磁畴*（magnetized domain）。所谓磁畴，乃是材料中的一个微观区域（约 10^{-10}m^3 数量级），其中所有原子（一般原子数在 10^{19} 数量级）的磁矩都相互平行排列，沿着共同的方向。永久一致排列的原因在于，构成磁畴的磁偶极矩之间，存在着强大的耦合力。当没有外磁场时，各磁畴的取向是随机、杂乱的，如图5-21a所示，因此净磁化强度为零。相邻磁畴之间的边界是*畴壁*（domain wall），它由很薄的转换区域构成。当未磁化的铁磁材料样品放入外磁场中时，磁畴将在一定程度上与外磁场方向一致，如图5-21b所示。若要定量地阐释磁畴的形成、磁畴在外磁场作用下的行为，则需要大量量子力学的知识，这已经超出了本课程的范围。因此，这里仅仅定性地描述磁化的过程及其含义。

210



(a) 未磁化的磁畴　　(b) 已磁化的磁畴

图5-21　在磁化的前后，铁磁材料磁畴的对比

铁磁材料的磁化行为用 B-H 磁化曲线来描述，其中 H 是外磁场 $\boldsymbol{H}$ 的幅值，B 是材料中总的磁通密度 $\boldsymbol{B}$ 的幅值。根据式（5.72），通量 $\boldsymbol{B}$ 由外磁场的贡献 $\mu_0\boldsymbol{H}$，以及材料中感应的磁化场的贡献 $\mu_0\boldsymbol{M}$ 等两个部分组成。假定有一个未曾磁化的铁块样品，并且有测量 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$ 的实验装置。在图 5-22 中，点 O 表示该样品未磁化的状态。当 $\boldsymbol{H}$ 连续增加时，$\boldsymbol{B}$ 也跟着增加，对应着从点 O 到点 A_1 的曲线。在点 A_1，几乎所有的磁畴方向都已经同外磁场 $\boldsymbol{H}$ 一致，因此点 A_1 表示饱和状态。再从点 A_1 出发，将 $\boldsymbol{H}$ 减小到零值，则磁化曲线将沿着从点 A_1 到点 A_2 的路径变化。在点 A_2 处，外磁场 $\boldsymbol{H}$ 为零，但材料中的磁通密度 $\boldsymbol{B}$ 不为零，其数值称**剩余磁通密度**（residual flux density），简称剩磁，用 B_r 表示。这时，该铁块样品已经磁化，并且可以用作永久磁铁，因为其中大部分磁畴方向仍然是一致的。再沿反向增加 $\boldsymbol{H}$，将导致 $\boldsymbol{B}$ 从点 A_2 的 B_r 开始减小，直到点 A_3 处的零值；如果进一步增加 $\boldsymbol{H}$ 的数值（仍旧沿着负的方向），则磁化曲线将达到饱和状态点 A_4。最后，先让 $\boldsymbol{H}$ 回复到零，再沿正向增大，则曲线将沿着从点 A_4 到点 A_1 的路径变化。这一过程称为**磁滞**（magnetic hysteresis）过程。在英语中，“hysteresis” 就是 “滞后” 的意思。**磁滞回线**（hysteresis loop）表明，铁磁材料的磁化过程，不仅取决于外磁场 $\boldsymbol{H}$，还跟材料以前的磁状态有关。磁滞回线的具体形状、范围，取决于铁磁材料的性质以及 $\boldsymbol{H}$ 变化的峰峰值范围。磁滞回线宽的材料，称**硬磁材料**（hard ferromagnetic material），如图 5-23a 所示。这类材料具有很大的剩磁 B_r，因而不容易被外磁场去磁。硬磁材料用于制造永久磁铁，供电动机、发电机使用。**软磁材料**（soft ferromagnetic material）则具有窄的磁滞回线（如图5-23b所示），因此它们易于磁化、去磁。为了使铁磁材料去磁，需将其放在外磁场中持续若干个磁滞周期，并使外磁场的峰峰值由大到小、逐渐减弱到零。

211 212

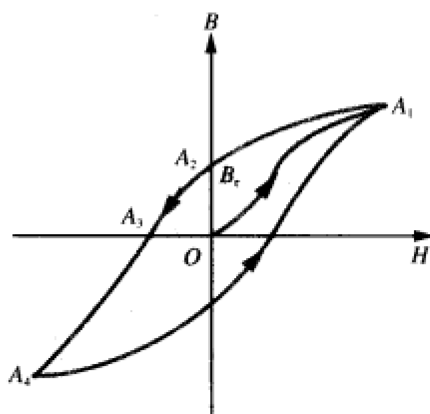


图 5-22　铁磁材料的典型磁滞回线

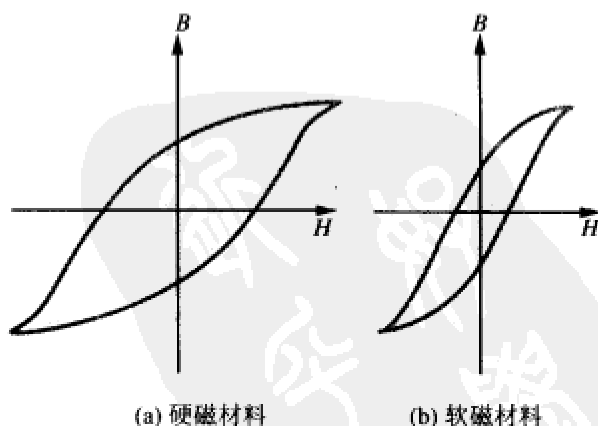


图 5-23　硬磁材料与软磁材料的磁滞回线的比较

复习题

Q5.12　磁性材料分哪三类？它们的相对磁导率典型值是多少？

Q5.13　在铁磁材料中，引起磁滞的原因是什么？

Q5.14　磁化曲线描述的是什么？硬磁材料和软磁材料的磁化曲线的差别是什么？

5.8　磁场的边界条件

在4.9节中，针对邻接的两种不同媒介，推导出了一组边界条件，以描述一种媒介中的电场量 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$，是如何与第二种媒介中的对应电场量相关的。下面将针对磁场量 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$，推导一组类似的边界条件。在电场中，对横跨边界的一个圆柱盒子应用高斯定律，结果发现，两媒介中的电通量密度法向分量之差，等于边界上的面电荷密度 ρ_s。即

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{s} = Q \Rightarrow D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \tag{5.78}$$

与此类似，应用磁场的高斯定律，即式（5.44），可以得到以下结论：

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} = 0 \Rightarrow B_{1n} = B_{2n} \tag{5.79}$$

这一结果表明：$\boldsymbol{B}$ 的法向分量在两种媒介的交界面上是连续的。对于线性、各向同性的媒介，由于 $\boldsymbol{B}_1 = \mu_1 \boldsymbol{H}_1$，$\boldsymbol{B}_2 = \mu_2 \boldsymbol{H}_2$，因此，对应式（5.79）的 $\boldsymbol{H}$ 的边界条件为

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \tag{5.80}$$

比较式（5.78）、式（5.79）可知：尽管 $\boldsymbol{B}$ 的法向分量在边界上是连续的，但 $\boldsymbol{D}$ 的法向分量却不一定连续（除非交界上的面电荷密度 $\rho_s = 0$）。电场 $\boldsymbol{E}$ 以及磁场 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量边界条件，也可以用一个类似的转折句式来表述，即：尽管 $\boldsymbol{E}$ 的切向分量在边界上是连续的，但 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量却不一定连续（除非交界上的面电流密度 $\boldsymbol{J}_s = 0$）。为了获得 $\boldsymbol{H}$ 切向分量的边界条件，同4.9节中建立 $\boldsymbol{E}$ 的切向分量边界条件一样，采用同样的基本步骤。参照图5-24，对于边长为 Δl 和 Δh，且封闭的矩形路径，应用安培定律式（5.47），并令 $\Delta h \to 0$，可得

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_a^b \boldsymbol{H}_2\cdot d\boldsymbol{l} + \int_c^d \boldsymbol{H}_1\cdot d\boldsymbol{l} = I, \tag{5.81}$$

其中，$\boldsymbol{H}_1$、$\boldsymbol{H}_2$ 分别为媒介1和媒介2中的磁场。根据安培定律，I 为回路包围的面中，沿着右手定则确定的方向通过的净电流（当右手四指沿着回路 C 的方向时，大拇指所指的方向即为 I 的方向）。对于图5-24所示的 $\boldsymbol{H}_1$、$\boldsymbol{H}_2$ 方向，以及积分路径 C 的方向，可以看到，$\boldsymbol{H}_2$ 的边界切向分量 $\boldsymbol{H}_{2t}$ 平行于 ab 段上的 $d\boldsymbol{l}$，且方向相同，但 $\boldsymbol{H}_1$ 的边界切向分量 $\boldsymbol{H}_{1t}$ 则反向平行于 cd 段上的 $d\boldsymbol{l}$。当令回路的 $\Delta h \to 0$ 时，回路的表面趋向于长度为 Δl 的细线。因此，流经该细线的总电流是 $I = J_s \Delta l$，其中，J_s 是穿过回路的面电流密度之法向分量的幅值。基于这些考虑，式（5.81）变为

213

$$H_{2t}\Delta l - H_{1t}\Delta l = J_s \Delta l \tag{5.82}$$

即

$$H_{2t} - H_{1t} = J_s \quad (\text{A/m}) \tag{5.83}$$

结合右手定则的方向关系，上述结果可以写成一般化的矢量形式，即

$$\hat{\boldsymbol{n}}_2 \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{J}_s, \tag{5.84}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{n}}_2$ 是离开媒介2的单位法向矢量，如图5-24所示。由于面电流只能出现在理想导体以及超导体的表面，因此，在电导率为有限值的媒介的交界面上，$\boldsymbol{J}_s = 0$，即

$$H_{1t}=H_{2t} \tag{5.85}$$

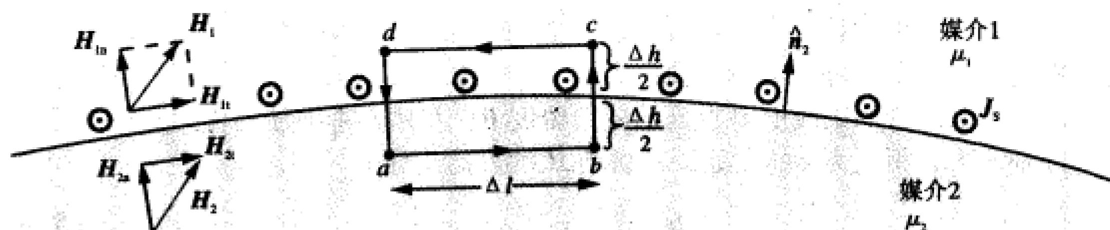


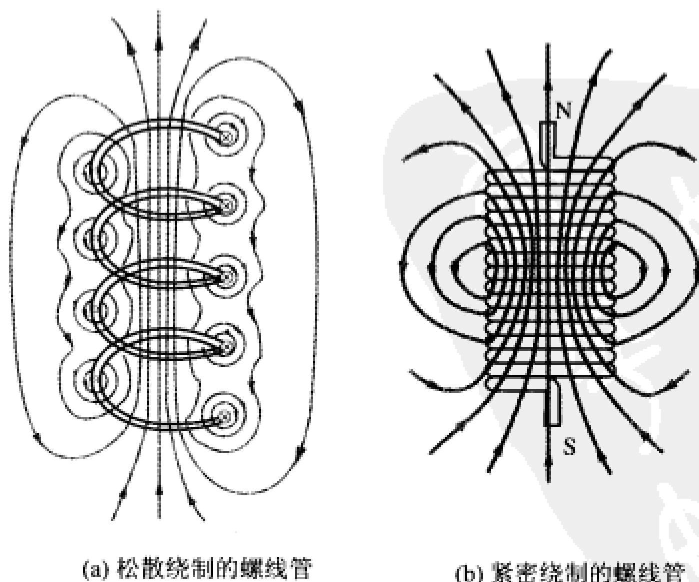
图 5-24 媒介 1(μ_1)和媒介 2(μ_2)的交界面

练习 5.12 参照图 5-24，如果 $\boldsymbol{H}_2=(\hat{x}3+\hat{z}2)$ (A/m)，$\mu_{r_1}=2$，$\mu_{r_2}=8$，$\boldsymbol{J}_s=0$，确定 $\boldsymbol{H}_1$ 与 $\hat{\boldsymbol{n}}_2=\hat{z}$ 之间的夹角。

答案：$\theta=20.6°$。(参见)

5.9 电感

电感器是电容器在磁场中的对偶器件。正如电容器可以将电能存储在导电板间媒介中的电场中一样，电感器能够将磁场能存储在构成电感器的体积中。电感器的典型例子是图 5-25a 所示的线圈，它由多匝导线呈螺旋状绕制在圆柱形的芯柱上构成。这种结构称螺线管（solenoid）。芯柱可以是空气，也可以放入磁导率为 μ 的磁性材料。如果导线载流为 I，且各匝紧密排列，则在螺线管的内部区域，可以产生相对均匀的磁场，其磁场的模式类似永久磁铁的磁场模式，如图5-25b的场线所示。 214



(a) 松散绕制的螺线管 (b) 紧密绕制的螺线管

图 5-25 松散绕制、紧密绕制的螺线管的磁力线

5.9.1　螺线管中的磁场

在讨论电感之前，先推导螺线管内部的磁通密度 **B** 的表达式。假定螺线管是紧密绕制的，且每单位长度有 n 匝导线。尽管每匝都是有微小升降的螺旋形状，但在分析中仍看成一个圆环，如图 5-26 所示。螺线管的长度为 l，半径为 a，载流为 I。先考虑位于螺线管的轴线上 P 点处的磁通密度 **B**。在例 5-4 中已经得到，在半径为 a 的圆环轴线上，距离为 z 的点处，其磁场 **H** 的表达式为

$$\mathbf{H}=\hat{z}\frac{I'a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}},\tag{5.86}$$

其中，I' 是回路中的电流。如果将增量长度为 $\mathrm{d}z$ 的一小段螺线管，看成 $n\mathrm{d}z$ 匝、载流 $I'=In\mathrm{d}z$ 的等效回路，则在点 P 产生的场为

$$\mathrm{d}\mathbf{B}=\mu\mathrm{d}\mathbf{H}=\hat{z}\frac{\mu nIa^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}\mathrm{d}z\tag{5.87}$$

P 点的总场 **B**，可以通过对整个螺线管长度做积分而得到。将变量 z 用角度 θ 来表示，可以简化积分。即进行以下变换

$$z=a\tan\theta,\tag{5.88a}$$

$$a^2+z^2=a^2+a^2\tan^2\theta=a^2\sec^2\theta\tag{5.88b}$$

$$\mathrm{d}z=a\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta\tag{5.88c}$$

将后面两个表达式代入式（5.87），并从 θ_1 积分到 θ_2，即

$$\mathbf{B}=\hat{z}\frac{\mu nIa^2}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{a\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{a^3\sec^3\theta}=\hat{z}\frac{\mu nI}{2}(\sin\theta_2-\sin\theta_1)\tag{5.89}$$

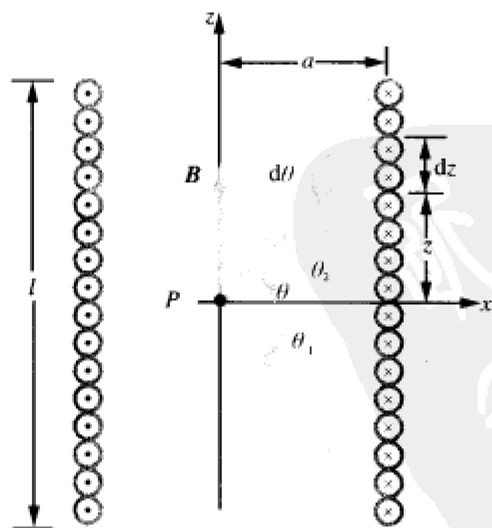


图 5-26　螺线管的横截面图(求轴线上 P 点的 **H**)

如果螺线管的长度 l 远大于半径 a，则 $\theta_1\approx-90°$，$\theta_2\approx90°$，于是式（5.89）简化为

$$\mathbf{B}\approx\hat{z}\mu nI=\frac{\hat{z}\mu NI}{l}\quad(l/a\gg1\text{ 的长螺线管})\tag{5.90}$$

其中，$N=nl$，是长度 l 上的总匝数。虽然式（5.90）的场 $\boldsymbol{B}$ 表达式是针对螺线管的中点而推导出来的，但却在螺线管内几乎所有的点上（靠近两端的点除外）都成立。

现在回到电感的讨论。电感包括自感（self-inductance），它代表线圈或电路自身产生的磁通链；以及互感（mutual inductance），它所牵涉到的电路中的磁通链，是由另外一个电路中的电流产生的磁场引起的。通常，当人们使用电感（inductance）这一术语时，指的都是自感。

练习 5.13 对于一个非常长的螺线管，应用式（5.89），求螺线管端部通过轴线处的 $\boldsymbol{B}$ 表达式。相比螺线管中点的 $\boldsymbol{B}$，端部的 $\boldsymbol{B}$ 有何特点？

答案：端点处的 $\boldsymbol{B}=\hat{z}(\mu NI/2l)$，恰好等于中点 $\boldsymbol{B}$ 的一半。（参见◉）

5.9.2 自感

根据式（5.66），交链表面 S 的磁通 Φ 为

$$\Phi=\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}\quad (\text{Wb}) \tag{5.91}$$

在磁场近似均匀的螺线管中，场 $\boldsymbol{B}$ 由式（5.90）给定，因此单个环路交链的磁通为

$$\Phi=\int_S \hat{z}\left(\mu\frac{N}{l}I\right)\cdot\hat{z}ds=\mu\frac{N}{l}IS \tag{5.92}$$

其中，S 是环路的横截面积。磁通链（magnetic flux linkage）Λ 定义为交链给定的电路或导电结构的总磁通。如果电路结构由具有多个回路的单根导体构成，例如螺线管的情况，则 Λ 等于交链电路结构的所有环路的磁通。对于具有 N 匝的螺线管，有

$$\Lambda=N\Phi=\mu\frac{N^2}{l}IS\quad (\text{Wb}) \tag{5.93}$$

相反，如果电路结构是由两根分离的导体构成的，例如图 5-27 所示的平行线以及同轴传输线的情况，则其中任何一根导体上长度为 l 的一段所具有的磁通链 Λ，是指在两根导体包围的面积中通过的磁通 Φ（该面积在图 5-27 中以阴影标示）。实际上，也有部分磁通经过导体本身，但若假定电流仅仅在导体表面流过，则导体内部的磁场为零，因而导体内的磁场为 0。这一假定是合理的，因为计算 Λ 的目的，是为了确定特定结构的电感，而电感主要在交流（即时变的电流、电压以及场）的情况下起作用。在 7.6 节将会看到，在交流情况下，流经导体的电流主要集中在导体表面很薄的一层中。对于平行传输线的情况，电流在导线的外表面流动，而在同轴线中，电流则在内导体的外表面以及外导体的内表面流动（载流面是毗邻电场与磁场的导体表面，其中的场是指导体之间的区域中的场）。

216

 **D5.1-5.2**

任何导电结构的自感定义为磁通链 Λ 与流经该结构的电流 I 的比值

$$L=\frac{\Lambda}{I}\quad (\text{H}) \tag{5.94}$$

在国际单位制中，电感的单位是 H，它跟 Wb/A 等效。

对于螺线管，利用式（5.93）可得

$$L=\mu\frac{N^2}{l}S\quad (\text{螺线管}), \tag{5.95}$$

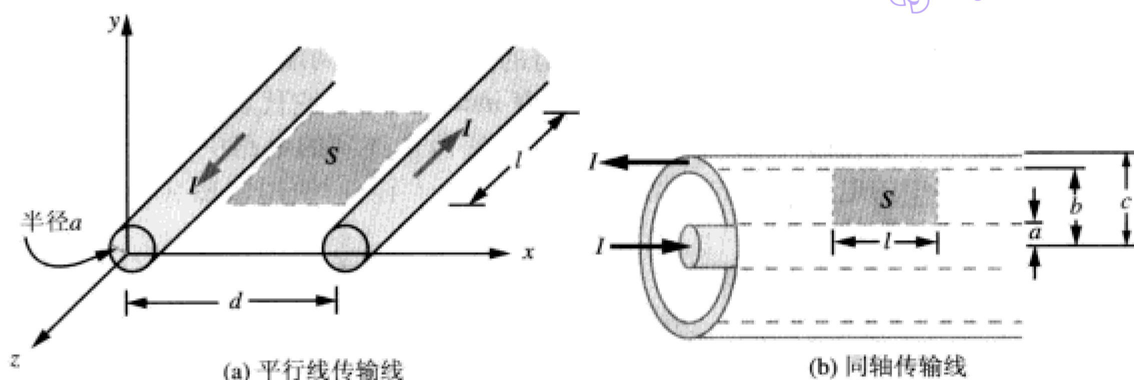


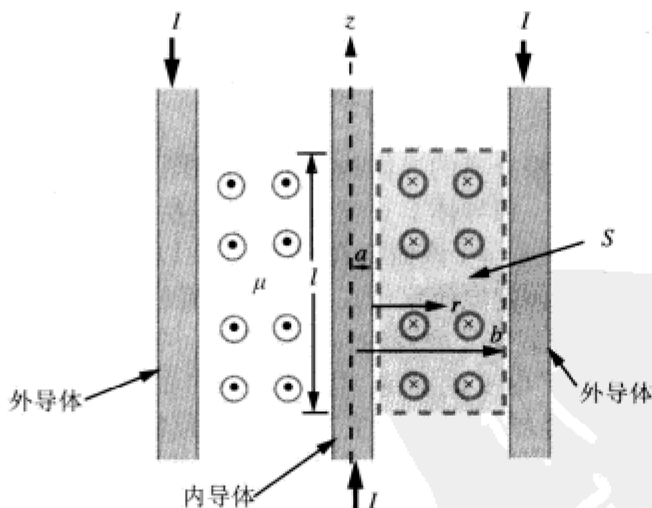
图 5-27　为了计算双导体传输线每单位长度的电感，需确定通过导体之间面积 S 的磁通

而对于类似图 5-27 的两导体结构配置，有

$$L=\frac{\Lambda}{I}=\frac{\Phi}{I}=\frac{1}{I}\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} \tag{5.96}$$

例 5-8　同轴传输线的电感

求同轴传输线每单位长度的电感表达式。已知导体的半径分别为 a 和 b，绝缘材料具有线性的磁导率 μ，如图 5-28 所示。



217

图 5-28　同轴传输线的横截面视图（例 5-8）

解答：由于内导体中电流 I 的存在，在两导体之间磁导率为 μ 的区域中产生磁场，可由式（5.30）求得为

$$\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{\mu I}{2\pi r}, \tag{5.97}$$

其中，r 是到同轴传输线的轴线的径向距离。选定传输线上长度为 l 的一段，如图 5-28所示。在导体间的平面区域 S 上，$\boldsymbol{B}$ 处处垂直该平面。因此，通过 S 的磁通为

$$\Phi = l\int_a^b B\mathrm{d}r = l\int_a^b \frac{\mu I}{2\pi r}\mathrm{d}r = \frac{\mu I l}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{5.98}$$

利用式(5.96),同轴传输线每单位长度的电感为

$$L' = \frac{L}{l} = \frac{\Phi}{lI} = \frac{\mu}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad ■ \tag{5.99}$$

5.9.3 互感

两个导电结构之间的磁耦合用“互感”来描述。为简单起见,假定有两个闭合回路,面积分别为 S_1、S_2,其中第一个回路中有电流 I_1,如图 5-29 所示。I_1 产生的磁场 $\boldsymbol{B}_1$ 在回路 2 中引起的磁通 Φ_{12} 为

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \boldsymbol{B}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}, \tag{5.100}$$

如果回路 2 有 N_2 匝，并且全部以完全相同的方式耦合 $\boldsymbol{B}_1$ 的话，则 $\boldsymbol{B}_1$ 引起的穿过回路 2 的总磁通链为

$$\Lambda_{12} = N_2\Phi_{12} = N_2\int_{S_2} \boldsymbol{B}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{5.101}$$

同这一磁耦合相关的互感为

$$L_{12} = \frac{\Lambda_{12}}{I_1} = \frac{N_2}{I_1}\int_{S_2} \boldsymbol{B}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \quad (\mathrm{H}) \tag{5.102}$$

互感是变压器的重要参数，因为在变压器中，有两组或多组线圈共用同一个磁心，如同图 5-30 的环形螺线管一样。

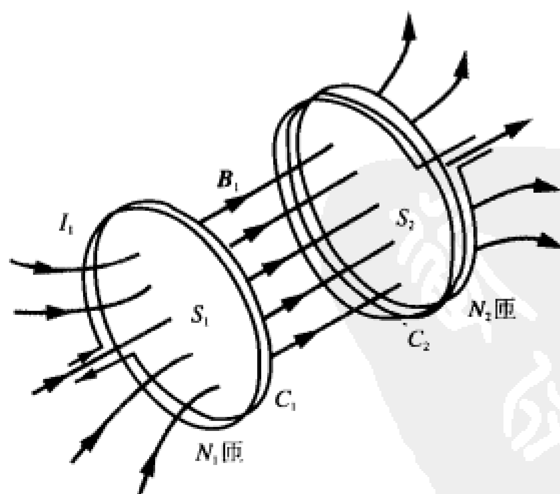


图 5-29　回路 1 中的电流 I_1 产生的磁力线交链回路 2 的表面 S_2

复习题

Q5.15　长螺线管内部的磁场是怎样的?

Q5.16　自感和互感的差别是什么?

Q5.17　螺线管的电感同其匝数 N 是什么关系?

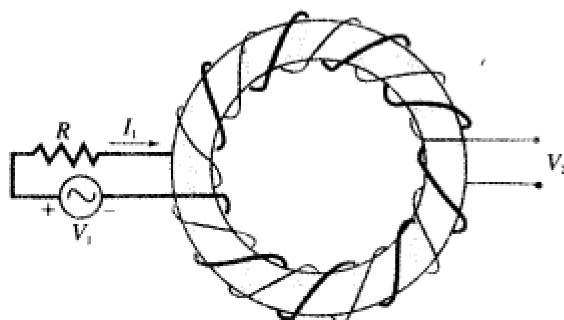


图5-30　具有两组线圈，被用作变压器的环形螺线管

5.10　磁场能

在4.11节中，通过分析电容从零电压充电到最终的电压 V 时，所消耗的能量都到哪里去了，而引入了电场能的概念。现在用类似的方法，来研究电感器连接到电流源的情况。若电感器的电感为 L，将其中的电流从零开始增加到最终的电流 I。根据电路理论，电感器两端的电压应该为 $v=L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$。功率 p 等于 v 和 i 的乘积，而功率对时间的积分则为所做的功，或能量。因此，为了在电感器中建立电流 I，所消耗的总能量（以J为单位）应该为

$$W_{\mathrm{m}}=\int p\mathrm{d}t=\int iv\ \mathrm{d}t=L\int_0^I i\ \mathrm{d}i=\frac{1}{2}LI^2\quad(\mathrm{J})\tag{5.103}$$

将这个能量称为储存在电感器中的磁场能（magnetic energy）。这样称呼的原因是显而易见的。

考虑螺线管电感器的情况。其电感由式（5.95）给定为 $L=\mu N^2S/l$，其内部的磁通密度幅值由式（5.90）给定为 $B=\mu NI/l$，即 $I=Bl/(\mu N)$。将 L 和 I 的表达式代入式（5.103）可得

$$W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}\left(\mu\frac{N^2}{l}S\right)\left(\frac{Bl}{\mu N}\right)^2=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}(lS)=\frac{1}{2}\mu H^2v,\tag{5.104}$$

其中，$v=lS$ 为螺线管内部的体积，$H=B/\mu$。磁能密度（magnetic energy density）w_{m} 定义为在每单位体积中磁场能 W_{m} 的数值

$$w_{\mathrm{m}}=\frac{W_{\mathrm{m}}}{v}=\frac{1}{2}\mu H^2\quad(\mathrm{J/m^3})\tag{5.105}$$

虽然上式是从螺线管电感器推导出来的，但它对于任何具有磁场 $\boldsymbol{H}$ 的媒介都成立。更进一步，对于任何体积 v 磁导率为 μ 的材料（包括真空，其磁导率为 μ_0），由于存在磁场 $\boldsymbol{H}$ 而在该媒介中储存的总磁场能为

$$W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\int_v \mu H^2\mathrm{d}v\quad(\mathrm{J})\tag{5.106}$$

例5-9　同轴电缆中的磁场能

同轴电缆的内半径为 a，外半径为 b，绝缘材料的磁导率为 μ。试推导在长度为 l 的一段同轴电缆中存储的磁场能的表达式。

解答：根据式（5.97），绝缘材料中的磁场幅值为

$$H=\frac{B}{\mu}=\frac{I}{2\pi r},$$

其中，r 是到内导体中心的径向距离，如图 5-28 所示。因此，储存在同轴电缆中的磁场能为

219

$$W_m=\frac{1}{2}\int_v \mu H^2 \mathrm{d}v=\frac{\mu I^2}{8\pi^2}\int_v \frac{1}{r^2}\mathrm{d}v$$

由于 H 仅仅为 r 的函数，因此选择 $\mathrm{d}v$ 为长度为 l、半径为 r、径向厚度为 $\mathrm{d}r$ 的圆柱壳，即 $\mathrm{d}v=2\pi rl\mathrm{d}r$，于是有

$$W_m=\frac{\mu I^2}{8\pi^2}\int_a^b \frac{1}{r^2}\cdot 2\pi rl\mathrm{d}r=\frac{\mu I^2 l}{4\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\quad(\mathrm{J})$$

■

本章要点

- 在磁通密度为 $\boldsymbol{B}$ 的区域中，以速度 $\boldsymbol{u}$ 运动的电荷 q，所受到的磁场力为 $\boldsymbol{F}_m=q\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}$。
- 在既有电场、又有磁场的区域中，运动的电荷所受的总电磁力称洛仑兹力：$\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})$。
- 作用在电流回路上的磁场力能够产生磁力转矩。
- 由电流单元产生的磁场强度，用毕奥－萨伐尔定律来确定。
- 磁场的高斯定理指出，流出任何封闭面的净磁通为零。
- 安培定律指出，$\boldsymbol{H}$ 沿闭合路径的线积分，等于该路径包围的曲面中通过的净电流。
- 矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 同 $\boldsymbol{B}$ 的关系为 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$。
- 根据材料的晶格结构，以及它们在外磁场作用下的行为，材料可分为抗磁性、顺磁性以及铁磁性三类。
- 抗磁性以及顺磁性材料的 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 间具有线性关系，且 $\mu\approx\mu_0$。
- 铁磁性材料的 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$ 间具有非线性的磁滞特性，某些铁磁材料的 μ 高达 $10^5\mu_0$。
- 在两种不同媒介的交界上，$\boldsymbol{B}$ 的法向分量是连续的，而 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量则满足 $H_{2t}-H_{1t}=J_s$ 的关系，其中 J_s 是在垂直 H_{1t}、H_{2t} 的方向上的面电流密度。
- 电路的电感定义为交链该电路的磁通与流经该电路的电流的比值。
- 磁能密度为 $w_m=\frac{1}{2}\mu H^2$。

重要术语汇总

请解释下列术语的意义，或给出定义

磁通密度 $\boldsymbol{B}$	磁场力 $\boldsymbol{F}_m$	洛仑兹力 $\boldsymbol{F}$	力臂 d
转矩 $\boldsymbol{T}$	磁矩 $\boldsymbol{m}$	毕奥－萨伐尔定律	（体）电流密度 $\boldsymbol{J}$
面电流密度 $\boldsymbol{J}_s$	磁偶极子	磁场高斯定理	安培定律

220

环形螺线管	矢量泊松方程	磁通 Φ	轨道和自旋磁矩
磁化矢量 $\boldsymbol{M}$	磁化率 χ_m	抗磁性，顺磁性，铁磁性	
磁畴	磁化曲线	磁滞	硬磁材料，软磁材料
电感（自感、互感螺线管		磁场能 W_m	磁能密度 w_m

习题

5.2 磁场力与转矩

5.1* 一个电子，沿正 x 轴方向以 4×10^6m/s 的速度，发射到具有均匀磁通密度 $\boldsymbol{B}=(\hat{x}2-\hat{z}3)$(T)的媒介中。电子电量为 $e=1.6\times10^{-19}$C，质量为 $m_e=9.1\times10^{-31}$kg。试确定电子（在被发射到媒介中的瞬间）的初始加速度矢量。

5.2 当电量为 q、质量为 m 的电荷，以初始速度 $\boldsymbol{u}$ 垂直进入均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 时，作用在电荷上的磁场力 $\boldsymbol{F}_m$ 将导致电荷作半径为 a 的圆周运动，如图 5-31 所示。通过令 $\boldsymbol{F}_m$ 等于作用在电荷上的离心力，可将半径 a 表示为 q、m、$\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的函数，试求该函数。

5.3* 在图 5-32 所示的电路中，一个长度为 10cm，质量为 5g 的水平导线，用两根完全相同的弹簧悬挂着。在没有磁场时，导线的重量导致每根弹簧拉伸 0.2cm。在水平导线的区域中，施加均匀磁场之后，弹簧又伸长了 0.5cm。求磁通密度 $\boldsymbol{B}$ 的强度。

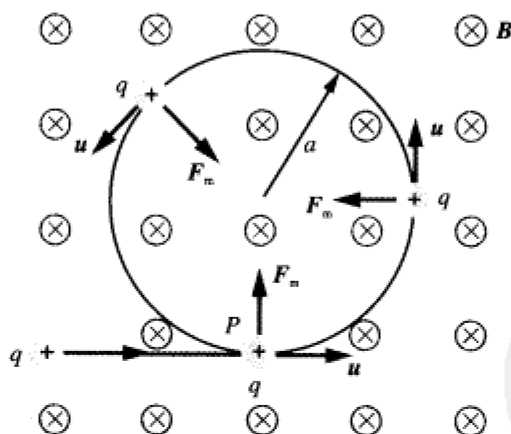


图 5-31 电荷 q 以速度 $\boldsymbol{u}$ 垂直发射到具有均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 的媒介（习题 5.2）

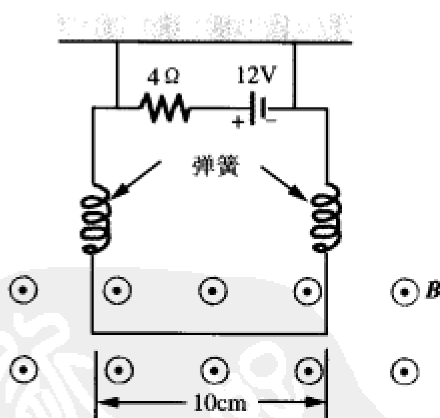


图 5-32 习题 5.3 的配置

5.4 图 5-33 所示的矩形回路，由 20 匝紧绕在一起，并可绕 z 轴旋转。回路平面与 y 轴的夹角为 30°，线圈中的电流为 0.5A。当施加均匀磁场 $\boldsymbol{B}=\hat{y}1.2$T 时，作用在回路上的转矩幅值是多少？从上往下看时，旋转方向是顺时针还是逆时针？

221

5.5* 在柱坐标系中，在 $r=4$cm，$\phi=\pi/2$，$-1\text{m}\leqslant z\leqslant1\text{m}$ 的地方，有一根长度为 2m 的直导线，沿着正 z 轴方向载流 5A。

(a) 如果 $\boldsymbol{B}=\hat{r}0.2\cos\phi$(T)，求作用在导线上的磁场力。

---

* 答案见附录 D。

解答见 CD-ROM。

(b) 使导线沿着负 ϕ 方向绕 z 轴旋转一圈（保持 $r=4$cm），需要做多少功？

(c) 力的最大值出现在哪个角度 ϕ？

5.6　在图 5-34 中，有一个 20 匝、长 $l=15$cm、宽 $w=5$cm 的矩形线圈，位于 y-z 平面。

(a) 如果线圈载流 $I=10$A，并外加磁场磁通密度为

$$\boldsymbol{B}=2\times10^{-2}\ (\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{y}}2)\qquad \text{(T)}$$

确定磁场作用在线圈上的转矩。

(b) 在什么样的角度 ϕ 下，转矩为零？

(c) 在什么样的角度 ϕ 下，转矩为最大？确定最大转矩的数值。

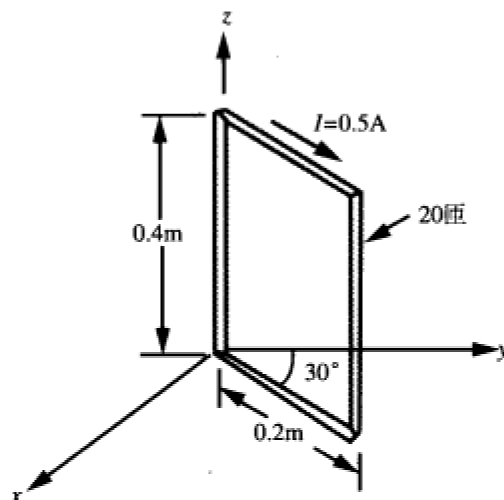


图 5-33　可绕 z 轴转动的矩形回路（习题 5.4）

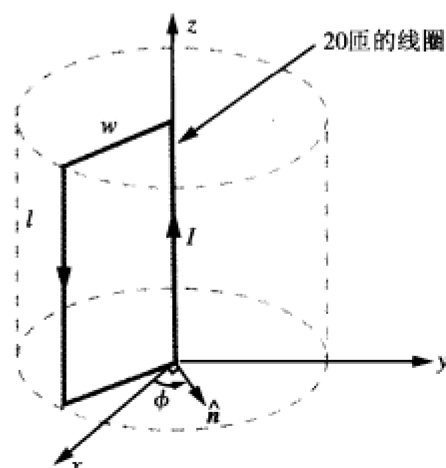


图 5-34　习题 5.6 的矩形回路

5.3　毕奥－萨伐尔定律

5.7*　一个 8cm × 12cm 的矩形回路导线，位于 x-y 平面中，中心在原点，长边与 x 轴平行。回路中的电流为 25A，沿着顺时针方向（从上往下看）。试确定回路中心点的磁场。

5.8　利用例 5-2 的方法，针对图 5-35 所定义的导体线段，推导任意点 P 处的磁场 $\boldsymbol{H}$ 表达式。如果导体从 $z_1=3$m 延伸到 $z_2=7$m，并且载流为 $I=5$A，求点 $P(2,\phi,0)$ 的 $\boldsymbol{H}$。

5.9*　图 5-36 所示的回路，由径向线段以及中心位于点 P 的圆弧构成。请用 a、b、θ 和 I 表示点 P 处的磁场 $\boldsymbol{H}$。

222

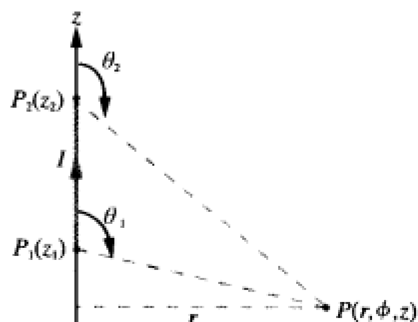


图 5-35　习题 5.8 的截流导体线段



图 5-36　习题 5.9 的回路配置

5.10 一个无限长的导体薄片，位于 $z=0$，$0 \leqslant x \leqslant w$，$-\infty \leqslant y \leqslant \infty$ 的空间区域，载有均匀的面电流密度 $\boldsymbol{J}_S = \hat{\boldsymbol{y}}5$（A/m）。试确定直角坐标系中的点 $P(0,0,z)$ 处的磁场表达式。

5.11* 在 x 轴上，有一根无限长的导线，载流为 50A，沿着正 x 轴方向，其附近有一个 10 匝的环形回路，位于 x-y 平面上。如果回路中心的磁场为 0，试确定回路中电流的大小和方向。

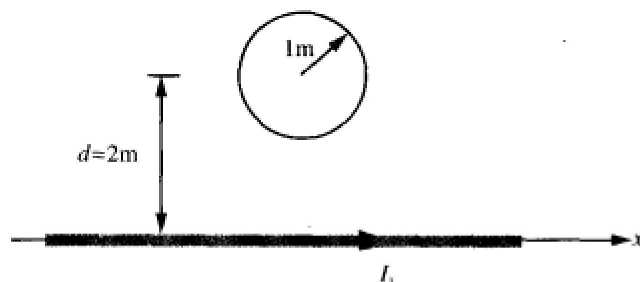


图 5-37 靠近直线电流的环形回路（习题 5.11）

5.12 两无限长的直导线，各载相反方向电流 6A。试确定图 5-38 中点 P 的磁通密度。

5.13* 一根东西走向，高于地面 8m 的长电力电缆，载流 I 未知。应用磁场计测得，当电流流经电缆时，地表磁通密度为 12μT，当电流为零时，地表磁通密度为 20μT。试确定电流的幅值。

223

5.14 两个平行的环形回路，各载流 20A，配置如图 5-39 所示。第一个回路位于 x-y 平面中，中心在原点，第二个回路的中心在 $z=2$m 处。如果两个回路具有相同的半径 $a=3$m，确定 z 轴上的以下各点的磁场幅值：

(a) $z=0$；

(b) $z=1$m；

(c) $z=2$m。

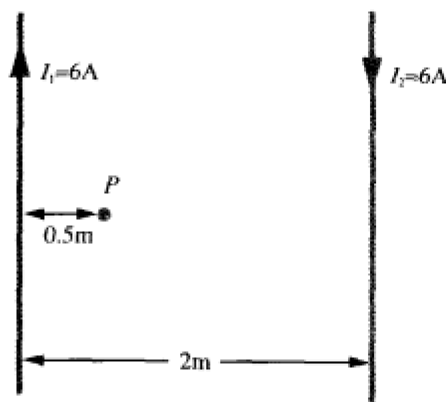


图 5-38 习题 5.12 的线路配置

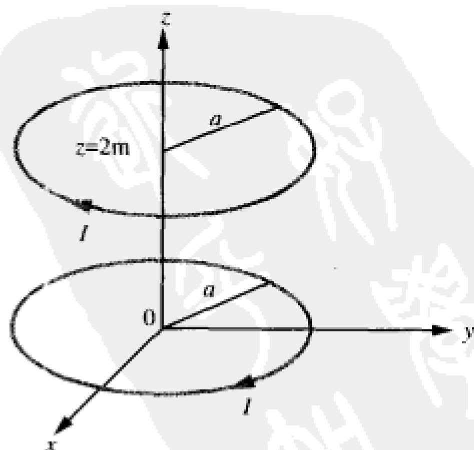


图 5-39 习题 5.14 的平行环形回路

5.4 两平行导体间的磁场力

5.15* 在图 5-40 中，长直导体位于矩形回路的平面上，相距矩形回路的距离为 $d=0.1$m。回路尺寸为 $a=0.2$m，$b=0.5$m，电流分别为 $I_1=10$A，$I_2=15$A。试确定作用在回

路上的净磁力。

5.16　在图5-41的配置中，两根平行的长直导体，各载电流 I，用8cm长的细弦吊着，导体每单位长度的质量为0.3g/cm。两导体互相排斥，吊弦之间的张角 θ 为10°。试确定电流 I 的大小以及两导体中电流的相对方向。

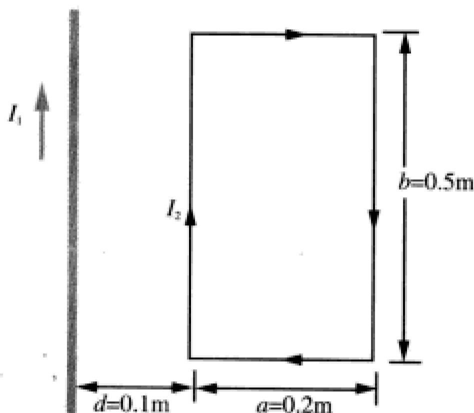


图5-40　靠近载流导线的电流回路（习题5.15）

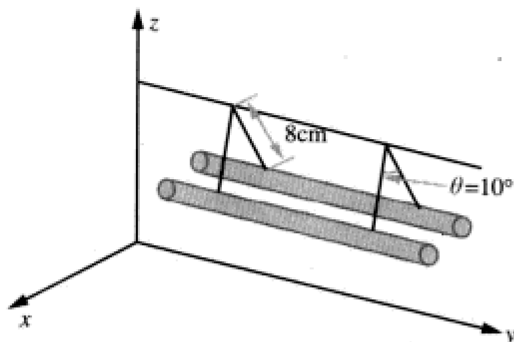


图5-41　由细弦吊着的平行导体（习题5.16）

5.17* 无限长的导电薄板，位于 x-y 平面上，沿 x 方向的宽度为 w，所载电流 I 沿着负 y 轴的方向。试确定：

（a）点 P 的磁场（薄板正中央的上方 h 处），如图5-42所示；

（b）过点 P 的无限长导线每单位长度所受的作用力（该导线平行于薄板，载有与薄板相反方向的电流 I）。

224

5.18　三根长直平行导线，按图5-43的方式配置，试确定电流为 I_3 的导线每单位长度所受的作用力。

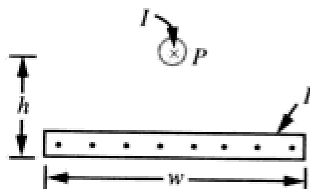


图5-42　电流片上方的直线电流源（习题5.17）

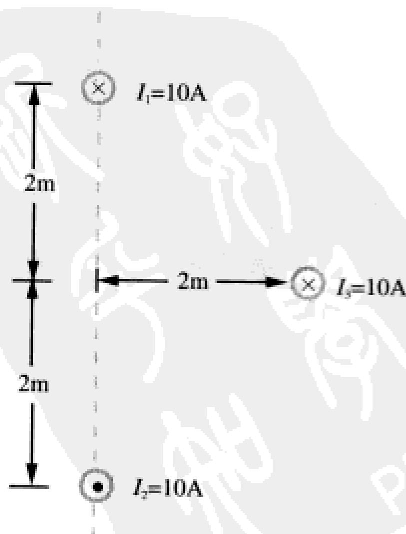


图5-43　习题5.18的三根平行导线

5.19* 图5-44所示的方形回路，边长为2m，载流 I_1 = 5A。另有一根长直导线，载流为

$I_2=10\text{A}$，通过方形回路一组对边的两个中点（但不接触）。试确定回路所受的合力。

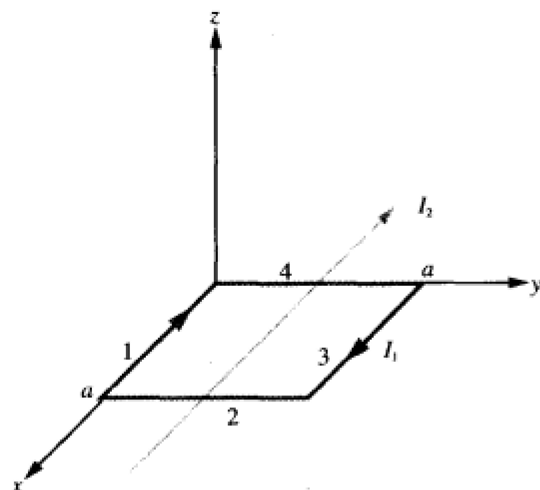


图 5-44 载流为 I_2 的长直导线，紧挨在载流为 I_1 的方形回路之上（习题 5.19）

5.5 麦克斯韦静磁场方程

5.20 在同轴电缆的内导体中，电流 I 沿着正 z 轴方向，并从外导体返回。内导体的半径为 a，外导体的内半径、外半径分别为 b 和 c。

225

(a) 确定下面四个区域中的磁场：$0 \leqslant r \leqslant a$；$a \leqslant r \leqslant b$；$b \leqslant r \leqslant c$；$r \geqslant c$。

(b) 假定 $I=10\text{A}$，$a=2\text{cm}$，$b=4\text{cm}$，$c=5\text{cm}$，在 $r=0$ 到 $r=10\text{cm}$ 的范围内，画出 $\boldsymbol{H}$ 的幅值关于 r 的函数曲线。

5.21* 一根长直圆柱导体，轴线与 z 轴重合，半径为 a，所载电流密度为 $\boldsymbol{J}=\hat{\boldsymbol{z}}J_0/r$，其中 J_0 为常数，r 是到圆柱体轴线的径向距离。对于以下区域，求磁场 $\boldsymbol{H}$ 的表达式：

(a) $0 \leqslant r \leqslant a$；

(b) $r>a$。

5.22 如果电流密度为 $\boldsymbol{J}=\hat{\boldsymbol{z}}J_0\text{e}^{-r}$，重做习题 5.21。

5.23* 在某导电区域，用柱坐标给出的磁场为

$$\boldsymbol{H}=\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{4}{r}[1-(1+2r)\text{e}^{-2r}]$$

求电流密度 $\boldsymbol{J}$。

5.6 矢量磁位

5.24 参照图 5-10：

(a) 对于 x-y 平面上的载流导线，试推导到该导线的距离为 r 的点 P 的矢量磁位表达式。

(b) 由 $\boldsymbol{A}$ 推导 $\boldsymbol{B}$，并证明该结果与利用毕奥－萨伐尔定律获得的表达式(5.29)相同。

5.25* 在给定的空间区域，矢量磁位为 $\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{x}}5\cos\pi y+\hat{\boldsymbol{z}}(2+\sin\pi x)$ (Wb/m)。

(a) 确定 $\boldsymbol{B}$。

(b) 利用式(5.66)，计算通过边长为 0.25m 的方形回路的磁通 Φ（设该回路位于 x-y 平面上，中心在原点，边平行于 x 轴和 y 轴）。

(c) 利用式(5.67)重新计算 Φ。

5.26 均匀的电流密度

$$\boldsymbol{J} = \hat{\boldsymbol{z}} J_0 \quad (\mathrm{A/m^2})$$

将产生以下的矢量磁位

$$\boldsymbol{A} = -\hat{\boldsymbol{z}} \frac{\mu_0 J_0}{4} (x^2 + y^2) \qquad (\mathrm{Wb/m})$$

(a) 应用矢量泊松方程验证以上论断。

(b) 利用 $\boldsymbol{A}$ 的表达式求 $\boldsymbol{H}$。

(c) 应用 $\boldsymbol{J}$ 的表达式以及安培定律，求 $\boldsymbol{H}$，并同（b）得到的结果进行比较。

5.27* 截面半径为 a 的圆柱细导线单元，位于 z 轴上，从 $z=-L/2$ 延伸到 $z=L/2$，载有沿 $+\hat{\boldsymbol{z}}$ 方向的电流 I。

(a) 求远离原点的点 P 处的 $\boldsymbol{A}$（假设 R 远大于 L，点 P 到电流单元上任何一点的距离都是近似相同的）。

(b) 确定相应的 $\boldsymbol{H}$。

5.7 材料的磁特性

5.28 在玻尔于 1913 年提出的氢原子模型中，电子以 $2\times10^6\,\mathrm{m/s}$ 的速度，沿着半径为 $5\times10^{-11}\,\mathrm{m}$ 的圆形轨道，环绕原子核运动。电子运动产生的磁矩幅值是多少？

226

5.29* 每 $\mathrm{m^3}$ 铁中包含 8.5×10^{28} 个原子。在饱和状态下，由于铁中电子自旋磁矩排列的对齐作用，将在总磁通密度中占据 1.5T 的贡献。如果单个电子的自旋磁矩是 $9.27\times10^{-24}\,\mathrm{A\cdot m^2}$，问在每个原子中，有多少个电子对饱和磁场产生贡献？

5.8 磁场的边界条件

5.30 由 x-y 平面分隔的两种媒介的磁导率分别为 μ_1、μ_2，如图 5-45 所示。如果交界上没有面电流，且媒介 1 中的磁场为

$$\boldsymbol{H}_1 = \hat{\boldsymbol{x}} H_{1x} + \hat{\boldsymbol{y}} H_{1y} + \hat{\boldsymbol{z}} H_{1z}$$

求

(a) $\boldsymbol{H}_2$；

(b) θ_1 和 θ_2；

(c) 若 $H_{1x}=3\mathrm{A/m}$，$H_{1y}=0$，$H_{1z}=4\mathrm{A/m}$，$\mu_1=\mu_0$，$\mu_2=4\mu_0$，计算 $\boldsymbol{H}_2$、θ_1、θ_2。

5.31* 假定在两种媒介的交界面 $y=0$ 上，存在面电流密度 $\boldsymbol{J}_s=\hat{\boldsymbol{x}}4(\mathrm{A/m})$，在媒介 1 中 $(y>0)$，$\boldsymbol{H}_1=\hat{\boldsymbol{z}}8(\mathrm{A/m})$，试确定媒介 2$(y<0)$中的 $\boldsymbol{H}_2$。

5.32 平面 $x-y=1$ 将磁导率为 μ_1 的媒介 1 同磁导率为 μ_2 的媒介 2 分隔，如图 5-46 所示。如果交界面上不存在面电流，且

$$\boldsymbol{B}_1 = \hat{\boldsymbol{x}}2 + \hat{\boldsymbol{y}}3 \quad (\mathrm{T})$$

求 $\boldsymbol{B}_2$。若 $\mu_1=5\mu_2$，计算 $\boldsymbol{B}_2$ 的具体数值。

提示：先求垂直于给定平面的单位矢量表达式。

5.33 $z=0$ 的平面将空气同铁块分离。如果空气中（$z\geqslant0$）的 $\boldsymbol{B}_1=\hat{\boldsymbol{x}}4-\hat{\boldsymbol{y}}6+\hat{\boldsymbol{z}}8$，求铁块（$z\leqslant0$）中的 $\boldsymbol{B}_2$（假定铁块的 $\mu=5000\mu_0$）。

5.34 证明：对于图 5-47 所示的平行交界面情况，如果交界面上不存在面电流密度的话，则 θ_4、θ_1 之间的关系与 μ_2 无关。

227

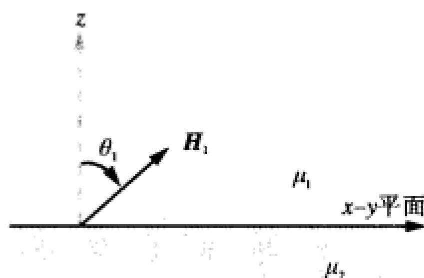


图 5-45　毗邻的磁性媒介（习题 5.30）

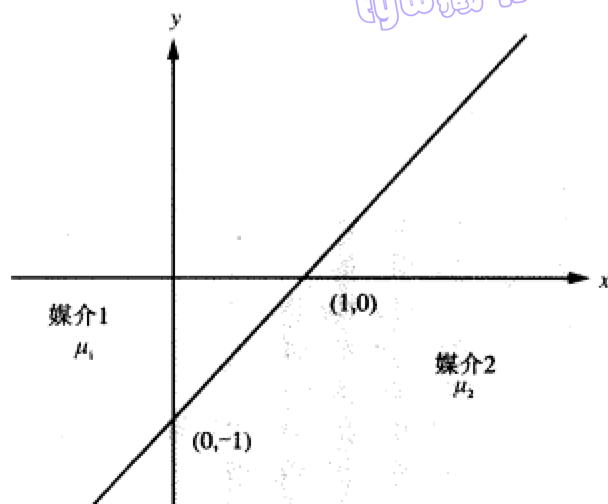


图 5-46　由平面 $x-y=1$ 分隔的磁性媒介（习题 5.32）

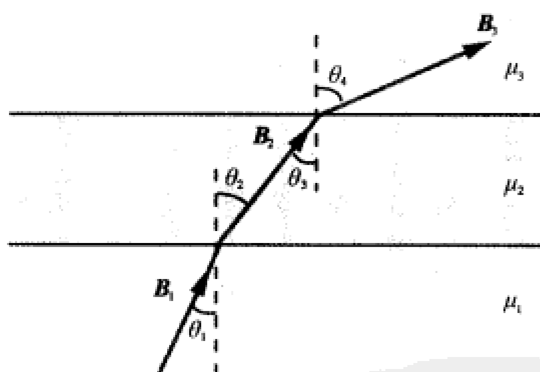


图 5-47　具有平行交界面的三种磁性媒介（习题 5.34）

5.9～5.10　电感和磁场能

5.35* 对于图 5-27a 所示的平行线传输线，推导其每单位长度的自感表达式（用 a、d、μ 表达，其中 a 为导线半径，d 为两导线轴线间的距离，μ 为导线所在媒介的磁导率）。

5.36 一个半径为 5cm、长度为 20cm、匝数为 200 的螺线管，载流 12A。如果螺线管的轴线同 z 轴一致，且中点在 $z=0$，请以 1cm 为步长，在 $-20\text{cm}\leqslant z\leqslant 20\text{cm}$ 的范围内，绘制轴线上的 $|\boldsymbol{H}(z)|$ 随 z 变化的曲线。

5.37* 一同轴传输线，内导体的外半径为 5cm，外导体的内半径为 10cm，导体间填充空气，载流为 I。试计算其 2m 长度中的磁场能（请表示为 I 的函数形式）。

5.38 在图 5-48 中，一个矩形线圈与一根载流 $I=20\text{A}$ 的长直导线共面。试确定通过该回路的磁通。

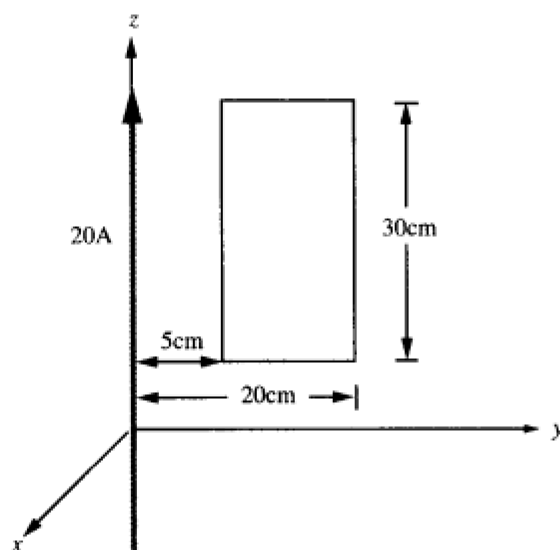


图 5-48　习题 5.38 的回路及导线配置情况

5.39 ~ 5.41　附加习题——题目及完整解答见◆。

228



第 6 章　时变电磁场的麦克斯韦方程

6.1　动态电磁场

"电荷产生电场，电流产生磁场"，这是前面两章学习的主要内容。只要电荷、电流在空间的分布不随时间变化，它们产生的场也就不随时间变化。然而，一旦电荷及电流源随时间 t 变化，则不仅它们产生的场将随时间变化，还将发生其他更复杂的事情。此时，电场、磁场成为相互联系的，它们的耦合产生出电磁波，可以在自由空间以及媒介中传播。如图 1-15 所示，电磁波包括光波、X 射线、红外线、伽马射线，以及无线电波，它们是物理世界的重要组成部分，在科学技术的许多领域中得到了广泛应用。

为了研究时变电磁现象，必须将麦克斯韦方程组当作一个整体来使用。在第 4 章的开篇，对这些方程做了第一次介绍，表 6-1 再次列出了它们的微分形式和积分形式。尽管在静态情况下（$\partial/\partial t=0$），可以应用第一对麦克斯韦方程来研究电现象（第 4 章），用第二对麦克斯韦方程来研究磁现象（第 5 章），但在动态情况下，我们必须处理电场和磁场之间存在的耦合问题（这种耦合体现在表 6-1 中的第 2 个和第 4 个公式中）。在表 6-1 中，第一个方程代表电场的高斯定理，它对于静态场、动态场都是成立的；第三个方程，即$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，主要是陈述"自然界不存在磁荷这种东西"，这对于静态场、动态场也都是成立的；但第二个和第四个方程则不同，它们对于静态场、动态场具有不同的意义。在动态情况下，时变的磁场产生电场（法拉第定律），反过来，时变的电场产生磁场（安培定律）。

表 6-1　麦克斯韦方程组

称　谓	微分形式	积分形式	
高斯定律	$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_v$	$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{s}=Q$	(6.1)
法拉第定律	$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$	$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\int_S \dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{s}$	(6.2)*
磁荷不存在（磁学高斯定律）	$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$	$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}=0$	(6.3)
安培定律	$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$	$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_S\left(\boldsymbol{J}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{s}$	(6.4)

* 对于静止的面 S。

在本章以及后续几章得出的某些结论，可能会同第 4 章、第 5 章的陈述及结论相抵触。这是因为，早前所学的材料，都属于恒定电流和静止电荷的特殊情况。当令 $\partial/\partial t=0$ 时，时变条件下获得的结果以及表达式，将退化为适合于静态条件的形式。

本章将从法拉第定律以及安培定律的分析与实际应用开篇，然后组合麦克斯韦的各个方程，针对一般性的时变情况以及正弦时变的特殊情况，获得电荷和电流源（ρ_v 与 $\boldsymbol{J}$），标量位和矢量位（V 与 $\boldsymbol{A}$），以及电磁场量（$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{H}$ 及 $\boldsymbol{B}$）等物理量之间的关系。

6.2 法拉第定律

电与磁之间的紧密联系是由奥斯特（Oersted）发现的，他证明了载流导线对指南针存在作用力，当电流沿着 $\hat{z}$ 轴方向时，指针总是转动到沿着 $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 的方向。作用在指南针上的力，是由导线中的电流所产生的磁场引起的。基于这一发现，法拉第（Michael Faraday）提出了以下假设：如果电流能够产生磁场，那么反过来也应该成立，即磁场也应该可以在导线中产生电流。为了证明他的猜想，在大约 10 年的时间里，他在位于伦敦的实验室里进行了大量试验，目的都在于要磁场在导线中感应出电流。在纽约州的奥尔巴尼，亨利（Joseph Henry）也在进行着类似的工作。导线被放在各种不同尺寸的永久磁铁附件，但就是没能在导线中检测到电流；在一根通电导线的附近，放置另外一根平行导线，满怀着期望以为载流导线的磁场，会在另一根导线中产生出电流，但结果也是否定的。最后，这类实验终于导致了正确的答案，这就是由法拉第和亨利在几乎同一时间（1831 年）各自独立完成的发现：*磁场确实能够在闭合的回路中产生电流，但条件是该回路的面积中通过的磁通链必须随时间变化*。感生电流产生的关键是*变化*（change）。为了说明感生电流产生的机理，考虑图 6-1 所示的装置：一个方形导电回路中接有检流计（galvanometer），放置在接有电池的导电线圈附近。其中的检流计是 19 世纪初用来检测电路电流的灵敏仪器。线圈的电流产生磁场 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}$ 的磁力线则穿过方形回路，如图 6-1 所示。在 5.6 节中，我们将通过回路的磁通 Φ 定义为磁通密度的法向分量对该回路包围表面 S 的积分，即

231

232

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} \quad (\text{Wb}) \tag{6.5}$$

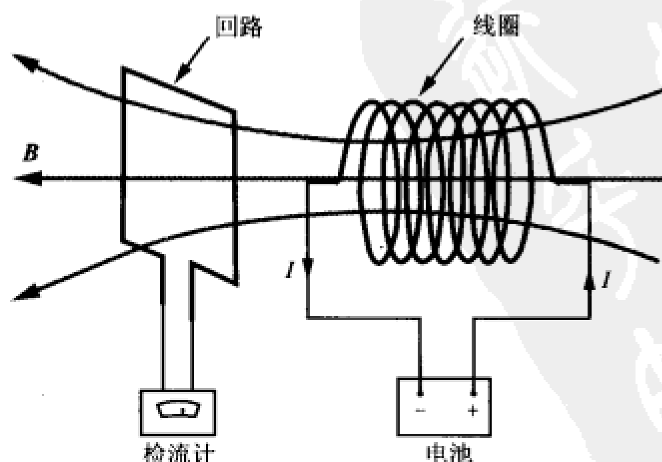


图 6-1　当通过方形回路的磁通随时间变化时，检流计就产生偏转

在静态条件下，线圈中的直流电流产生恒定的磁场 $\boldsymbol{B}$，因而穿过回路的磁通也是恒定的。当磁通恒定时，检流计未检测到电流。然而，在断开电池时，线圈的电流被中断，磁场下降到零，相应的磁通变化，引起检流计的指针发生瞬间的偏转。当重新接上电池时，检流计又发生瞬间的偏转，不过偏转的方向是相反的。因此，当磁通变化时，回路中将感生电流，而电流的方向则取决于磁通是在增加（譬如接通电池时）还是在减小（譬如断开电池时）。深入的观测还发现，当电池连接在线圈上时，如果忽然转动回路，或将它移近或移离线圈，回路中也能感生电流。在回路做物理运动时，虽然线圈产生的磁场 $\boldsymbol{B}$ 不变，但回路表面 S 的磁通链数量将发生改变。

检流计是伏特表和安培表的前身。当检流计检测到有电流流经线圈时，就意味着在检流计的两端产生了一个电压。这个电压称为**电动势**（electromotive force，或 emf），用 V_{emf} 表示，而这一过程，则称为**电磁感应**（electromagnetic induction）。在 N 匝的闭合导电回路中，感生的电动势为

$$V_{emf} = -N\frac{d\Phi}{dt} = -N\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} \quad (V) \tag{6.6}$$

虽然亨利也独立发现了通向式（6.6）的那些成果，但式（6.6）却是属于法拉第的，被称为**法拉第定律**（Faraday's Law）。式（6.6）中负号的意义，将在下一节解释。

可以看出，式（6.6）中的导数运算，是关于时间的全导数，其作用的对象有两个，一个是磁场 $\boldsymbol{B}$，另一个是微分面积 $d\boldsymbol{s}$。因此，下面三种情况中的任何一种，都可以在闭合的导电回路中产生电动势：

（1）时变磁场交链静止回路的情况，所感生的电动势称为**变压器电动势**（transformer emf），表示为 V_{emf}^{tr}。

（2）在恒定的磁场 $\boldsymbol{B}$ 中，回路在运动，并且回路面积随时间变化的情况（这里的面积是相对 $\boldsymbol{B}$ 的法向分量而言的），所感生的电动势称为**动生电动势**（motional emf），表示为 V_{emf}^{m}。

（3）运动的回路位于时变磁场 $\boldsymbol{B}$ 中的情况。

总电动势为

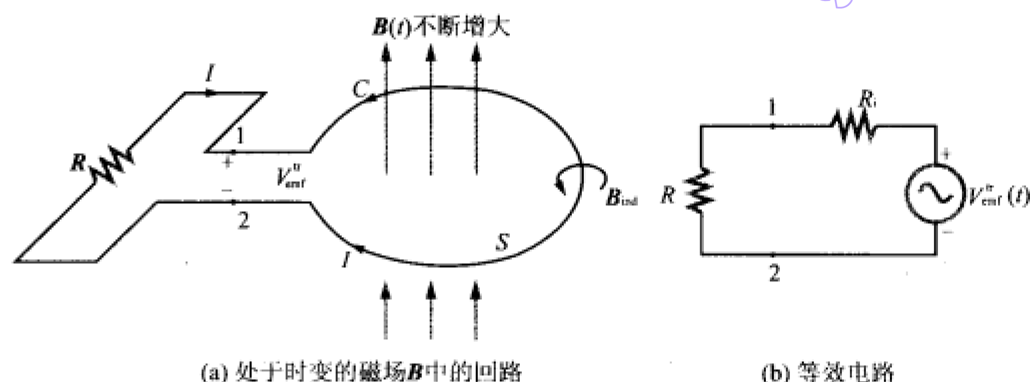
$$V_{emf} = V_{emf}^{tr} + V_{emf}^{m}, \tag{6.7}$$

如果回路静止，即第1种情况，则 $V_{emf}^{m}=0$；如果 $\boldsymbol{B}$ 恒定，即第二种情况，则 $V_{emf}^{tr}=0$。对于第三种情况，则两项都不为零。在下面的几节里，将针对每种情况分开进行讨论。

6.3 时变磁场中的静态回路

如图6-2a所示，一个单匝、环形、路径为 C、面积为 S 的导电回路，放置在时变磁场 $\boldsymbol{B}(t)$ 中。如前所述，当 S 静止，而磁场时变时，感应的电动势称为**变压器电动势**，记为 V_{emf}^{tr}。因为回路静止，所以式（6.6）中的 d/dt 仅仅作用在 $\boldsymbol{B}(t)$ 上，即

$$V_{emf}^{tr} = -N\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{s}, \tag{6.8}$$



(a) 处于时变的磁场B中的回路 (b) 等效电路

图 6-2 静止的环形回路位于时变的磁场 $\boldsymbol{B}(t)$ 中（a）及其等效电路（b）

其中，全导数运算 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ 被移到积分内部，并且变换为偏导数运算 $\partial/\partial t$，以表明其仅仅作用在 $\boldsymbol{B}$ 上。变压器电动势是圆环回路小缺口处的端点 1 和 2 之间的电位差，即使在不接电阻 R 的时候，它也是存在的。也就是说，$V^{tr}_{emf}=V_{12}$，这里 V_{12} 是圆环回路缺口上的开路电压。在直流情况下，$V^{tr}_{emf}=0$。对于图 6-2a 所示的回路，以及式（6.8）给出的 V^{tr}_{emf} 定义，其回路微分面积的法向，即 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 的方向，既可以选择朝上，也可以选择朝下。对于图 6-2a 中的端点 1、2，两种选择对应着相反的端点极性定义。$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 的方向同 V^{tr}_{emf} 的极性之间遵循以下的右手定则：让右手大拇指与 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 方向一致，则右手其余四指绕行的方向，就是路径 C 的方向，在缺口处，它是从 V^{tr}_{emf} 的正端穿过缺口到达 V^{tr}_{emf} 的负端。

如果回路具有内阻 R_i，则图 6-2a 的电路可以用图 6-2b 的等效电路表示，流经该电路的电流 I 为

$$I=\frac{V^{tr}_{emf}}{R+R_i} \tag{6.9}$$

对于良导体，R_i 通常很小，和常见电阻元件的电阻值 R 相比，R_i 可以忽略（$R=0$ 的短路情况除外）。

V^{tr}_{emf} 的极性以及 I 的方向遵从楞次定律（Lenz's law），即：*磁通 $\Phi(t)$ 变化所引起的回路电流，其方向总是阻碍该磁通的变化*。电流 I 将产生自己的磁场 $\boldsymbol{B}_{ind}$，对应的磁通为 Φ_{ind}。$\boldsymbol{B}_{ind}$ 的方向遵从右手定则：如果 I 沿顺时针方向（右手四指的方向），则 $\boldsymbol{B}_{ind}$ 朝下穿过 S（右手大拇指的方向）；相反，如果 I 沿逆时针方向，则 $\boldsymbol{B}_{ind}$ 朝上穿过 S。如果原来的磁场 $\boldsymbol{B}(t)$ 是增加的，即 $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t>0$，那么根据楞次定律，$I$ 必须沿着图 6-2a所示的方向，以使 $\boldsymbol{B}_{ind}$ 具有同 $\boldsymbol{B}(t)$ 相反的方向。因此，端点 2 的电位将高于端点 1，V^{tr}_{emf} 将为负值。然而，如果 $\boldsymbol{B}(t)$ 仍然保持现有的方向，但幅值减小，则 $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ 为负，电流方向将相反，其感生的磁场 $\boldsymbol{B}_{ind}$ 将同 $\boldsymbol{B}(t)$ 的方向一致，以阻碍 $\boldsymbol{B}(t)$ 变化（减小）。此时，V^{tr}_{emf} 为正。*必须注意的是，$\boldsymbol{B}_{ind}$ 阻碍的是 $\boldsymbol{B}(t)$ 的变化，而未必会阻碍 $\boldsymbol{B}(t)$ 本身*。

对于图 6-2a 中的回路，虽然在端点 1、2 间有一个小缺口，但仍将其看成路径为 C 的闭合回路。这样做的目的，是为了建立磁场 $\boldsymbol{B}$ 以及对应于感应电势 V^{tr}_{emf} 的电场 $\boldsymbol{E}$ 234

之间的联系。此外，在回路上任一点，电场 $\boldsymbol{E}$ 与流经回路的电流 I 也是相关的。对于路径 C，V_{emf}^{tr} 与 $\boldsymbol{E}$ 的关系为

$$V_{emf}^{tr} = \oint_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} \tag{6.10}$$

对于 $N=1$ 的情况（单匝的回路），令式（6.8）、（6.10）的右端相等，则有：

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{s}, \tag{6.11}$$

这就是表6-1给出的法拉第定律积分形式。其中需要注意的是，路径 C 的方向同 $d\boldsymbol{s}$ 的方向遵从右手定则。

对式（6.11）的左端应用应用斯托克斯定理，可得：

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot d\boldsymbol{s} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{s}, \tag{6.12}$$

为使两端的积分相等，被积函数应该相等，即

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \quad (\text{法拉第定律}) \tag{6.13}$$

这就是法拉第定律的微分形式，其文字表述为：时变的磁场将感应电场 $\boldsymbol{E}$，该电场的旋度等于磁场 $\boldsymbol{B}$ 对时间的负导数。尽管获得法拉第定律的有关推导是针对实际电路中的电场进行的，但式（6.13）却适用于空间任何点，而不管该点是否存在实际的电路。

例6-1 时变磁场中的电感器

有一个电感器，是由 N 匝细导线构成的环形回路，半径为 a，位于 x-y 平面中，中心在原点，接有一个电阻 R，如图6-3所示。已知磁场为 $\boldsymbol{B} = B_0(\hat{\boldsymbol{y}}2 + \hat{\boldsymbol{z}}3)\sin\omega t$，其中 ω 为角频率，求

（a）电感器一匝所交链的磁通；

（b）变压器电动势（假定 $N=10, B_0=0.2\text{T}, a=10\text{cm}, \omega=10^3\text{rad/s}$）；

（c）在 $t=0$ 时刻，V_{emf}^{tr} 的极性；

（d）$R=1\text{k}\Omega$ 时电路中产生的感应电流（假定导线的电阻可以忽略）。

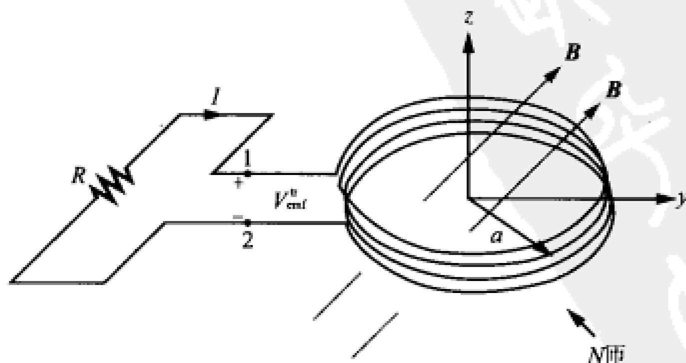


图6-3 位于 x-y 平面、N 匝的环形回路。磁场为 $\boldsymbol{B} = B_0(\hat{\boldsymbol{y}}2 + \hat{\boldsymbol{z}}3)\sin\omega t$（例6-1）

解答：（a）电感器每匝交链的磁通为

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_S [B_0(\hat{\boldsymbol{y}}2 + \hat{\boldsymbol{z}}3)\sin\omega t] \cdot \hat{\boldsymbol{z}}\, ds = 3\pi a^2 B_0 \sin\omega t$$

(b) 为了求 V_{emf}^{tr}，既可以应用式（6.8），也可以直接应用一般化表达式（6.6）。由后一种方法可得

235

$$V_{emf}^{tr} = -N\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(3\pi Na^2 B_0 \sin\omega t) = -3\pi N\omega a^2 B_0 \cos\omega t$$

当 $N=10, a=0.1\text{m}, \omega=10^3\text{rad/s}, B_0=0.2\text{T}$ 时，有

$$V_{emf}^{tr} = -188.5\cos 10^3 t \quad (\text{V})$$

(c) 在 $t=0$ 时，$d\Phi/dt>0, V_{emf}^{tr}=-188.5\text{V}$。由于磁通增加，因此电流 I 必须沿图6-3所示的方向，以满足楞次定律的要求。所以，点 2 的电位比点 1 高，即

$$V_{emf}^{tr} = V_1 - V_2 = -188.5 \quad (\text{V})$$

(d) 电流为

$$I = \frac{V_2 - V_1}{R} = \frac{188.5}{10^3}\cos 10^3 t = 0.19\cos 10^3 t \quad (\text{A})$$ ■

 **D6.1**

练习 6.1 对于图 6-3 所示的回路，如果 $\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{y}}B_0\cos\omega t, V_{emf}^{tr}$是多少？为什么？

答案：$V_{emf}^{tr}=0$。因为 B 同回路面积的法向 ds 垂直。（参见◉）

练习 6.2 若例6-1 中的回路用 10 匝的方形回路代替，且回路的中心在原点，边长为 20cm，边分别同 x 轴、y 轴平行。如果 $\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{z}}B_0x^2\cos 10^3 t, B_0=100\text{T}$，求电路中的电流。

答案：$I=-133\sin 10^3 t \quad (\text{mA})$。（参见◉）

例 6-2 楞次定律

试确定图 6-4 所示电路中 2Ω、4Ω 电阻上的电压 V_1、V_2。回路位于 x-y 平面，面积为 4m^2，磁通密度为 $\boldsymbol{B}=-\hat{\boldsymbol{z}}0.3t(\text{T})$，导线的内阻可以忽略。

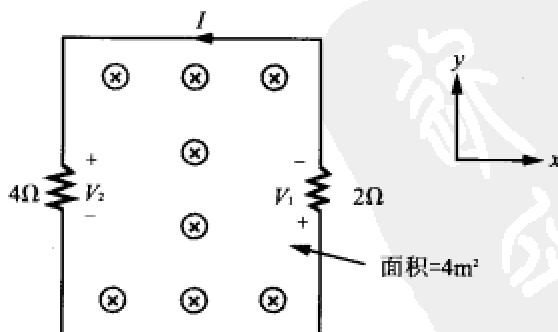


图 6-4 例 6-2 的电路

解答：通过回路的磁通为

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_S (-\hat{\boldsymbol{z}}0.3t)\cdot\hat{\boldsymbol{z}}\,ds = -0.3t\times 4 = -1.2t \quad (\text{Wb}),$$

对应的变压器电动势为

$$V_{emf}^{tr} = -\frac{d\Phi}{dt} = 1.2 \quad (\text{V})$$

因为通过回路的磁通沿着 $-z$ 轴方向（垂直进入纸面），且幅值随着时间 t 增大，根据楞次定律，感生电流 I 的方向应该使得 I 产生的磁通密度 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{ind}}$ 阻碍 Φ 的变化。因此，I 必须沿着电路所示的方向，因为在回路限定的内部区域中，I 所对应的 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{ind}}$ 是沿着 $+z$ 轴方向的，这就意味着 V_1、V_2 为正电压。

总共 1.2V 的电压分布在串联的两个电阻上，因此

$$I=\frac{V_{\mathrm{emf}}^{\mathrm{tr}}}{R_1+R_2}=\frac{1.2}{2+4}=0.2(\mathrm{A}),$$

所以

$$V_1=IR_1=0.2\times2=0.4(\mathrm{V}),$$
$$V_2=IR_2=0.2\times4=0.8(\mathrm{V})$$ ■

复习题

236

Q6.1　解释法拉第定律的意义以及楞次定律的作用。

Q6.2　在什么情况下，沿着闭合回路的净电压等于零？

Q6.3　在图 6-4（例 6-2）中，若交链回路的磁通密度为 $\boldsymbol{B}=-\hat{z}0.3\mathrm{e}^{-t}(\mathrm{T})$。当 $t\geq0$ 时，电流将沿哪个方向（相对图 6-4 中标明的方向）？请予以解释。

M6.1-6.2

6.4　理想变压器

图 6-5a 所示的变压器，由两个线圈绕在共同的磁心上构成。初级回路的线圈有 N_1 匝，次级回路有 N_2 匝。初级线圈连接到一个交流电压源 $V_1(t)$，次级线圈则连接到一个负载电阻 R_L。在理想变压器中，磁心具有无穷大的磁导率（$\mu=\infty$），因此磁通只能在磁心中流通。图 6-5 中两线圈的电流 I_1、I_2 的方向是这样定义的：当两个电流同时为正时，I_2 产生的磁通与 I_1 产生的磁通的方向相反。变压器（transformer）得名于其功能，它用于在初级和次级回路之间变换（transform）电流、电压以及阻抗。

在变压器的初级回路中，电压源 V_1 在初级线圈中产生电流 I_1，因而在磁心中建立磁通 Φ。磁通 Φ 和电压 V_1 由法拉第定律联系在一起

$$V_1=-N_1\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t},\tag{6.14}$$

同样，次级回路有

$$V_2=-N_2\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\tag{6.15}$$

组合式（6.14）和式（6.15）可得

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{N_1}{N_2}\tag{6.16}$$

在理想的无耗变压器中，由电源供给初级线圈的所有瞬时功率，全部送到了次级回路的负载。因此磁心中没有功率损失，即

$$P_1=P_2\tag{6.17}$$

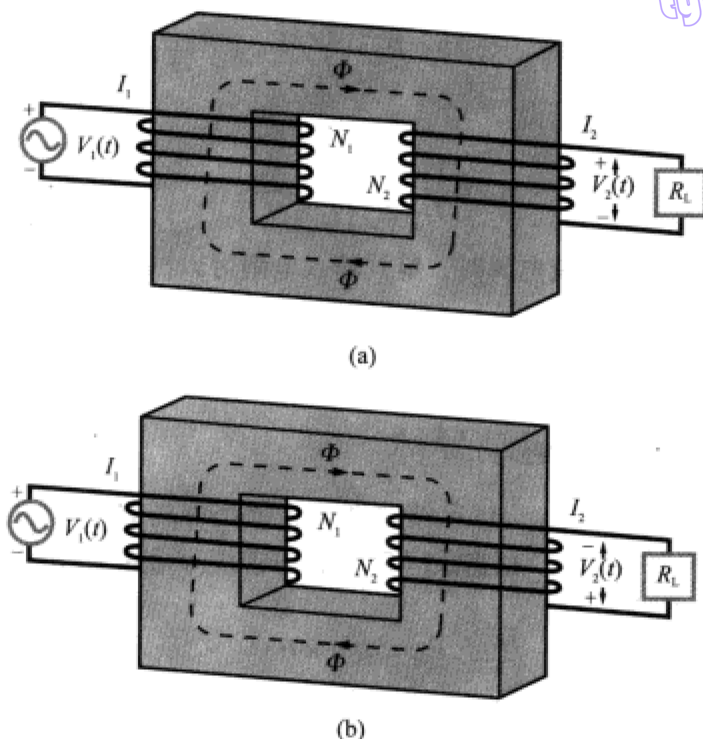


图 6-5 在变压器中，I_1、I_2的方向是这样定义的：一个电流产生的磁通与另外一个电流产生的磁通的方向相反。(b) 中次级线圈的绕向，与 (a) 的相反，同样，I_2的方向、V_2的极性在 (b)、(a) 中也是相反的

因为 $P_1=I_1V_1$，$P_2=I_2V_2$，再考虑式 (6.16)，有

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{N_2}{N_1} \tag{6.18}$$

237

所以，尽管电压比值等于对应的匝数比值（式 (6.16)），但电流比值却等于匝数比的倒数。如果 $N_1/N_2=0.1$，则次级回路的 V_2将为初级回路的 V_1的 10 倍，但 I_2将仅为 $I_1/10$。

除了次级线圈的绕向不同之外，图 6-5b 所示的变压器同图 6-5a 的变压器是相同的。由于这一差别，图 6-5b 中 I_2的方向以及 V_2的极性就与图 6-5a 中的相反了。

图 6-5a 中次级回路的电压和电流关系为 $V_2=I_2R_L$。从输入侧电路看，变压器可以用一个等效的输入电阻 R_{in}代替，如图 6-6 所示。R_{in}定义如下

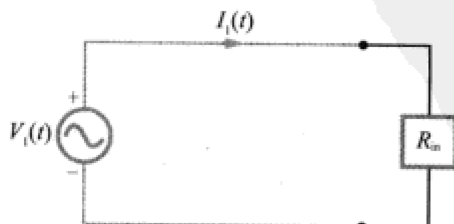


图 6-6 变压器初级的等效电路

$$R_{in} = \frac{V_1}{I_1} \tag{6.19}$$

由式（6.16）和式（6.18）得

$$R_{in} = \frac{V_2}{I_2}\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_L \tag{6.20}$$

当负载为阻抗 Z_L，V_1 为正弦电源时，等效输入电阻可以扩展为等效输入阻抗 Z_{in}，即

$$Z_{in} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_L \tag{6.21}$$

6.5 静态磁场中的运动导体

考虑一长度为 l 的导线，以恒定的速度 $\boldsymbol{u}$ 在静态磁场 $\boldsymbol{B} = \hat{z} B_0$ 中移动，如图 6-7 所示。导线中存在自由电子。根据式（5.3），以速度 $\boldsymbol{u}$ 在磁场 $\boldsymbol{B}$ 中运动的任何电荷 q，受到的磁场力 $\boldsymbol{F}_m$ 为

$$\boldsymbol{F}_m = q(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) \tag{6.22}$$

若将以上磁场力看成是电荷 q 在一个电场 $\boldsymbol{E}_m$ 中受到的电场力，则该电场应该为

$$\boldsymbol{E}_m = \frac{\boldsymbol{F}_m}{q} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B} \tag{6.23}$$

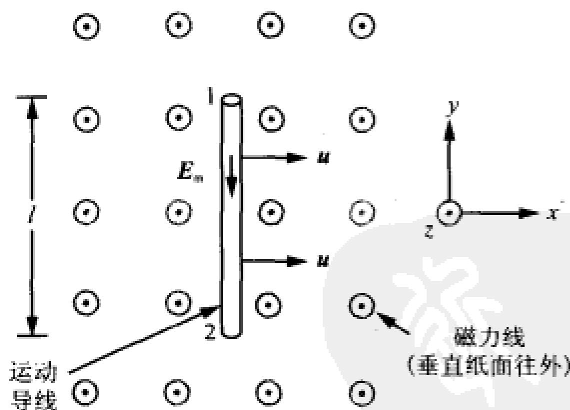


图 6-7 在静磁场中运动的导线

由电荷运动产生的场 $\boldsymbol{E}_m$ 称动生电场（motional electric field），其方向垂直于 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{B}$ 所在的平面。对于图 6-7 所示的导线，$\boldsymbol{E}_m$ 沿着 $-\hat{y}$ 方向。作用在导线中电子上的磁场力，将引起电子沿着 $-\boldsymbol{E}_m$ 的方向朝标记为 1 的一端运动，如图 6-7 所示。这将在端点 1 和 2 之间引起电位差，使端点 2 处于较高的电位。这一感应的电位差称动生电动势（motional emf），以 V_{emf}^m 表示，定义为导线端点 2、1 之间 $\boldsymbol{E}_m$ 的线积分

[238]

$$V_{emf}^m = V_{12} = \int_2^1 \boldsymbol{E}_m \cdot d\boldsymbol{l} = \int_2^1 (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{l} \tag{6.24}$$

对导线有 $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B} = \hat{x} u \times \hat{z} B_0 = -\hat{y} u B_0$，$d\boldsymbol{l} = \hat{y}\, dl$，因此

$$V_{\text{emf}}^{\text{m}} = V_{12} = -uB_0 l \tag{6.25}$$

一般而言，对于路径为 C 的闭合电路，当其任一段在静态磁场 $\boldsymbol{B}$ 中运动时，若以 $\boldsymbol{u}$ 表示电路 C 上各点的运动速度，则感生电动势为

$$V_{\text{emf}}^{\text{m}} = \oint_C (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{6.26}$$

注意：只有切割磁力线的电路部分才对 $V_{\text{emf}}^{\text{m}}$ 有贡献。

例 6-3 滑动导体棒

图 6-8 所示的矩形回路，具有固定的宽度 l，但长度 x_0 却因导体棒在静态磁场 $\boldsymbol{B} = \hat{\boldsymbol{z}} B_0 x$ 中以恒定速度 $\boldsymbol{u}$ 运动，而随时间增大。其中 $\boldsymbol{B}$ 沿 x 方向是线性增加的，导体棒在 $t=0$ 时刻从 $x=0$ 开始运动。求端点 1、2 间的动生电动势，以及流经电阻 R 的电流 I。假定回路内阻 $R_i \ll R$。

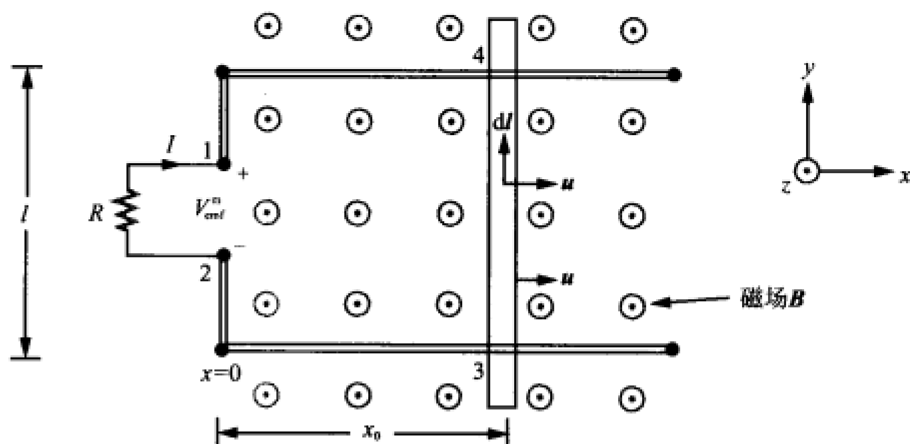


图 6-8 在幅值随 x 线性增加的磁场 $\boldsymbol{B} = \hat{\boldsymbol{z}} B_0 x$ 中，沿导轨滑动的导体棒（例 6-3）

解答：可以应用动生电动势式（6.26）求解，也可以应用法拉第定律的一般形式求解。下面将证明两种方法可以获得相同的结果。

在电路中，只有滑动导体棒切割 $\boldsymbol{B}$ 的磁力线，因此在路径 2341 中，只有它才对 $V_{\text{emf}}^{\text{m}}$ 有贡献。因此，在 $x = x_0$ 处，

$$V_{\text{emf}}^{\text{m}} = V_{12} = V_{43} = \int_3^4 (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_3^4 (\hat{\boldsymbol{x}}\, u \times \hat{\boldsymbol{z}}\, B_0 x_0) \cdot \hat{\boldsymbol{y}}\, \mathrm{d}l = -uB_0 x_0 l$$

矩形回路的长度与速度 u 的关系为 $x_0 = ut$，因此

$$V_{\text{emf}}^{\text{m}} = -B_0 u^2 l t \quad (\text{V}) \tag{6.27}$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 是静态的，$V_{\text{emf}}^{\text{tr}} = 0$，所以必有 $V_{\text{emf}} = V_{\text{emf}}^{\text{m}}$。为了证明从法拉第定律的一般形式也可以获得同样的结果，先求穿过回路面积的磁通 Φ 239

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_S (\hat{\boldsymbol{z}}\, B_0 x) \cdot \hat{\boldsymbol{z}}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = B_0 l \int_0^{x_0} x\mathrm{d}x = \frac{B_0 l x_0^2}{2} \tag{6.28}$$

将 $x_0 = ut$ 代入式（6.28），然后相对时间求负导数，可得

$$V_{emf}=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{d}{dt}\left(\frac{B_0lu^2t^2}{2}\right)=-B_0u^2lt \quad (V), \tag{6.29}$$

这跟式（6.27）相同。因为 V_{12} 为负，故电流 $I=B_0u^2lt/R$，方向如图6-8所示。 ■

例6-4 运动回路

图6-9所示的矩形回路位于 x-y 平面中，并以 $\boldsymbol{u}=\hat{\boldsymbol{y}}5(\text{m/s})$ 的速度离开原点，在以下磁场中运动：

$$\boldsymbol{B}(y)=\hat{\boldsymbol{z}}0.2e^{-0.1y} \quad (T)$$

如果 $R=5\Omega$，在回路的一边位于 $y_1=2$m，另一边位于 $y_2=2.5$m 的瞬间，求回路的电流 I（回路内阻可以忽略）。

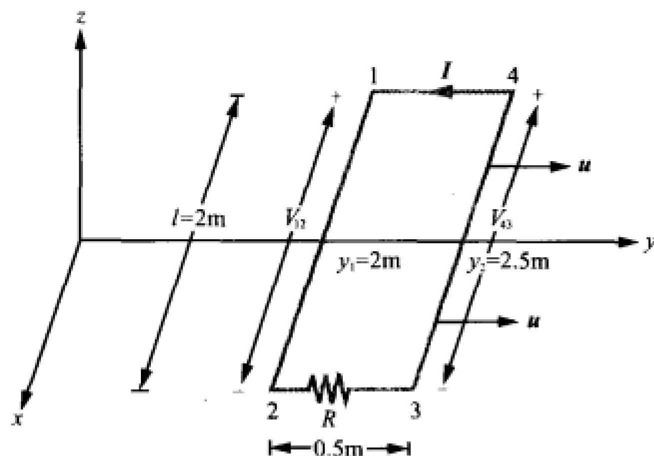


图6-9 例6-4的运动回路

解答：因为 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}$ 沿着 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 方向，所以只有沿着 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 方向的边，即点1到2的边，以及点3到4的边，才有感应电势。如果 $\boldsymbol{B}$ 为均匀的话，两边的感应电势将相同，电阻两端的净电压将为零。但在本例中，$\boldsymbol{B}$ 随着 y 指数减小，因此边1-2与边3-4具有不同的电动势数值。边1-2位于 $y_1=2$m 处，对应的磁场为

$$\boldsymbol{B}(y_1)=\hat{\boldsymbol{z}}0.2e^{-0.1y_1}=\hat{\boldsymbol{z}}0.2e^{-0.2} \quad (T)$$

所以感应的电压 V_{12} 为

$$V_{12}=\int_2^1[\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}(y_1)]\cdot d\boldsymbol{l}$$

$$=\int_{l/2}^{-l/2}(\hat{\boldsymbol{y}}5\times\hat{\boldsymbol{z}}0.2e^{-0.2})\cdot\hat{\boldsymbol{x}}\,dx=-e^{-0.2}l=-2e^{-0.2}=-1.637 \quad (V)$$

同样

$$V_{43}=-uB(y_2)l=-5\times0.2e^{-0.25}\times2=-1.558 \quad (V)$$

因此，电流幅值为

$$I=\frac{V_{43}-V_{12}}{R}=\frac{0.079}{5}=15.8(\text{mA})$$ ■

其方向如图6-9所示。

240

例 6-5 在导线附近运动的金属杆

图 6-10 所示的导线位于真空中，载流为 $I = 10\text{A}$。一根 30cm 长的金属杆以 $\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{z}}\,5\text{m/s}$的恒定速度运动，求 V_{12}。

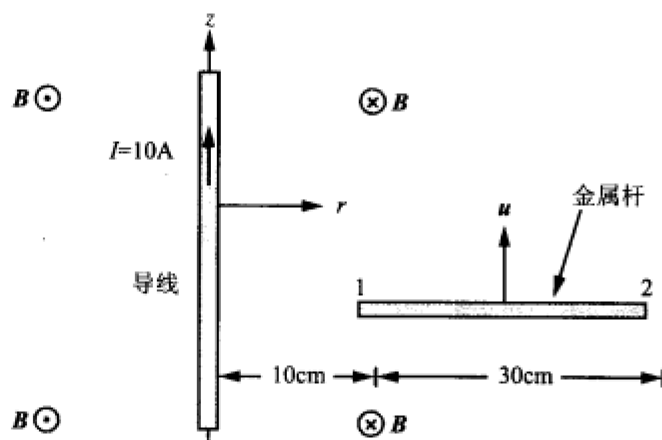


图 6-10 例 6-5 的运动金属杆

解答：电流 I 产生的磁场为

$$\boldsymbol{B} = \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

其中，r 是到导线的径向距离，在金属杆所在的导线一侧，$\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 的方向是进入纸面的。金属杆在磁场 $\boldsymbol{B}$ 中运动，产生的动生电动势为

$$V_{12} = \int_{40\text{cm}}^{10\text{cm}} (\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\cdot \text{d}\boldsymbol{l} = \int_{40\text{cm}}^{10\text{cm}} \left(\hat{\boldsymbol{z}}\,5\times\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)\cdot\hat{\boldsymbol{r}}\text{d}r$$

$$= -\frac{5\mu_0 I}{2\pi}\int_{40\text{cm}}^{10\text{cm}}\frac{\text{d}r}{r} = -\frac{5\times4\pi\times10^{-7}\times10}{2\pi}\times\ln\left(\frac{10}{40}\right) = 13.9(\mu\text{V})$$ ■

M6.3-6.4

练习 6.3 对于图 6-9 中的运动回路，让运动方向反向，即 $\boldsymbol{u} = -\hat{\boldsymbol{y}}\,5(\text{m/s})$，求当回路一边处于 $y_1 = 4\text{m}$，另一边处于 $y_2 = 4.5\text{m}$ 时的电流 I。

答案：$I = -13$（mA）。（参见光盘）

练习 6.4 如果将图 6-9 中的回路旋转到其表面与 x-z 平面平行，电流 I 将为多少？

答案：$I = 0$。（参见光盘）

复习题

Q6.4 在图 6-8 中，假设导体棒滑动时不存在摩擦，并且电路的水平臂很长。因此，若给导体棒施加一个初始的推力，它就应该可以做匀速运动，并以感应电动势的形式，一直产生电能。这种观点是否成立？如果不对，为什么？如何才能产生电能而无需用其他途径提供同样数量的能量？

Q6.5 在图 6-10 中，金属杆中流动的电流是恒定电流吗？分析电荷 q 在端点 1 和在端点 2 所

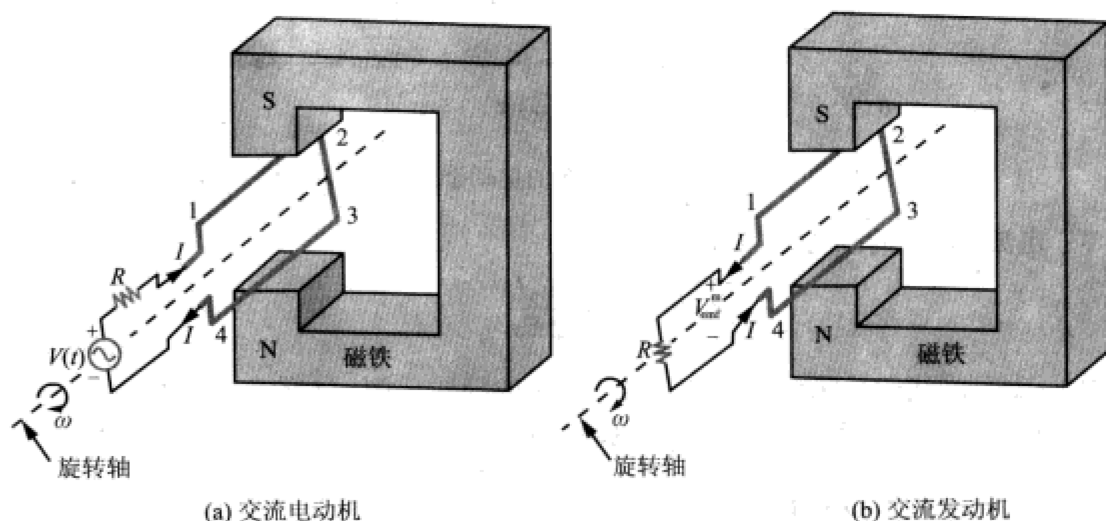
受的力，并予以比较。

D6.2

6.6 电磁式发电机

电磁式发电机是与电磁式电动机功能相反的仪器。两种仪器运行的原理都可以借助图6-11来解释。图6-11a为电动机的原理图：一个永久磁铁在其两极之间的槽中产生恒定的磁场 $\boldsymbol{B}$，当电流从导电回路中流过时，回路的边1-2和边3-4中的电流方向相反，两边上产生的磁场力也相反，因此产生转矩，使回路绕轴线旋转。这样一来，电压源提供给电动机的电能，就转换成了以回路旋转的形式存在的机械能，可以输出到滑轮、齿轮，或其他可动物体。

241



(a) 交流电动机 (b) 交流发动机

图6-11 交流电动机与交流发电机的原理。在（a）中，导线上的磁力转矩导致回路旋转，而在（b）中，旋转的回路中则有电动势产生

如果不是在回路中通入电流使其旋转，而是用外力使回路旋转，则回路在磁场中的运动将产生动生电动势 V_{emf}^{m}，如图6-11b所示。可见，电动机变成了发电机，机械能被转换成了电能。

下面利用图6-12的坐标系，对电磁式发电机的运行进行更细致的分析。图中的磁场为

$$\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{z}}\,B_0, \tag{6.30}$$

导体回路绕着 x 轴旋转。回路的边1-2、3-4长度均为 l，当回路旋转时，两边都切割磁力线。另外两边宽度为 w，在回路旋转时都不切割磁力线。因此，仅仅边1-2、3-4对发电机的动生电动势 V_{emf}^{m} 有贡献。

242

当回路以角速度 ω 绕自身的轴线旋转时，边1-2运动的速度 $\boldsymbol{u}$ 为

$$\boldsymbol{u}=\hat{\boldsymbol{n}}\,\omega\,\frac{w}{2}, \tag{6.31}$$

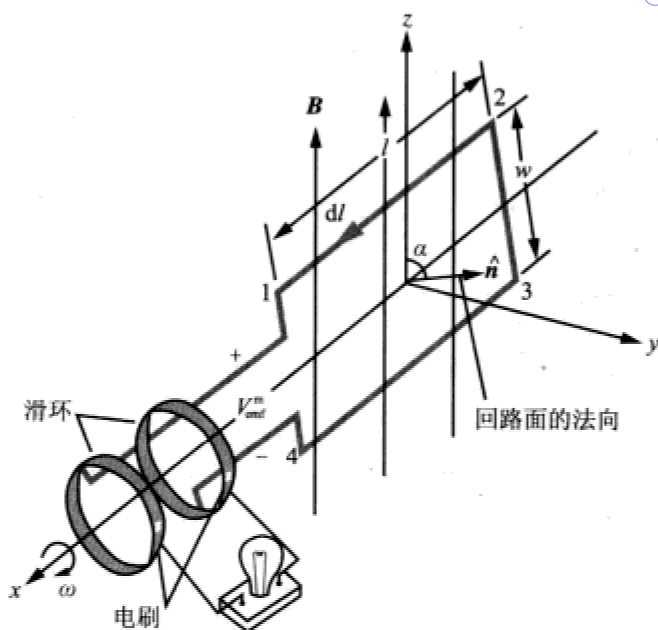


图 6-12 在磁场中旋转的回路产生电动势

其中 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 是回路的面法向，同 z 轴的夹角为 α。因此

$$\hat{\boldsymbol{n}} \times \hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{x}} \sin\alpha \tag{6.32}$$

边 3-4 则以速度 $-\boldsymbol{u}$ 运动。应用式（6.26），对于所选的 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 方向，有

$$\begin{aligned} V^{m}_{emf} = V_{14} &= \int_2^1 (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_4^3 (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \\ &= \int_{-l/2}^{l/2} \left[\left(\hat{\boldsymbol{n}}\, \omega \frac{w}{2} \right) \times \hat{\boldsymbol{z}}\, B_0 \right] \cdot \hat{\boldsymbol{x}}\, \mathrm{d}x + \int_{l/2}^{-l/2} \left[\left(-\hat{\boldsymbol{n}}\, \omega \frac{w}{2} \right) \times \hat{\boldsymbol{z}}\, B_0 \right] \cdot \hat{\boldsymbol{x}}\, \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{6.33}$$

将式（6.32）代入式（6.33），可得

$$V^{m}_{emf} = wl\omega B_0 \sin\alpha = A\omega B_0 \sin\alpha, \tag{6.34}$$

其中，$A = wl$，是回路的面积。角 α 同 ω 的关系为

$$\alpha = \omega t + C_0, \tag{6.35}$$

其中，C_0是由初始条件确定的常数。例如，如果在 $t = 0$ 时，$\alpha = 0$，则 $C_0 = 0$。在一般情况下，有

$$V^{m}_{emf} = A\omega B_0 \sin(\omega t + C_0) \quad (\mathrm{V}) \tag{6.36}$$

这一结果也可以由法拉第定律一般形式，即由式（6.6）得到。因为，交链回路面积的磁通为

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_S \hat{\boldsymbol{z}}\, B_0 \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}s = B_0 A \cos\alpha = B_0 A \cos(\omega t + C_0), \tag{6.37}$$

所以

$$V_{emf} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[B_0 A \cos(\omega t + C_0)] = A\omega B_0 \sin(\omega t + C_0), \tag{6.38}$$

这同式（6.36）的结果是相同的。

复习题

Q6.6　比较交流电动机与交流发电机的运行情况。

Q6.7　图6-12中的旋转回路只有一匝，如果一个回路具有10匝，产生的电动势将是多少？

Q6.8　图6-12所示回路的磁通链在 $\alpha=0$ 时达到最大值（回路位于 x-y 平面），而根据式（6.34），此时的感应电动势为零。相反，当 $\alpha=90°$ 时，回路的磁通链为零，但 V_{emf}^{m} 却最大。这是否跟你的期望一致？为什么？

6.7　时变磁场中的运动导体

对于一般性的情况，即单匝导电回路在时变磁场中运动的情况，感应电动势等于变压器分量和动生分量之和。因此，将式（6.8）和式（6.26）相加可得

243

$$V_{emf}=V_{emf}^{tr}+V_{emf}^{m}=\oint_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{s}+\oint_C(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{l} \tag{6.39}$$

此外，V_{emf} 也可由法拉第定律的一般形式给出

$$V_{emf}=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} \tag{6.40}$$

事实上，可以从数学上证明，式（6.39）的右端同式（6.40）的右端是相等的。对于特定的问题，到底是选择式（6.39）还是选择式（6.40），往往基于哪个更容易应用。如果回路包括 N 匝，那么式（6.39）和式（6.40）的右端都应该乘以 N。

例6-6　电磁式发电机

当6.6节中的电磁式发电机的旋转回路位于磁场 $\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{z}}B_0\cos\omega t$ 中时，求感应电动势。假设在 $t=0$ 时，$\alpha=0$。

解答：在这种情况下，将式（6.37）中的 B_0 替换为 $B_0\cos\omega t$，就可以得到 Φ。所以

$$\Phi=B_0A\cos^2\omega t,$$

因此

$$V_{emf}=-\frac{\partial\Phi}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}(B_0A\cos^2\omega t)=2B_0A\omega\cos\omega t\sin\omega t=B_0A\omega\sin 2\omega t \qquad \blacksquare$$

6.8　位移电流

在表6-1中，安培定律的微分形式为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\quad（安培定律） \tag{6.41}$$

如果对式（6.41）两端沿任何具有轮廓 C 的开区域 S 作面积分，则有

$$\int_S(\nabla\times\boldsymbol{H})\cdot d\boldsymbol{s}=\int_S\boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{s}+\int_S\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{s} \tag{6.42}$$

$\boldsymbol{J}$ 的面积分等于穿过面积 S 的传导电流 I_c，而 $\nabla\times\boldsymbol{H}$ 的面积分可以应用斯托克斯定理转换为沿轮廓 C 的线积分。因此

$$\oint_C\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=I_c+\int_S\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{s}\quad（安培定律） \tag{6.43}$$

式（6.43）的右端第二项跟 I_c 具有相同的单位（安培），又因为其正比于电通量密度 $\boldsymbol{D}$（又称为电位移）对时间的导数，所以称其为位移电流（displacement current），以 I_d 表示。即

$$I_d \triangleq \int_S \boldsymbol{J}_d \cdot d\boldsymbol{s} = \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{s}, \tag{6.44}$$

其中，$\boldsymbol{J}_d = \partial \boldsymbol{D}/\partial t$，表示位移电流密度（displacement current density）。考虑到式（6.44），有

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I_c + I_d = I, \tag{6.45}$$

其中，I 是总电流。在静电场中，$\boldsymbol{J}_d = \partial \boldsymbol{D}/\partial t = 0$，因此，$I_d = 0, I = I_c$。位移电流的概念，是麦克斯韦在成功建立时变条件下电场与磁场的统一联系的过程中，于 1862 年首次提出的，并在其 1873 年的著作中进行了系统阐述。 244

人们常常用平行板电容器作例子，来说明位移电流 I_d 的物理意义。图 6-13 所示的简单电路包含一个电容器和一个交流电压源 $V_s(t)$

$$V_s(t) = V_0 \cos\omega t \quad (\text{V}) \tag{6.46}$$

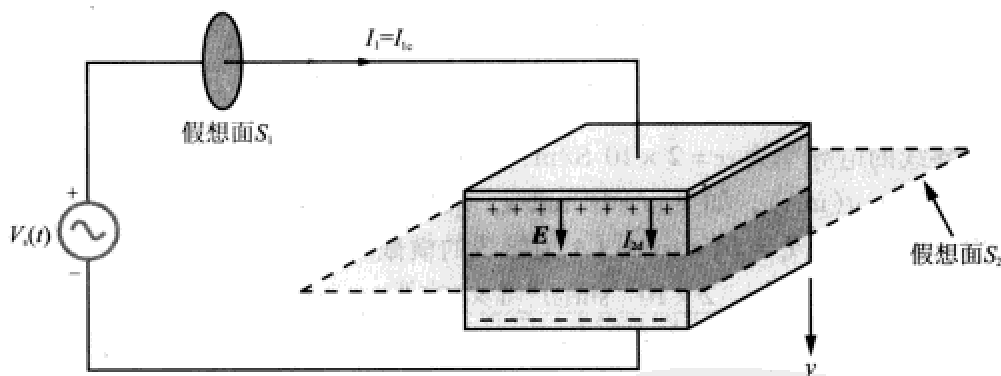


图 6-13 电容器绝缘材料中的位移电流 I_{2d} 等于导线中的传导电流 I_{1c}

根据式（6.45），流过任何面的总电流，都可以表示成一个传导电流 I_c 和一个位移电流 I_d 的一般形式。针对图 6-13 中的两个假想面，即（1）导线的横截面 S_1，（2）电容器的横截面 S_2，求流过它们的电流 I_c 和 I_d。下面分别用 I_{1c}、I_{1d} 表示导线的传导电流和位移电流，而电容器的则分别用 I_{2c}、I_{2d} 表示。

在理想导体中，$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} = 0$，因此，根据式（6.44）可知导线中 $I_{1d} = 0$。就 I_{1c} 而言，它同电容器两端的电压 V_c 具有以下关系

$$I_{1c} = C\frac{dV_c}{dt} = C\frac{d}{dt}(V_0\cos\omega t) = -CV_0\omega\sin\omega t, \tag{6.47}$$

其中利用了 $V_c = V_s(t)$。由于 $I_{1d} = 0$，因此，导线中的总电流就是 $I_1 = I_{1c} = -CV_0\omega\sin\omega t$。

下面分析流过图 6-13 中的面 S_2 的电流。面 S_2 是一个假想的、平行于电容器极板、且位于极板之间某处的开放面。面积为 A 的极板之间的空间，由介电常数为 ε 的理想电介质材料填充。由于电荷本身不能穿越电介质媒介，因此电容器导电极板之间不能产生传导电流，所以 $I_{2c} = 0$。为了确定 I_{2d}，需利用式（6.44）。根据例4-11，

电介质区域中的电场 $\boldsymbol{E}$ 与电容器两端的电压 V_c 的关系为

$$\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{V_c}{d}=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{V_0}{d}\cos\omega t, \tag{6.48}$$

245 其中，d 为极板间的间距，$\hat{\boldsymbol{y}}$ 的方向由高电位的极板指向低电位的极板。对于图 6-13 所示的位移电流 I_{2d} 方向，在式（6.44）中，令 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\hat{\boldsymbol{y}}\,\mathrm{d}s$，可得

$$\begin{aligned}I_{2d}&=\int_S\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_A\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\varepsilon V_0}{d}\cos\omega t\right)\right]\cdot(\hat{\boldsymbol{y}}\,\mathrm{d}s)\\&=-\frac{\varepsilon A}{d}V_0\omega\sin\omega t=-CV_0\omega\sin\omega t,\end{aligned} \tag{6.49}$$

其中利用了平行板电容器的电容关系 $C=\varepsilon A/d$。可见，极板间的电介质区域的 I_{2d} 表达式，与式（6.47）给出的导线中的传导电流 I_{1c} 相同。这两个电流的相等，保证了电路电流的连续性。**虽然位移电流不携带真正的电荷，但它却具有真实电流的行为。**

在电容器的例子中，导线被看成是理想的导体，电容器极板间的区域被看成是理想的电介质。如果导线具有有限的电导率 σ_w，则导线中的 $\boldsymbol{D}$ 将不为零，因此电流 I_1 将由传导电流 I_{1c} 和位移电流 I_{1d} 构成，即 $I_1=I_{1c}+I_{1d}$。同样，如果电介质材料具有非零的电导率 σ_d，则电荷可以在两极板间流通，I_{2c} 将不为零。此时，流经电容器的总电流为 $I_2=I_{2c}+I_{2d}$，它将等于导体中的总电流，即：$I_1=I_2$。

例 6-7　位移电流密度

一根导线的电导率为 $\sigma=2\times10^7\,\mathrm{S/m}$，相对介电常数为 $\varepsilon_r=1$，其中流过的传导电流为 $I_c=2\sin\omega t(\mathrm{mA})$，如果 $\omega=10^9\,\mathrm{rad/s}$，求其中的位移电流。

解答：由于传导电流 $I_c=JA=\sigma EA$（A 为导线的横截面积），因此

$$E=\frac{I_c}{\sigma A}=\frac{2\times10^{-3}\sin\omega t}{2\times10^7A}=\frac{1\times10^{-10}}{A}\sin\omega t\quad(\mathrm{V/m})$$

应用式（6.44），以及 $D=\varepsilon E$，可得

$$\begin{aligned}I_d&=J_dA=\varepsilon A\partial E/\partial t=\varepsilon A\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1\times10^{-10}}{A}\sin\omega t\right)\\&=\varepsilon\omega\times10^{-10}\cos\omega t=0.885\times10^{-12}\cos\omega t\quad(\mathrm{A}),\end{aligned}$$

其中，利用了 $\omega=109\mathrm{rad/s},\varepsilon=\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}\mathrm{F/m}$。注意到 I_c 和 I_d 在相位上是正交的（二者间存在 90°的相位差）。此外，I_d 的幅值比 I_c 大约小 9 个数量级，这就是在良导体中常常忽略位移电流的原因。■

练习 6.5　一个不良导体，其电导率为 $\sigma=100\mathrm{S/m}$，介电常数为 $\varepsilon=4\varepsilon_0$。当角频率 ω 为何值时，传导电流密度 $\boldsymbol{J}$ 的幅值等于位移电流密度 $\boldsymbol{J}_d$ 的幅值？

答案：$\omega=2.82\times10^{12}$（rad/s）。（参见）

6.9　电磁场的边界条件

在第 4 章、第 5 章中，在静态条件下，应用麦克斯韦方程组的积分形式，在毗邻的两种媒介的交界面上，获得了 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$ 等的切向、法向分量应该满足的边界条件。246 其中 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$ 的边界条件在 4.9 节中给出，$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$ 的边界条件在 5.8 节中给出。在动

态情况下，麦克斯韦方程组（表6-1）中多了两个新的项，即法拉第定律中的 $\partial \boldsymbol{B}/\partial t$，和安培定律中的 $\partial \boldsymbol{D}/\partial t$。尽管如此，但前面在静电场、静磁场中获得的边界条件，在时变电磁场中仍然成立。这是因为，如果遵循上面所述章节中同样的步骤，推导时变电磁场的边界条件，则当图4-18、图5-24中的矩形回路的面积趋向于零时，将发现公式中含有新增项的部分会消失。

为了便于查阅，将电磁场边界条件组合在一起，列在表6-2中。

表 6-2　电场、磁场的边界条件

场的分量	通式	媒介1 电介质 / 媒介2 电介质	媒介1 电介质 / 媒介2 导体
切向 $\boldsymbol{E}$	$\hat{\boldsymbol{n}}_2\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=0$	$E_{1t}=E_{2t}$	$E_{1t}=E_{2t}=0$
法向 $\boldsymbol{D}$	$\hat{\boldsymbol{n}}_2\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\rho_s$	$D_{1n}-D_{2n}=\rho_s$	$D_{1n}=\rho_s$　　$D_{2n}=0$
切向 $\boldsymbol{H}$	$\hat{\boldsymbol{n}}_2\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=\boldsymbol{J}_s$	$H_{1t}=H_{2t}$	$H_{1t}=J_s$　　$H_{2t}=0$
法向 $\boldsymbol{B}$	$\hat{\boldsymbol{n}}_2\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=0$	$B_{1n}=B_{2n}$	$B_{1n}=B_{2n}=0$

注：（1）ρ_s是交界上的面电荷密度；（2）$\boldsymbol{J}_s$是交界上的面电流密度；（3）所有场的法向分量都沿着 $\hat{\boldsymbol{n}}_2$，即媒介2的外法向单位矢量方向；（4）$E_{1t}=E_{2t}$意味着切向分量幅值相等，方向平行；（5）$\boldsymbol{J}_s$的方向垂直于（$\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2$）。

复习题

Q6.9　当传导电流流过材料时，一定数量的电荷从一端进入材料，同样数量的电荷则从另外一端离开材料。当位移电流流经理想电介质时，情况又如何呢？

Q6.10　证明由安培定律的积分形式式（6.43）可以导出以下边界条件：$\boldsymbol{H}$ 的切向分量沿两种电介质的交界面是连续的。

6.10　电荷－电流连续性关系

在静态条件下，材料中任何点的电荷密度 ρ_v 与电流密度 $\boldsymbol{J}$ 是彼此完全独立的。在时变情况下却不是这样。为了证明 ρ_v 和 $\boldsymbol{J}$ 之间的关系，先考虑任意的体积 v，其外表面为封闭曲面 S，如图6-14所示，v 中的净正电荷为 Q。根据1.3.2节所述的电荷守恒原理，电荷既不能被消灭，也不能被产生，Q 增加的唯一办法，就是有净的正电荷通量流入体积 v，同样，Q 减少的唯一办法，就是有净正电荷通量流出体积 v。电荷的流入和流出，分别构成了通过面 S 流入和流出 v 的电流。定义 I 为通过 S 流出 v 的净电流，则 I 等于 Q 的负变化率：

$$I=-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_v \rho_v\,\mathrm{d}v, \tag{6.50}$$

247

其中 ρ_v 是 v 中的体电荷密度。根据式（4.12），电流 I 又定义为电流密度 $\boldsymbol{J}$ 穿过面 S 朝外的通量。因此

$$\oint_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_v \rho_v\,\mathrm{d}v \tag{6.51}$$

应用式（3.98）的散度定理，可以将 $\boldsymbol{J}$ 的面积分转换成 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}$ 的体积分，即

$$\oint_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_v \nabla\cdot\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}v=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_v \rho_v\,\mathrm{d}v \tag{6.52}$$

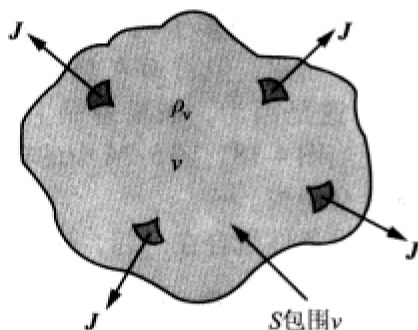


图 6-14　流出体积 v 的总电流，等于电流密度 **J** 通过面 S 的通量，因而等于 v 中包围的电荷的减少速率

对于恒定的体积 v，对时间求导仅仅作用在 ρ_v 上。因此，可以将求导移到积分内部，并写成 ρ_v 的偏导数形式

$$\int_v \nabla \cdot \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}v = -\int_v \frac{\partial \rho_v}{\partial t}\mathrm{d}v \tag{6.53}$$

要保证式（6.53）两端对任何体积 v 积分都成立，则被积函数在 v 内必须处处相等。所以，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}, \tag{6.54}$$

这就是电荷－电流连续性关系（charge-current continuity relation），简称电荷连续性方程（charge continuity equation）。

如果在体积单元 Δv（譬如一个小圆柱体）中，体电荷密度不是时间的函数，即 $\partial\rho_v/\partial t=0$，则意味着流出 Δv 的净电流为零，或者说，流入 Δv 的电流等于流出 Δv 的电流。这种情况下，式（6.54）变为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0, \tag{6.55}$$

根据式（6.51），上式的积分形式为

$$\oint_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0 \quad（基尔霍夫电流定律） \tag{6.56}$$

为了探讨式（6.56）的意义，考虑电路中连接两个或多个支路的接合处（或节点）。不论它有多小，接合处都有一定的体积 v，由面 S 包围着。在图 6-15 所示的接合处，画了一个立方体，其尺度被人为放大，以方便讨论。接合处有 6 个面，共同构成了式（6.56）中的闭合积分表面 S。对于每个面，其上的积分代表了通过该面流出的电流。所以，式（6.56）可以重写为

248

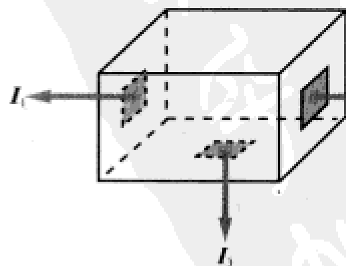


图 6-15　基尔霍夫电流定律指出，流出接合处的所有电流的代数和为零

$$\sum_i I_i = 0 \quad \text{（基尔霍夫电流定律）}, \tag{6.57}$$

其中 I_i 是通过第 i 个面流出的电流。对于图 6-15 的接合处，式（6.57）变为 $(I_1 + I_2 + I_3) = 0$。式（6.57）是基尔霍夫电流定律（Krichhoff's current law）的一般形式之一，它指出，在电路中，流出一个节点的全部电流的代数和为零。

6.11 导体中自由电荷的耗散

前面曾经指出，导体中的电流，是松散束缚的电子在外施电场作用下运动的结果。然而，这些电子决不是多余的电荷，它们在原子核中都有对应的等量正电荷与之平衡。换句话说，导体材料是电中性的，导体中的净电荷密度为零（$\rho_v = 0$）。如果在导体内部的某点引入多余的自由电荷 q，将会发生什么情况呢？多余的电荷将产生电场，强迫导体材料中最靠近的电荷重新排列位置，进而引起其他的电荷发生移动，这个过程将持续下去，直到在导体材料中重新建立电中性为止，并且导体表面将获得等于 q 的电荷量。

多余电荷的这种耗散，其速度有多快呢？为回答这一问题，假定在导体内引入一个体电荷密度 ρ_{vo}，然后分析其衰减到零的速度。根据连续性方程的式（6.54）

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \tag{6.58}$$

以及导体中欧姆定律的单点形式的公式（4.67），即 $\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$，可得

$$\sigma \nabla \cdot \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \tag{6.59}$$

接下来，应用式（6.1），即 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho_v / \varepsilon$，可以得到以下偏微分方程

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho_v = 0 \tag{6.60}$$

假定在 $t = 0$ 时刻，$\rho_v = \rho_{vo}$，则方程（6.60）的解为

$$\rho_v(t) = \rho_{vo} e^{-(\sigma/\varepsilon)t} = \rho_{vo} e^{-t/\tau_r} \quad (\mathrm{C/m^3}), \tag{6.61}$$

其中 $\tau_r = \varepsilon / \sigma$，称弛豫时间常数（relaxation time constant）。从式（6.61）可见，初始的多余电荷 ρ_{vo} 按时间常数 τ_r 指数衰减。在 $t = \tau_r$ 时，ρ_v 将衰减到初始值 ρ_{vo} 的 $1/e \approx 37\%$，而在 $t = 3\tau_r$ 时，ρ_v 将衰减到初始值 ρ_{vo} 的 $e^{-3} \approx 5\%$。对于铜，其 $\varepsilon \approx \varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m，$\sigma = 5.8 \times 10^7$ S/m，$\tau_r = 1.53 \times 10^{-19}$ s。因此，在导体中，电荷耗散的过程特别快。相反，在良绝缘体中，电荷的耗散速度则特别慢。例如 $\varepsilon = 6\varepsilon_0$，$\sigma = 10^{-15}$ S/m 的云母材料，其 $\tau_r = 5.31 \times 10^4$ s，约为 14.8 小时。

复习题

Q6.11 说明电荷连续性方程是如何导出基尔霍夫电流定律的。

Q6.12 在理想导体中，电荷耗散的弛豫时间常数是多少？在理想电介质中呢？

练习 6.6 给定石英的 $\varepsilon_r = 5$，$\sigma = 10^{-17}$ S/m。(a) 求弛豫时间常数；(b) 电荷密度衰减到初始值的 1% 所需的时间。

答案：(a) $\tau_r = 51.2$ 天；(b) 236 天。（参见光盘）

6.12　电磁位

通过前面对法拉第定律、安培定律的讨论，我们从两个不同的方面，完成了对时变情况下电场与磁场间联系的分析。下面将基于标量电位 V 和矢量磁位 $\boldsymbol{A}$，分析这种联系的含义。

当 $\partial/\partial t=0$ 时，法拉第定律退化为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0\quad(\text{静电场情况}),\tag{6.62}$$

上式表明，静电场 $\boldsymbol{E}$ 是保守场。根据矢量微积分原理，如果矢量场 $\boldsymbol{E}$ 为保守场，则它可以表示为一个标量的梯度。因此，在第4章中，将 $\boldsymbol{E}$ 定义为

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V\quad(\text{静电场情况})\tag{6.63}$$

在动态情况下，法拉第定律为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\tag{6.64}$$

考虑到关系 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$，式（6.64）变为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{A}),\tag{6.65}$$

它可以重写为

$$\nabla\times\left(\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=0\quad(\text{动态情况})\tag{6.66}$$

定义临时变量

$$\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t},\tag{6.67}$$

则式（6.66）变为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}'=0\tag{6.68}$$

基于从式（6.62）求取式（6.63）时一样的思路，定义

$$\boldsymbol{E}'=-\nabla V\tag{6.69}$$

把式（6.67）的 $\boldsymbol{E}'$ 定义代入式（6.69），然后求解 $\boldsymbol{E}$，可得

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\quad(\text{动态情况})\tag{6.70}$$

在静态情况下，式（6.70）退化为式（6.63）。

当标量位 V 以及矢量为 $\boldsymbol{A}$ 已知时，$\boldsymbol{E}$ 可以从式（6.70）得到，$\boldsymbol{B}$ 则可以从下式获得

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}\tag{6.71}$$

下面分析时变情况下，位 V 与 $\boldsymbol{A}$，各种位的源，以及电荷分布 ρ_v 与电流分布 $\boldsymbol{J}$ 等之间的关系。

6.12.1　推迟位

考虑图6-16所示的情况。中心位于坐标系原点的体积 v' 中，存在电荷分布 ρ_v。周围媒介是介电常数为 ε 的理想电介质。根据式（4.48a），从位置矢量为 $\boldsymbol{R}$ 的空间

一点，观测到的电位 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{R})$ 为

$$V(\boldsymbol{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{v'}\frac{\rho_v(\boldsymbol{R}_i)}{R'}\mathrm{d}v',\tag{6.72}$$

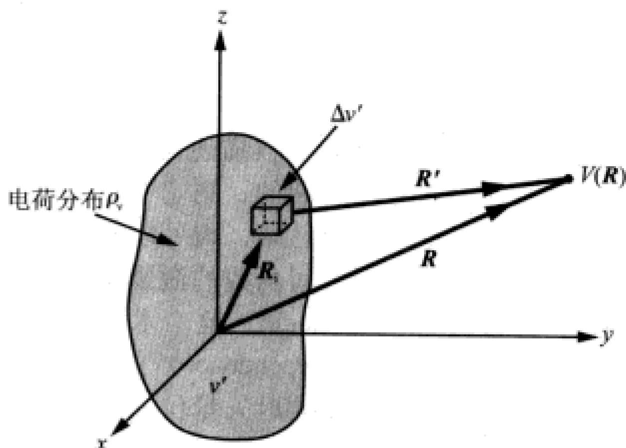


图 6-16 体积 v' 上的电荷分布 ρ_v 产生的电位 $V(\boldsymbol{R})$

其中 $\boldsymbol{R}_i$ 表示具有电荷密度 ρ_v 的单元体积 $\Delta v'$ 的位置矢量，而 $R'=|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_i|$ 则是 $\Delta v'$ 与观测点间的距离。如果电荷分布为时变函数，则可以暂时将式（6.72）写成以下动态情况的形式 250

$$V(\boldsymbol{R},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{v'}\frac{\rho_v(\boldsymbol{R}_i,t)}{R'}\mathrm{d}v',\tag{6.73}$$

但这一形式并未考虑“反应时间”。如果 V_1 是由某个电荷分布 ρ_{v1} 引起的位，并且 ρ_{v1} 忽然变为 ρ_{v2}，则需要花费一定的时间，相距 R' 远的 V_1 才能变化成 V_2。换句话说，$V(\boldsymbol{R},t)$ 不能立即变化，而需要延迟一段时间 $t'=R'/u_p$，其中 u_p 是在电荷分布与观测点间的媒介中的传播速度。因此，在时刻 t 的 $V(\boldsymbol{R},t)$ 对应着早前某个时刻的 ρ_v，该时刻为 $(t-t')$。所以，式（6.73）应该写成

$$V(\boldsymbol{R},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{v'}\frac{\rho_v(\boldsymbol{R}_i,t-R'/u_p)}{R'}\mathrm{d}v'\quad(\mathrm{V}),\tag{6.74}$$

因此 $V(\boldsymbol{R},t)$ 称为推迟标量位（retarded scalar potential）。如果传播的媒介为真空，则 u_p 等于光速 c。

与此类似，同电流密度分布 $\boldsymbol{J}$ 相关的推迟矢量位（retarded vector potential）$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R},t)$ 为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R},t)=\frac{\mu}{4\pi}\int_{v'}\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}_i,t-R'/u_p)}{R'}\mathrm{d}v'\quad(\mathrm{Wb/m})\tag{6.75}$$

这一表达式是通过将静磁场的矢量磁位 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})$ 的计算式（5.65），扩展到时变的情况而得到的。

6.12.2 时谐位

式（6.74）和式（6.75）给出的推迟标量位、推迟矢量位，不仅对静态、动态情况都成立，对于源函数 ρ_v、$\boldsymbol{J}$ 随时间任意变化的情况，也同样成立。在动态情况下，

ρ_v和$\boldsymbol{J}$由电荷连续性方程，即由式（6.54）联系在一起。因此，在一般情况下，这两个量对时间t的依赖关系将具有相同的函数形式，推而广之，位V和$\boldsymbol{A}$，场量$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$，以及$\boldsymbol{H}$也将具有相同的函数形式。不仅如此，由于V和$\boldsymbol{A}$分别同ρ_v、$\boldsymbol{J}$之间是线性依赖关系，$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$分别同V、$\boldsymbol{A}$之间也是线性依赖关系，所以，联系这些量的关系都满足线性系统的要求。对于线性系统，可以利用随时间正弦变化的函数，来确定随时间任意变化的激励源在系统中引起的响应。正如在1.7节中看到的，如果一个时间依存关系可以用（非正弦的）周期时间函数描述，则它总可以展开为正弦分量的傅里叶级数，而如果一个时间函数是非周期的，则它可以用傅里叶积分表示。不论哪种情况，如果线性系统的稳态正弦响应已知，则可以应用叠加原理确定任何给定的时变函数的响应。因此，要确定任何时间函数的激励源的响应，系统的正弦响应是一个基础。在本书中，时谐（time harmonic）这一术语常用来作为“稳态正弦时间依赖关系”（steady-state sinusoidal time dependence）的同义词。

251

在这一小节中，将分析推迟标量位和推迟矢量位的时谐响应。假定$\rho_v(\boldsymbol{R}_i,t)$是角频率为$\omega$的正弦时变函数，即

$$\rho_v(\boldsymbol{R}_i,t)=\rho_v(\boldsymbol{R}_i)\cos\omega t \tag{6.76}$$

在1.7节中介绍的相量分析，是求解时谐问题的有力工具，在第2章分析波在传输线上的传播时得到了广泛应用。用相量表示时，$\rho_v(\boldsymbol{R}_i,t)$写成以下形式

$$\rho_v(\boldsymbol{R}_i,t)=\mathfrak{Re}[\tilde{\rho}_v(\boldsymbol{R}_i)e^{j\omega t}], \tag{6.77}$$

其中$\tilde{\rho}_v(\boldsymbol{R}_i)$是对应时间函数$\rho_v(\boldsymbol{R}_i,t)$的相量函数。为便于识别，在字符顶部加“～”表示相量。比较式（6.76）和式（6.77）可知，在目前的情况下，$\tilde{\rho}_v(\boldsymbol{R}_i)=\rho_v(\boldsymbol{R}_i)$

接下来，将推迟电荷密度$\rho_v(\boldsymbol{R}_i,t-R'/u_p)$表示成相量形式，这只需将式（6.77）中的$t$用（$t-R'/u_p$）替换即可

$$\begin{aligned}\rho_v(\boldsymbol{R}_i,t-R'/u_p)&=\mathfrak{Re}\left[\tilde{\rho}_v(\boldsymbol{R}_i)e^{j\omega(t-R'/u_p)}\right]\\&=\mathfrak{Re}\left[\tilde{\rho}_v(\boldsymbol{R}_i)e^{-j\omega R'/u_p}e^{j\omega t}\right]=\mathfrak{Re}\left[\tilde{\rho}_v(\boldsymbol{R}_i)e^{-jkR'}e^{j\omega t}\right]\end{aligned} \tag{6.78}$$

其中

$$k=\frac{\omega}{u_p} \tag{6.79}$$

称为波数（wavenumber），或传播媒介的相位常数。（通常，相位常数用符号“β”表示，而在无损电介质媒介中，则通常采用符号“k”，并称为波数）。同样，根据以下公式，定义时间函数$V(\boldsymbol{R},t)$的相量$\tilde{V}(\boldsymbol{R})$

$$V(\boldsymbol{R},t)=\mathfrak{Re}[\tilde{V}(\boldsymbol{R})e^{j\omega t}] \tag{6.80}$$

将式（6.78）、式（6.80）代入式（6.74）可得

$$\mathfrak{Re}[\tilde{V}(\boldsymbol{R})e^{j\omega t}]=\mathfrak{Re}\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{v'}\frac{\tilde{\rho}_v(\boldsymbol{R}_i)e^{-jkR'}}{R'}e^{j\omega t}dv'\right] \tag{6.81}$$

令上式两端方括号中的量相等，并消除$e^{j\omega t}$，得到相量域中的表达式

$$\tilde{V}(\boldsymbol{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{v'}\frac{\tilde{\rho}_v(\boldsymbol{R}_i)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR'}}{R'}\mathrm{d}v' \quad (\mathrm{V}) \tag{6.82}$$

对于任何给定的电荷分布，可用式（6.82）计算 $\tilde{V}(\boldsymbol{R})$，然后将结果代入式（6.80）求 $V(\boldsymbol{R},t)$。按照类似的方法，式（6.75）的 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R},t)$ 表达式可转换成

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R},t)=\Re\mathfrak{e}[\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{R})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] \tag{6.83}$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{R})=\frac{\mu}{4\pi}\int_{v'}\frac{\tilde{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{R}_i)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR'}}{R'}\mathrm{d}v', \tag{6.84}$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{R}_i)$ 是对应 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}_i,t)$ 的相量函数。

对应 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的磁场相量 $\tilde{\boldsymbol{H}}$ 为

$$\tilde{\boldsymbol{H}}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\tilde{\boldsymbol{A}} \tag{6.85}$$

回顾相量的知识，在时域中求导，等效于在相量域中乘以 $\mathrm{j}\omega$，所以，在非导电媒介中($\boldsymbol{J}=0$)，式（6.4）的安培定律变为 [252]

$$\nabla\times\tilde{\boldsymbol{H}}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\tilde{\boldsymbol{E}} \quad 或 \quad \tilde{\boldsymbol{E}}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}\nabla\times\tilde{\boldsymbol{H}} \tag{6.86}$$

因此，给定时谐电流密度分布的相量 $\tilde{\boldsymbol{J}}$，可以依次应用式（6.84）到式（6.86）来确定 $\tilde{\boldsymbol{E}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{H}}$。相量形式的矢量 $\tilde{\boldsymbol{E}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{H}}$，同样是由相量形式的法拉第定律联系在一起的

$$\nabla\times\tilde{\boldsymbol{E}}=-\mathrm{j}\omega\mu\tilde{\boldsymbol{H}} \quad 或 \quad \tilde{\boldsymbol{H}}=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\nabla\times\tilde{\boldsymbol{E}} \tag{6.87}$$

例 6-8

在 $\varepsilon=16\varepsilon_0$，$\mu=\mu_0$ 的非导电媒介中，一个电磁波的电场强度为

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\hat{\boldsymbol{x}}\,10\sin(10^{10}t-kz) \quad (\mathrm{V/m}) \tag{6.88}$$

确定相应的磁场强度 $\boldsymbol{H}$，并求 k 的数值。

解答：先求 $\boldsymbol{E}(z,t)$ 的相量 $\tilde{\boldsymbol{E}}(z)$。因为 $\boldsymbol{E}(z,t)$ 是以正弦函数形式给定的，而本书中的相量是相对余弦函数定义的，所以将式（6.88）重写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(z,t)&=\hat{\boldsymbol{x}}\,10\cos(10^{10}t-kz-\pi/2) \quad (\mathrm{V/m})\\&=\Re\mathfrak{e}[\tilde{\boldsymbol{E}}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}],\end{aligned} \tag{6.89}$$

其中 $\omega=10^{10}\,\mathrm{rad/s}$，

$$\tilde{\boldsymbol{E}}(z)=\hat{\boldsymbol{x}}\,10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}=-\hat{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{j}10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \tag{6.90}$$

为了求得 $\tilde{\boldsymbol{H}}(z)$ 和 k，需兜一个“圈子”：将给定的 $\tilde{\boldsymbol{E}}(z)$ 代入法拉第定律求 $\tilde{\boldsymbol{H}}(z)$，再将 $\tilde{\boldsymbol{H}}(z)$ 代入安培定律求 $\tilde{\boldsymbol{E}}(z)$，然后同原始的 $\tilde{\boldsymbol{E}}(z)$ 表达式进行比较，以获得 k 值。应用式（6.87）可得

$$\tilde{\boldsymbol{H}}(z)=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\nabla\times\tilde{\boldsymbol{E}}=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ -\mathrm{j}10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\left[\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial z}(-\mathrm{j}10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz})\right]=-\hat{\boldsymbol{y}}\,\mathrm{j}\frac{10k}{\omega\mu}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\tag{6.91}$$

到此为止，已经利用了式（6.90）的 $\tilde{\boldsymbol{E}}(z)$ 求 $\tilde{\boldsymbol{H}}(z)$，但 k 仍然未知。为了求得 k，将 $\tilde{\boldsymbol{H}}(z)$ 代入式（6.86），求得 $\tilde{\boldsymbol{E}}(z)$ 为

$$\tilde{\boldsymbol{E}}(z)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}\nabla\times\tilde{\boldsymbol{H}}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}\left[-\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial z}\left(-\mathrm{j}\frac{10k}{\omega\mu}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\right)\right]=-\hat{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{j}\frac{10k^2}{\omega^2\mu\varepsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\tag{6.92}$$

令式（6.90）和式（6.92）相等，得

$$k^2=\omega^2\mu\varepsilon,$$

即

253

$$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=4\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=\frac{4\omega}{c}=\frac{4\times10^{10}}{3\times10^8}=133\quad(\mathrm{rad/m})\tag{6.93}$$

在 k 已知的情况下，磁场强度的瞬时表达式为

$$\boldsymbol{H}(z,t)=\Re\mathrm{e}[\tilde{\boldsymbol{H}}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\Re\mathrm{e}\left[-\hat{\boldsymbol{y}}\,\mathrm{j}\frac{10k}{\omega\mu}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

$$=\hat{\boldsymbol{y}}\,0.11\sin(10^{10}t-133z)\quad(\mathrm{A/m})\tag{6.94}$$

可以看到，上面的 k 同无损传输线的相位常数表达式（2.39）相同。■

练习 6.7　无损媒介的 $\varepsilon=9\varepsilon_0$，$\mu=\mu_0$，其中传播的电磁波的磁场强度为

$$\boldsymbol{H}(z,t)=\hat{\boldsymbol{x}}\,0.3\cos(10^8t-kz+\pi/4)\quad(\mathrm{A/m})$$

求 $\boldsymbol{E}(z,t)$ 和 k。

答案：$\boldsymbol{E}(z,t)=-\hat{\boldsymbol{y}}\,37.7\cos(10^8t-z+\pi/4)$（V/m）；$k=1$（rad/m）。（参见❁）

本章要点

- 法拉第定律指出，如果交链回路面积的磁通随时间变化，则回路终端将产生感应电压。
- 在理想变压器中，初级回路同次级回路的电压、电流以及阻抗的比值，取决于匝数比。
- 位移电流用以描述电介质中电荷的“视在”流动。实际上，极性相反的电荷聚积在电介质的两端，产生电流流过它的表象。
- 两种不同媒介交界面上的电磁场边界条件，对于静态和动态情况都是相同的。
- 电荷连续性方程是电荷守恒原理的数学描述。
- 良导体内部多余的电荷耗散十分迅速，经过一个重新排列的过程，多余的电荷被传输到导体的表面。
- 在动态情况下，电场 $\boldsymbol{E}$ 同标量电位 V 及矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 都有关系。
- 在给定观测点处的推迟标量位、及推迟矢量位，考虑了源（即电荷与电流分

布）同观测点之间场传播所需要的时间。

重要术语汇总

请说明下列术语的意义，或给出定义

法拉第定律	电动势 V_{emf}	电磁感应	变压器电动势 V_{emf}^{tr}
动生电动势 V_{emf}^{m}	楞次定律	位移电流 I_d	电荷连续性方程
基尔霍夫电流定律	电荷耗散	弛豫时间常数	波数 k
推迟位			

254

习题

6.2～6.7　法拉第定律及其应用

6.1* 在图 6-17 中，底部回路中的开关在 $t=0$ 时闭合，在稍后的 t_1 时刻断开。在这两次操作中，上部回路中电流的方向如何（顺时针还是逆时针）？

6.2 在图 6-18 中，回路位于 x-y 平面上，$\mathbf{B}=\hat{\mathbf{z}}B_0\sin\omega t$，$B_0$ 为正值。在以下各时刻，I 的方向如何（$\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 还是 $-\hat{\boldsymbol{\phi}}$）？

(a) $t=0$；

(b) $\omega t=\pi/4$；

(c) $\omega t=\pi/2$。

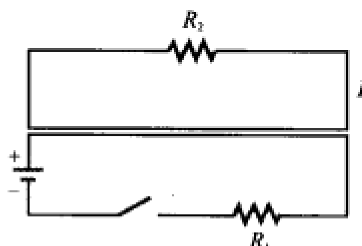


图 6-17　习题 6.1 的回路

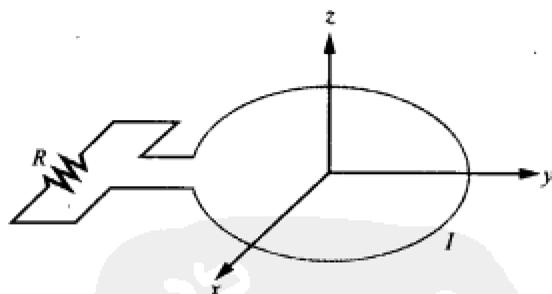


图 6-18　习题 6.2 的回路

6.3* 一个线圈，由 100 匝导线绕在边长为 0.25m 的一个方形框架上构成。线圈中心位于原点，各边平行于 x 轴或 y 轴。对于下面给定的各种磁场情况，求线圈开路端口上的感应电动势：

(a) $\mathbf{B}=\hat{\mathbf{z}}\,10e^{-2t}$ (T)；

(b) $\mathbf{B}=\hat{\mathbf{z}}\,10\cos x\cos 10^3 t$ (T)；

(c) $\mathbf{B}=\hat{\mathbf{z}}\,10\cos x\sin 2y\cos 10^3 t$ (T)。

6.4 内阻为 0.5Ω 的静止导电回路，放置在时变的磁场中。当回路闭合时，电流为 2.5A。如果在回路上开个小口，接入 2Ω 的电阻，电流将变为多少？

6.5* 一个环形回路 TV 天线，面积为 0.01m²，位于 300MHz 的均匀幅值信号中。当处于最大响应方位时，回路的电动势峰值为 20mV。入射波中 $\mathbf{B}$ 的最大幅值是多少？

---

* 答案见附录 D。

6.6 图6-19中的方形回路，与一根长直导线共面，导线中电流为

[255]

$$i(t) = 2.5\cos 2\pi \times 10^4 t \quad (\mathrm{A})$$

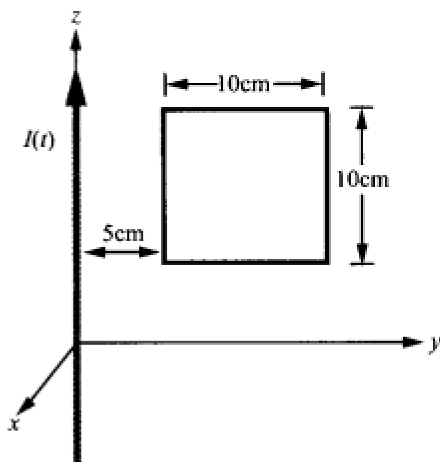
(a) 在回路上开一个小缺口，求缺口上的感应电动势；

(b) 在缺口上接4Ω的电阻，求流过的电流幅值和方向（回路内阻为1Ω）。

6.7* 图6-20所示的矩形导电回路，以6000r/min的速度，在以下均匀磁场中旋转：

$$\boldsymbol{B} = \hat{\boldsymbol{y}}\,50 \quad (\mathrm{mT})$$

如果回路的内阻为0.5Ω，确定回路中的感应电流。



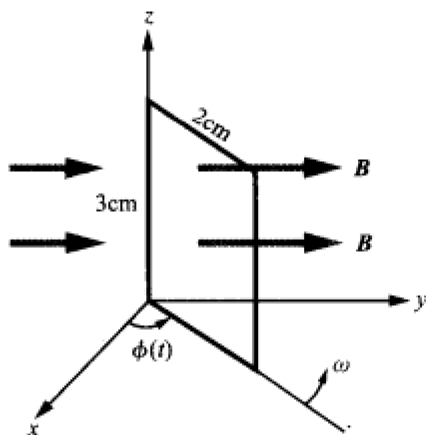


图6-19 与长直导线共面的回路（习题6.6） 图6-20 在磁场中旋转的回路（习题6.7）

6.8 5cm×10cm的矩形导电回路，一边上开有小气隙，以7200r/min的速度自转（旋转轴在矩形回路所在平面上）。如果磁场 $\boldsymbol{B}$ 垂直于回路的旋转轴线，幅值为 5×10^{-6}T，求在气隙上感应电压的峰值。

6.9* 长50cm的水平金属杆，以180r/min的速度，绕 z 轴旋转，端点1固定在原点，如图6-21所示。如果 $\boldsymbol{B} = \hat{\boldsymbol{z}}\,3\times20^{-4}$ T，求感应电动势 V_{12}。

[256]

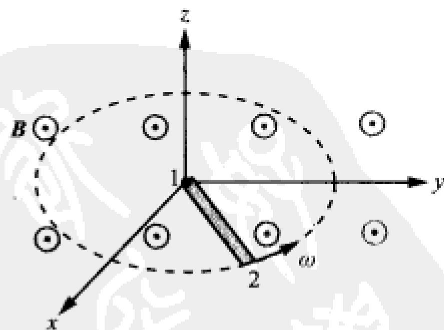


图6-21 习题6.9的旋转金属杆

6.10 图6-22所示的回路，以恒定的速度 $\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{y}}\,5(\mathrm{m/s})$ 远离载流为 $I_1 = 10\mathrm{A}$ 的一根导线。如果 $R = 10\Omega$，I_2 方向定义如图所示，求 I_2 关于 y_0 的函数（y_0 为导线和回路间的距离）。忽略回路的内阻。

6.11* 图6-23所示的导电圆柱体，以1200r/min的速度，在以下径向磁场中，绕自身轴线旋转：

$$\boldsymbol{B} = \hat{\boldsymbol{r}}\,6 \quad (\mathrm{T})$$

圆柱体的半径为5cm，高度为10cm，其顶端和底部通过滑动接触连接到一个伏特表。求感应电压。

解答见CD-ROM。

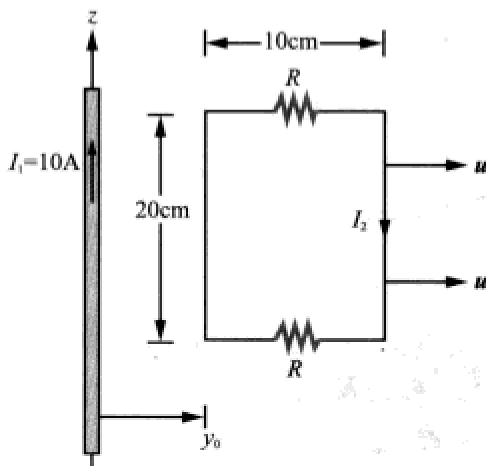


图 6-22 习题 6.10 的运动回路

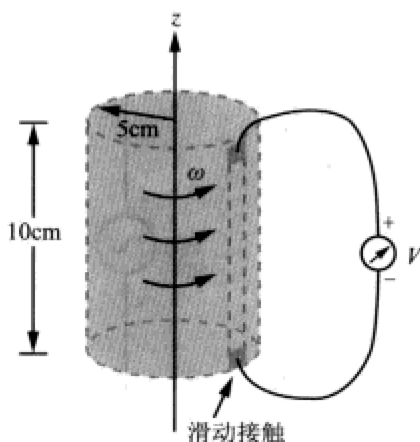


图 6-23 在磁场中旋转的圆柱体（习题 6.11）

6.12 图 6-12 所示的电磁式发电机连接到一个电阻为 100Ω 的电灯泡。如果回路面积为 0.1m^2，以 3600r/min 的速度，在均匀磁通密度 $B_0=0.2\text{T}$ 中旋转，确定在电灯泡中产生的电流幅值。

6.13* 图 6-24 所示的圆盘位于 x-y 平面中，并以均匀速度 ω 绕 z 轴旋转。圆盘半径为 a，位于均匀磁场 $\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{z}}B_0$ 中。求圆盘边沿相对圆盘中心的感应电动势表达式。

257

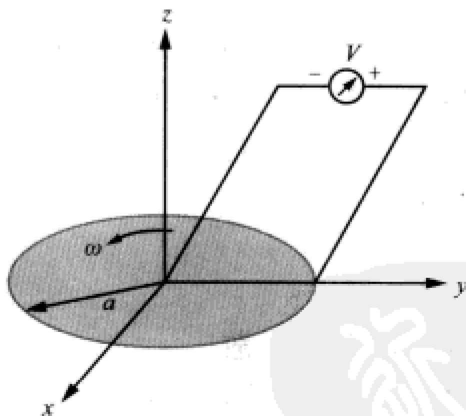


图 6-24 在磁场中旋转的圆盘（习题 6.13）

6.8 位移电流

6.14 电容器的极板面积为 10cm^2，板间距离为 1cm，中间填充的介电材料 $\varepsilon=4\varepsilon_0$，两端电压为 $V(t)=20\cos(2\pi 10^6 t)$ (V)。求位移电流。

6.15* 长度为 $l=6\text{cm}$ 的同轴电容，所用的绝缘电介质材料 $\varepsilon_r=9$。圆柱导体的半径分别为 0.5cm 和 1cm。如果施加在电容上的电压为

$$V(t)=100\sin(120\pi t)\quad(\text{V})$$

求位移电流。

6.16 图 6-25 所示的平行板电容器，填充相对介电常数为 ε_r、电导率为 σ 的有损介电材料。极板距间距为 d，极板面积为 A。电容器连接到时变电压源 $V(t)$。

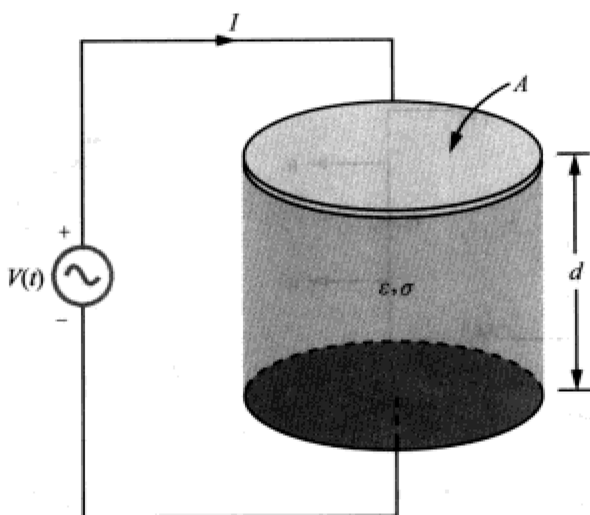


图6-25 填充有损介电材料的平行板电容器（习题6.16）

（a）利用给定的有关量，求电容器极板间的传导电流 I_c 的表达式；

（b）求电容器中位移电流 I_d 的表达式；

（c）基于（a）、(b）部分的结果，建立电容器的一个等效电路；

（d）设 $A=2\text{cm}^2, d=0.5\text{cm}, \varepsilon_r=4, \sigma=2.5\text{S/m}, V(t)=10\cos(3\pi\times10^3 t)(\text{V})$。计算电路元件的参数。

6.17 在海水中传播的电磁波具有时变的电场 $\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{z}}E_0\cos\omega t$。如果海水的介电常数为 $81\varepsilon_0$，电导率为4S/m，求在下述几种频率下，传导电流密度幅值与位移电流密度幅值的比值

（a）1kHz；

（b）1MHz；

（c）1GHz；

（d）100GHz。

6.10～6.11 连续性方程与电荷耗散

6.18 在 $t=0$ 时刻，电荷密度 ρ_{v0} 被引入相对介电常数为 $\varepsilon_r=4$ 的材料内部。如果在 $t=1\mu\text{s}$ 时，电荷密度耗散降为 $10^{-3}\rho_{v0}$，求材料的电导率。

6.19* 如果导电媒介中的电流密度为

$$\boldsymbol{J}(x,y,z;t)=(\hat{\boldsymbol{x}}z-\hat{\boldsymbol{y}}3y^2+\hat{\boldsymbol{z}}2x)\cos\omega t$$

确定对应的电荷分布 $\rho_v(x,y,z;t)$。

第 7 章　平面电磁波的传播

7.1　无界电磁波

第 6 章建立了这样一种认识，即时变的电场 $\boldsymbol{E}(t)$ 产生时变的磁场 $\boldsymbol{H}(t)$，反过来时变的磁场也将产生电场。这种循环模式，将产生可以在真空和媒介材料中传播的电磁波。当电磁波的传播由某种材料结构（譬如传输线）引导时，则称其在导向媒介（guided medium）中行进。对于 HF 波段（3MHz ~ 30MHz）的短波无线电传输而言，地表和电离层构成了一个边界平行的自然波导结构，在这一频段下，电离层是良好的反射层，因而波可以在两层边界之间曲折前行（图 7-1）。电磁波也可以在无界媒介（unbounded medium）中行进，太阳发射的光波以及由天线输送的无线电波就是典型的例子。

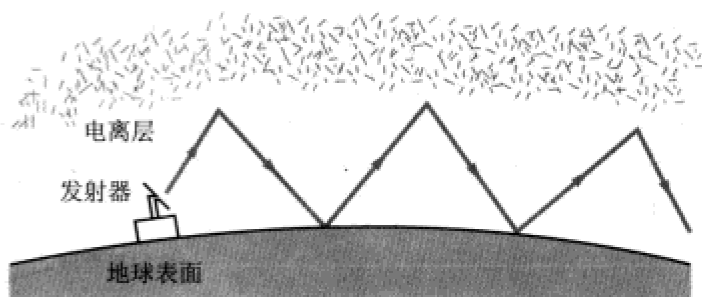


图 7-1　对于 HF 波段的无线电波的传播来讲，处于电离层和地表面之间的大气层，构成了一个导波结构

在第 2 章中，我们是用处理电压、电流的方式，来讨论波在传输线上的传播的。在图 7-2 所示的传输线电路中，交流电压源激发出一个入射波，沿着同轴线向负载行进；除非负载同线路匹配恰当，否则的话，部分（甚至全部）的入射波将反射回电源。在线路上任意一点 z，总瞬时电压 $v(z,t)$ 等于入射波与反射波之和，两个波都是随时间正弦变化的。由于同轴线内外导体间的电位差，对应着导体间介电材料中的径向电场 $\boldsymbol{E}$，因为 $v(z,t)$ 随时间正弦变化，所以 $\boldsymbol{E}(z,t)$ 也正弦变化。不仅如此，流经内导体的电流，也将在环绕电流的介电材料中感应出环绕内导体的磁场 $\boldsymbol{H}(z,t)$。这两个耦合的场，即 $\boldsymbol{E}(z,t)$ 和 $\boldsymbol{H}(z,t)$ 构成了电磁波。因此，对传输线上波的传播进行建模，既可以利用线路上的电压和导体中电流，也可以利用导体间介电媒介中的电场和磁场。

本章的重点将集中于无界媒介中波的传播，既要分析无损媒介，也要分析有损媒介。在无损媒介（lossless medium）中，譬如空气之类的理想电介质中，波的传播跟在无损传输线上的情况类似。在电导率非零的有损媒介（lossy medium）中，譬如水中，

电磁波携带的部分能量将转换成热量，这同波在有损传输线上传播的情况类似。

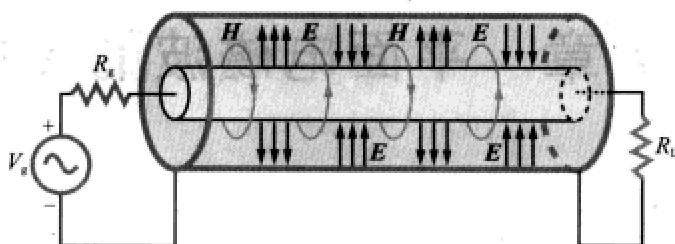


图 7-2 在同轴传输线上行进的导行电磁波，是由时变的电场和磁场构成的，这两个场存在于内、外导体间的电介质媒介中

当能量从天线一类的源发射出来时，它将以球面波（spherical wave）的形式，由源往外扩展，如图 7-3a 所示。虽然天线有可能在某个方向比沿着其他方向辐射更多的能量，但球面波沿各个方向的行进速度是相同的，因此以相同的速度扩展。对于远离源的观测者来说，球面波的波前（wavefront）近似为平面，就好像它是某个同波前相切的、具有均匀特性的均匀平面波（uniform plane wave）的一部分似的，如图 7-3b 所示。平面波的传播比较适合用直角坐标系进行数学处理，这同描述球面波传播所要求的球坐标系的数学处理相比，要容易些。因此，尽管严格意义上的均匀平面波并不存在，但本章却将利用它来建立波在无损、有损媒介中传播的物理描述，然后在第 8 章研究平面波、球面波是如何在两个不同媒介的交界面上发生反射和传输的。天线对波的辐射与接收过程，将在第 9 章介绍。

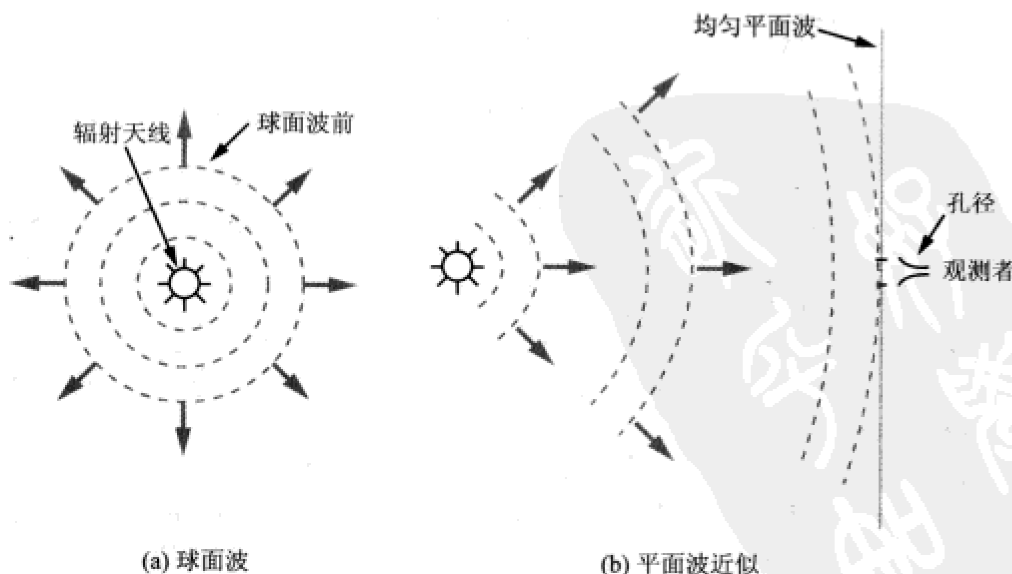


图 7-3 由灯泡、天线等波源辐射的电磁波，具有球形的波前，如（a）所示；然而，对于远处的观测者，进入观测者孔径视野的波前则近似平面波，如（b）所示

7.2 时谐场

在时变情况下，电场与磁场($\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$)，以及它们的源（电荷密度ρ_v、电流密度$\boldsymbol{J}$)，通常每个都是空间坐标(x,y,z)以及时间变量t的函数。如果它们随时间的变化是角频率为ω的正弦函数，则它们都可以表示成仅仅依赖于(x,y,z)，而与时间无关的相量。因此，对应瞬态场$\boldsymbol{E}(x,y,z;t)$的相矢量$\tilde{\boldsymbol{E}}(x,y,z)$按以下方式定义 262

$$\boldsymbol{E}(x,y,z;t)=\Re\mathfrak{e}[\tilde{\boldsymbol{E}}(x,y,z)e^{j\omega t}], \tag{7.1}$$

对于其他场量以及ρ_v、$\boldsymbol{J}$，也采用类似的定义。对于介电常数为ε、磁导率为μ、电导率为σ的线性、各向同性、且均质的媒介，在时域中的求导，对应于在相量域中乘以$j\omega$，因此式（6.1）到式（6.4）的麦克斯韦方程在相量域中具有以下形式

$$\nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{E}}=\tilde{\rho}_v/\varepsilon, \tag{7.2a}$$

$$\nabla\times\tilde{\boldsymbol{E}}=-j\omega\mu\tilde{\boldsymbol{H}}, \tag{7.2b}$$

$$\nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{H}}=0, \tag{7.2c}$$

$$\nabla\times\tilde{\boldsymbol{H}}=\tilde{\boldsymbol{J}}+j\omega\varepsilon\tilde{\boldsymbol{E}}, \tag{7.2d}$$

其中利用了$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$的关系。这组方程是本章主要工作的出发点。

7.2.1 复介电常数

在电导率为σ的媒介中，电流密度$\boldsymbol{J}$同$\boldsymbol{E}$的关系为$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$。因此，式（7.2d）可以写成

$$\nabla\times\tilde{\boldsymbol{H}}=\tilde{\boldsymbol{J}}+j\omega\varepsilon\tilde{\boldsymbol{E}}=(\sigma+j\omega\varepsilon)\tilde{\boldsymbol{E}}=j\omega\left(\varepsilon-j\frac{\sigma}{\omega}\right)\tilde{\boldsymbol{E}} \tag{7.3}$$

通过引入以下形式的复介电常数（complex permittivity）ε_c

$$\varepsilon_c\triangleq\varepsilon-j\frac{\sigma}{\omega}, \tag{7.4}$$

式（7.3）可以重写为

$$\nabla\times\tilde{\boldsymbol{H}}=j\omega\varepsilon_c\tilde{\boldsymbol{E}} \tag{7.5}$$

式（7.4）给定的复介电常数ε_c，常表示成实部ε'和虚部ε''的形式，即

$$\varepsilon_c=\varepsilon-j\frac{\sigma}{\omega}\triangleq\varepsilon'-j\varepsilon'', \tag{7.6}$$

其中

$$\varepsilon'=\varepsilon, \tag{7.7a}$$

$$\varepsilon''=\frac{\sigma}{\omega} \tag{7.7b}$$

对于无损媒介，因$\sigma=0$，所以$\varepsilon''=0$，$\varepsilon_c=\varepsilon'=\varepsilon$。

7.2.2 无自由电荷媒介中的波动方程

所谓无自由电荷的媒介，就是没有多余电荷，即$\rho_v=0$的媒介。用式（7.5）代替式（7.2d），并令式（7.2a）中的$\rho_v=0$，则可得到无自由电荷媒介的麦克斯韦方程

$$\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{E}} = 0, \tag{7.8a}$$

$$\nabla \times \tilde{\boldsymbol{E}} = -\mathrm{j}\omega\mu \tilde{\boldsymbol{H}}, \tag{7.8b}$$

$$\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{H}} = 0, \tag{7.8c}$$

$$\nabla \times \tilde{\boldsymbol{H}} = \mathrm{j}\omega\varepsilon_c \tilde{\boldsymbol{E}} \tag{7.8d}$$

为了描述电磁波在无自由电荷媒介中的传播，必须推导 $\tilde{\boldsymbol{E}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{H}}$ 的波动方程，然后求解以得到 $\tilde{\boldsymbol{E}}$、$\tilde{\boldsymbol{H}}$ 关于空间变量(x,y,z)的显式表示。为此，先对式（7.8b）两端求旋度

$$\nabla \times (\nabla \times \tilde{\boldsymbol{E}}) = -\mathrm{j}\omega\mu(\nabla \times \tilde{\boldsymbol{H}}) \tag{7.9}$$

再将式（7.8d）代入式（7.9）得：

263

$$\nabla \times (\nabla \times \tilde{\boldsymbol{E}}) = -\mathrm{j}\omega\mu(\mathrm{j}\omega\varepsilon_c \tilde{\boldsymbol{E}}) = \omega^2\mu\varepsilon_c \tilde{\boldsymbol{E}} \tag{7.10}$$

根据式（3.113），$\tilde{\boldsymbol{E}}$ 的旋度的旋度为

$$\nabla \times (\nabla \times \tilde{\boldsymbol{E}}) = \nabla(\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{E}}) - \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{E}}, \tag{7.11}$$

其中$\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{E}}$ 是 $\tilde{\boldsymbol{E}}$ 的拉普拉斯运算，在直角坐标系中为

$$\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{E}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\tilde{\boldsymbol{E}} \tag{7.12}$$

考虑到式（7.8a），即$\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{E}} = 0$，再将式（7.11）用于式（7.10），可得

$$\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{E}} + \omega^2\mu\varepsilon_c \tilde{\boldsymbol{E}} = 0, \tag{7.13}$$

这称为 $\tilde{\boldsymbol{E}}$ 的**均质波动方程**（homogeneous wave equation）。引入以下**传播常数**（propagation constant）γ

$$\gamma^2 \triangleq -\omega^2\mu\varepsilon_c, \tag{7.14}$$

则方程（7.13）可重写为

$$\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{E}} - \gamma^2 \tilde{\boldsymbol{E}} = 0 \tag{7.15}$$

在获得式（7.15）的过程中，先是对式（7.8b）两端求旋度，再应用式（7.8d），以获得仅包含 $\tilde{\boldsymbol{E}}$ 的方程。如果将以上过程调整一下，即先对式（7.8d）两端求旋度，再应用式（7.8b），则可以获得 $\tilde{\boldsymbol{H}}$ 的波动方程

$$\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{H}} - \gamma^2 \tilde{\boldsymbol{H}} = 0 \tag{7.16}$$

由于 $\tilde{\boldsymbol{E}}$、$\tilde{\boldsymbol{H}}$ 的波动方程具有相同的形式，因此它们的解也将具有相同的形式。

7.3 无损媒介中平面波的传播

电磁波的传播特性，如相速度 u_p，波长 λ 等，是由角频率 ω 以及媒介的三个构造参数 ε、μ、σ 决定的。如果媒介是**非导电的**（nonconducting），即 $\sigma = 0$，则当波在其中行进时，不会受到任何的衰减，因此将这种媒介称为**无损的**（lossless）。根据式（7.4），无损媒介的 $\varepsilon_c = \varepsilon$，因此式（7.14）变为

$$\gamma^2 = -\omega^2\mu\varepsilon \tag{7.17}$$

当媒介为无损的时，依惯例引入**波数**（wave number）k，定义为

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{7.18}$$

基于式（7.17），有 $\gamma^2 = -k^2$，式（7.15）变为

$$\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{E}} + k^2 \tilde{\boldsymbol{E}} = 0 \tag{7.19}$$

7.3.1 均匀平面波

对于在直角坐标系中给定的电场相量

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = \hat{\boldsymbol{x}}\tilde{E}_x + \hat{\boldsymbol{y}}\tilde{E}_y + \hat{\boldsymbol{z}}\tilde{E}_z, \tag{7.20}$$

将式（7.12）代入式（7.19）可得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(\hat{\boldsymbol{x}}\tilde{E}_x + \hat{\boldsymbol{y}}\tilde{E}_y + \hat{\boldsymbol{z}}\tilde{E}_z) + k^2(\hat{\boldsymbol{x}}\tilde{E}_x + \hat{\boldsymbol{y}}\tilde{E}_y + \hat{\boldsymbol{z}}\tilde{E}_z) = 0 \tag{7.21}$$

为了满足式（7.21）的成立，要求方程左端矢量的每个分量等于零。因此有

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)\tilde{E}_x = 0, \tag{7.22}$$

264

$\tilde{E}_y$、$\tilde{E}_z$也具有相似的表达式。

均匀平面波（uniform plane wave）的特点为，在无穷大平面上的所有点上，电场和磁场都是均匀的（见图 7-3）。如果所指的是 x-y 平面，则 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 将不随 x、y 变化，即 $\partial\tilde{E}_x/\partial x = 0, \partial\tilde{E}_x/\partial y = 0$，因此式（7.22）将简化为

$$\frac{d^2\tilde{E}_x}{dz^2} + k^2\tilde{E}_x = 0, \tag{7.23}$$

$\tilde{E}_y$、$\tilde{H}_x$和$\tilde{H}_y$也具有相似的表达式。$\tilde{\boldsymbol{E}}$、$\tilde{\boldsymbol{H}}$的其余分量则为零，即 $\tilde{E}_z = \tilde{H}_z = 0$。为了证明 $\tilde{E}_z = 0$，考虑式（7.8d）中的 z 分量

$$\hat{\boldsymbol{z}}\left(\frac{\partial\tilde{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial\tilde{H}_x}{\partial y}\right) = \hat{\boldsymbol{z}}\,\mathrm{j}\omega\varepsilon\tilde{E}_z \tag{7.24}$$

因为 $\partial\tilde{H}_y/\partial x = \partial\tilde{H}_x/\partial y = 0$，所以有 $\tilde{E}_z = 0$。针对式（7.8b）作同样的分析可以发现 $\tilde{H}_z = 0$。这意味着，平面波沿着其传播方向既没有电场分量，也没有磁场分量。

对于式（7.23）的这样的常微分方程，相量 $\tilde{E}_x$的通解为

$$\tilde{E}_x(z) = \tilde{E}_x^+(z) + \tilde{E}_x^-(z) = E_{x0}^+ e^{-jkz} + E_{x0}^- e^{jkz}, \tag{7.25}$$

其中E_{x0}^+和E_{x0}^-是待定常数，由边界条件确定。式（7.25）给出的 $\tilde{E}_x(z)$ 解，在形式上同式（2.44a）给出的无损传输线的电压相量 $\tilde{V}(z)$解相似。式（7.25）中的第一项，包含负的指数 e^{-jkz}，代表一个幅值为E_{x0}^+、沿着正 z 轴行进的波，第二项（e^{jkz}）代表一个幅值为E_{x0}^-、沿着负 z 轴行进的波。暂时假定 $\tilde{\boldsymbol{E}}$ 仅有一个沿着 x 轴的分量（即 $\tilde{E}_y = 0$），并且 $\tilde{E}_x$仅有一个沿着 $+z$ 轴行进的波（即$E_{x0}^- = 0$），因此

$$\tilde{\boldsymbol{E}}(z) = \hat{\boldsymbol{x}}\tilde{E}_x^+(z) = \hat{\boldsymbol{x}}E_{x0}^+ e^{-jkz} \tag{7.26}$$

由于 $\tilde{E}_y = \tilde{E}_z = 0$，因此应用式（7.8b）可以求取磁场$\tilde{\boldsymbol{H}}(z)$

$$\nabla\times\tilde{\boldsymbol{E}}=\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \tilde{E}_x^+(z) & 0 & 0\end{vmatrix}=-\mathrm{j}\omega\mu(\hat{\boldsymbol{x}}\tilde{\boldsymbol{H}}_x+\hat{\boldsymbol{y}}\tilde{\boldsymbol{H}}_y+\hat{\boldsymbol{z}}\tilde{\boldsymbol{H}}_z) \tag{7.27}$$

对于沿 z 轴方向行进的平面波，$\partial E_x^+(z)/\partial x=\partial E_x^+(z)/\partial y=0$。因此，由式（7.27）可得

$$\tilde{\boldsymbol{H}}_x=0, \tag{7.28a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{H}}_y=\frac{1}{-\mathrm{j}\omega\mu}\frac{\partial\tilde{E}_x^+(z)}{\partial z}, \tag{7.28b}$$

$$\tilde{\boldsymbol{H}}_z=\frac{1}{-\mathrm{j}\omega\mu}\frac{\partial E_x^+(z)}{\partial y}=0. \tag{7.28c}$$

将式（7.26）代入式（7.28b）得

$$\tilde{\boldsymbol{H}}_y(z)=\frac{k}{\omega\mu}E_{x0}^+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}=H_{y0}^+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}, \tag{7.29}$$

其中H_{y0}^+是$\tilde{\boldsymbol{H}}_y(z)$ 的振幅，由式（7.30）给定

$$H_{y0}^+=\frac{k}{\omega\mu}E_{x0}^+ \tag{7.30}$$

对于沿着传输线从源向负载行进的波，其电压相量和电流相量的振幅，即 V_0^+ 和 I_0^+，是由线路的特征阻抗 Z_0联系在一起的。电磁波的电场和磁场之间也存在着类似的联系。无损媒介的本征阻抗（intrinsic impedance）定义为

265

$$\eta\triangleq\frac{\omega\mu}{k}=\frac{\omega\mu}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\quad(\Omega), \tag{7.31}$$

其中用到式（7.18）的 k 表达式。考虑到式（7.31），可将前面的结果概括如下

$$\tilde{\boldsymbol{E}}(z)=\hat{\boldsymbol{x}}\tilde{E}_x^+(z)=\hat{\boldsymbol{x}}E_{x0}^+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}, \tag{7.32a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{H}}(z)=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\tilde{E}_x^+(z)}{\eta}=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{E_{x0}^+}{\eta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \tag{7.32b}$$

电场和磁场是彼此垂直的，并且都垂直于波行进的方向（图 7-4）。方向上的上述特点，勾勒出了横向电磁（transverse electromagnetic, TEM）波的特征。TEM 波的其他例子还有，沿同轴传输线行进的圆柱波（$\boldsymbol{E}$ 沿 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 方向，$\boldsymbol{H}$ 沿 $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 方向，沿着 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 方向行进），以及由天线辐射的球面波等。

在一般情况下，E_{x0}^+是幅值为$|E_{x0}^+|$、相角为 ϕ^+ 的复数量，即

$$E_{x0}^+=|E_{x0}^+|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi^+} \tag{7.33}$$

因此，瞬时的电场、磁场为

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\Re\mathfrak{e}[\tilde{\boldsymbol{E}}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\hat{\boldsymbol{x}}|E_{x0}^+|\cos(\omega t-kz+\phi^+)\quad(\mathrm{V/m}), \tag{7.34a}$$

$$\boldsymbol{H}(z,t)=\Re\mathfrak{e}[\tilde{\boldsymbol{H}}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{|E_{x0}^+|}{\eta}\cos(\omega t-kz+\phi^+)\quad(\mathrm{A/m}) \tag{7.34b}$$

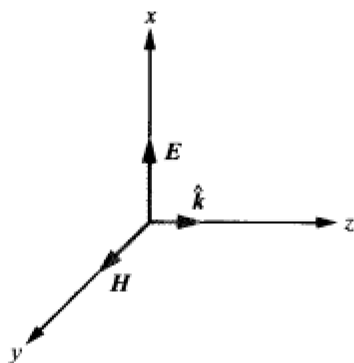


图 7-4 沿 $\hat{k}=\hat{z}$ 方向传播的横电磁（TEM）波。对于所有 TEM 波，$\hat{k}$ 平行于 $E\times H$

由于 $\boldsymbol{E}(z,t)$ 和 $\boldsymbol{H}(z,t)$ 以相同形式的函数依赖 z 和 t，因此称它们同相（in phase）；当其中一个的振幅达到最大值时，另一个也达到最大值。电场、磁场同相是无损媒介中波传播的特性。它们随时间变化由振荡频率为 $f=\omega/2\pi$ 决定，随空间变化由波长 λ 表征。根据 1.3 节介绍波动的材料，得出波的相速度（phase velocity）为

$$u_p=\frac{\omega}{k}=\frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\quad(\mathrm{m/s}),\tag{7.35}$$

波长为

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{u_p}{f}\quad(\mathrm{m})\tag{7.36}$$

如果媒介是真空，$\varepsilon=\varepsilon_0,\mu=\mu_0$，则相速度 u_p 以及对应式（7.31）的本征阻抗 η 为

$$u_p=c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=3\times10^8\quad(\mathrm{m/s}),\tag{7.37}$$

$$\eta=\eta_0\triangleq\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=377(\Omega)\approx120\pi\quad(\Omega),\tag{7.38}$$

其中 c 是光速，η_0 称自由空间的本征阻抗（intrinsic impedance of free space）。

例 7-1 空气中的平面电磁波

这个例子类似例 1-1 所述“水中的声波”问题。

266

M7.1-7.2

频率为 1MHz、在空气中沿 $+z$ 轴方向行进的平面波，其电场沿 x 方向。如果 E 的峰值为 $1.2\pi(\mathrm{mV/m})$，在 $t=0$ 时刻，E 的最大值出现在 $z=50\mathrm{m}$ 位置，求 $\boldsymbol{E}(z,t)$ 和 $\boldsymbol{H}(z,t)$ 的表达式，并绘制在 $t=0$ 时刻，它们随 z 变化的图形。

解答：对于 $f=1\mathrm{MHz}$，空气中的波长为

$$\lambda=\frac{c}{f}=\frac{3\times10^8}{1\times10^6}=300(\mathrm{m}),$$

相应的波数为 $k=(2\pi/300)\,\mathrm{rad/m}$。沿 $+z$ 轴行进、沿 x 方向的电场，其通式由式（7.34a）给定为

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\hat{x}|E_{x0}^{+}|\cos(\omega t-kz+\phi^{+})=\hat{x}1.2\pi\cos\left(2\pi\times10^6t-\frac{2\pi z}{300}+\phi^{+}\right)\quad(\mathrm{mV/m})$$

场 $\boldsymbol{E}(z,t)$ 的最大值，发生在其中的余弦函数的参数等于0或等于 2π 的整数倍时。对于 $t=0$ 及 $z=50\text{m}$，以上条件即为

267

$$-\frac{2\pi\times 50}{300}+\phi^{+}=0 \quad \text{即} \quad \phi^{+}=\frac{\pi}{3}$$

因此

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\hat{\boldsymbol{x}}1.2\pi\cos\left(2\pi\times 10^{6}t-\frac{2\pi z}{300}+\frac{\pi}{3}\right) \quad (\text{mV/m}),$$

根据式（7.34b）有

$$\boldsymbol{H}(z,t)=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{E(z,t)}{\eta_0}=\hat{\boldsymbol{y}}\,10\cos\left(2\pi\times 10^{6}t-\frac{2\pi z}{300}+\frac{\pi}{3}\right) \quad (\mu\text{A/m}),$$

其中利用了 $\eta_0\approx 120\pi(\Omega)$ 的近似。

在 $t=0$ 时，

$$\boldsymbol{E}(z,0)=\hat{\boldsymbol{x}}\,1.2\pi\cos\left(\frac{2\pi z}{300}-\frac{\pi}{3}\right) \quad (\text{mV/m}),$$

$$\boldsymbol{H}(z,0)=\hat{\boldsymbol{y}}\,10\cos\left(\frac{2\pi z}{300}-\frac{\pi}{3}\right) \quad (\mu\text{A/m})$$

$\boldsymbol{E}(z,0)$ 和 $\boldsymbol{E}(z,0)$ 作为 z 的函数，它们的图形如图7-5所示。 ■

7.3.2 E 和 H 间的一般性关系

可以证明，对于沿任意方向行进的任何均匀平面波，如果用单位矢量 $\hat{\boldsymbol{k}}$ 表示其行进的方向，则磁场相量 $\tilde{\boldsymbol{H}}$ 与电场相量 $\tilde{\boldsymbol{E}}$ 之间的相互关系为

$$\tilde{\boldsymbol{H}}=\frac{1}{\eta}\hat{\boldsymbol{k}}\times\tilde{\boldsymbol{E}}, \tag{7.39a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{E}}=-\eta\hat{\boldsymbol{k}}\times\tilde{\boldsymbol{H}} \tag{7.39b}$$

其中的叉积可以表述为下面的右手定则：当右手四指沿着 $\boldsymbol{E}$ 的方向旋转到 $\boldsymbol{H}$ 的方向时，大拇指所指的方向，就是波行进的方向 $\hat{\boldsymbol{k}}$。式（7.39a、b）不仅适用于无损媒介，对于有损媒介也成立。在第7.5节将会看到，有损媒介与无损媒介的差别在于，式（7.31）的 η 表达式不同。当波在媒介中行进时，只要计算 η 所用的公式选用恰当，式（7.39a、b）的关系就成立。

将式（7.39a）应用到式（7.32a）给定的波，波传播的方向为 $\hat{\boldsymbol{k}}=\hat{\boldsymbol{z}}$，$\tilde{\boldsymbol{E}}=\hat{\boldsymbol{x}}\tilde{E}_x^{+}(z)$。因此

$$\tilde{\boldsymbol{H}}=\frac{1}{\eta}\hat{\boldsymbol{k}}\times\tilde{\boldsymbol{E}}=\frac{1}{\eta}(\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{x}})\tilde{E}_x^{+}(z)=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\tilde{E}_x^{+}(z)}{\eta}, \tag{7.40}$$

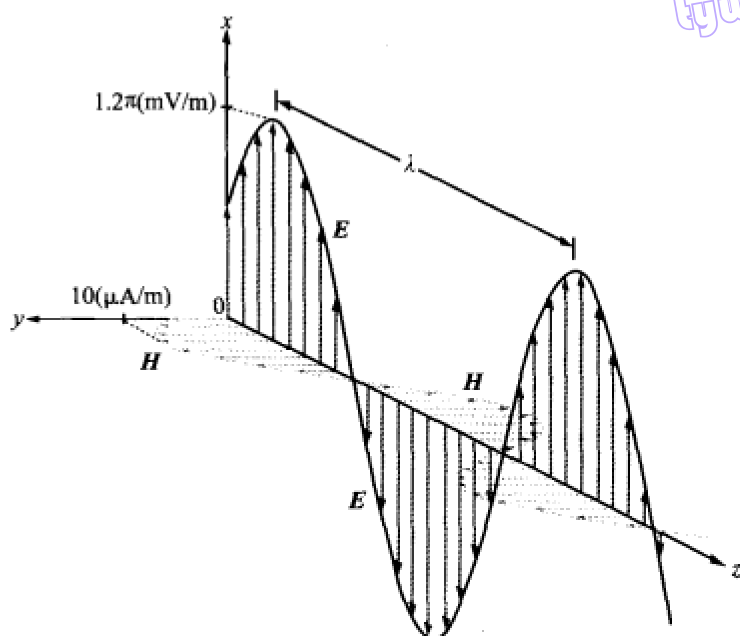


图 7-5 对于例 7-1 的平面波，在 $t=0$ 时刻，**E** 和 **H** 随空间变化的情况

这同式（7.32b）给出的结果相同。对于沿 $-z$ 方向行进的波，其电场给定为

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = \hat{\boldsymbol{x}}\tilde{E}_x^-(z) = \hat{\boldsymbol{x}}\tilde{E}_{x0}^- e^{jkz}, \tag{7.41}$$

应用式（7.39a）可得

$$\tilde{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{\eta}(-\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{x}})\tilde{E}_x^-(z) = -\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\tilde{E}_x^-(z)}{\eta} = -\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\tilde{E}_{x0}^-}{\eta}e^{jkz} \tag{7.42}$$

可见，在这种情况下，$\tilde{\boldsymbol{H}}$ 指向 $-y$ 轴方向。

一般而言，沿 $+z$ 轴方向行进的均匀平面波，可以具有 x、y 两个方向的分量，因此 $\tilde{\boldsymbol{E}}$ 为

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = \hat{\boldsymbol{x}}\tilde{E}_x^+(z) + \hat{\boldsymbol{y}}\tilde{E}_y^+(z), \tag{7.43a}$$

相应的磁场为

$$\tilde{\boldsymbol{H}} = \hat{\boldsymbol{x}}\tilde{H}_x^+(z) + \hat{\boldsymbol{y}}\tilde{H}_y^+(z) \tag{7.43b}$$

应用式（7.39a）得

$$\tilde{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{\eta}\hat{\boldsymbol{z}}\times\tilde{\boldsymbol{E}} = -\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\tilde{E}_y^+(z)}{\eta} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\tilde{E}_x^+(z)}{\eta} \tag{7.44}$$

令式（7.43b）与式（7.44）相等，得到

$$\tilde{H}_x^+(z) = -\frac{\tilde{E}_y^+(z)}{\eta}, \quad \tilde{H}_y^+(z) = \frac{\tilde{E}_x^+(z)}{\eta} \tag{7.45}$$

图 7-6 对以上结果进行了说明，即，上面所述的波，可以看成是两个波的和，其中一个具有(E_x^+, H_y^+)分量，另外一个具有(E_y^+, H_x^+)分量。通常，TEM 波的电场可以在垂直于波行进方向的平面内，沿任何方向取向，对应的磁场也在同一个平面内，方

向则由式（7.39a）确定。

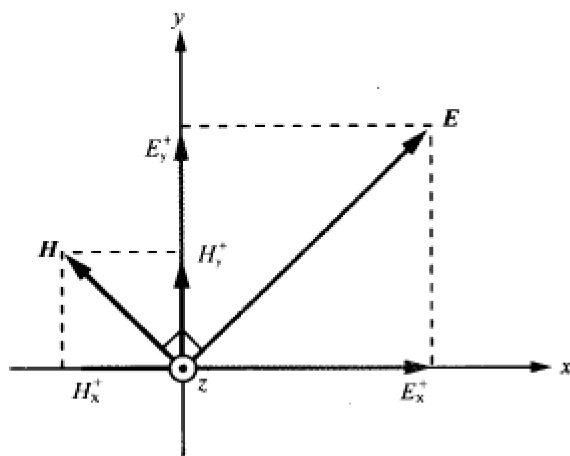


图7-6 波（$\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$）等效于两个波之和，其中一个的场为（$E_x^+,H_y^+$），另外一个的场为（$E_y^+$，$H_x^+$）两者都沿 $+z$ 方向行进

M7.3-7.4

复习题

Q7.1 什么是均匀平面波？从物理意义、数学术语表达两个方面，描述其性质。在什么条件下，可以将球面波近似作平面波处理？

Q7.2 因为 $\widetilde{\boldsymbol{E}}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{H}}$ 的波动方程具有完全相同的形式［式（7.15）和式（7.16）］，这是否意味着 $\widetilde{\boldsymbol{E}}=\widetilde{\boldsymbol{H}}$？请解释原因。

Q7.3 如果TEM波沿 $\hat{\boldsymbol{y}}$ 方向行进，其电场是否可以具有沿着 $\hat{\boldsymbol{x}}$，$\hat{\boldsymbol{y}}$ 以及 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 方向的分量？请解释原因。

练习7.1 一个10MHz的均匀平面波，在 $\mu=\mu_0,\varepsilon_r=9$ 的非磁性媒介中行进。求：（a）相速度；（b）波数；（c）媒介中的波长；（d）媒介的本征阻抗。

答案：（a）$u_p=1\times10^8\text{m/s}$；（b）$k=0.2\pi\ \text{rad/m}$；（c）$\lambda=10\text{m}$；（d）$\eta=125.67\Omega$。（参见）

练习7.2 在本征阻抗为188.5W的无损媒介中传播的均匀平面波，其电场相量为 $\widetilde{\boldsymbol{E}}=\hat{\boldsymbol{z}}10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}4\pi y}(\text{mV/m})$。确定：（a）对应的磁场相量；（b）当媒介为非磁性（$\mu=\mu_0$）时，$\boldsymbol{E}(y,t)$ 的瞬时表达式。

答案：（a）$\widetilde{\boldsymbol{H}}=\hat{\boldsymbol{x}}53\mathrm{e}^{-\mathrm{j}4\pi y}(\mu\text{A/m})$；（b）$\boldsymbol{E}(y,t)=\hat{\boldsymbol{z}}10\cos(6\pi\times10^8t-4\pi y)(\text{mV/m})$。（参见）

练习7.3 在本征阻抗为 $\eta=100\Omega$ 的媒介中传播的平面波，其磁场相量表达式为 $\widetilde{\boldsymbol{H}}=(\hat{\boldsymbol{y}}10+\hat{\boldsymbol{z}}20)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}4x}(\text{mA/m})$，求相应的电场相量。

答案：$\widetilde{\boldsymbol{E}}=(-\hat{\boldsymbol{z}}+\hat{\boldsymbol{y}}2)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}4x}(\text{V/m})$。（参见）

练习7.4 若磁场为 $\widetilde{\boldsymbol{H}}=\hat{\boldsymbol{y}}(10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3x}-20\mathrm{e}^{\mathrm{j}3x})(\text{mA/m})$，重做练习7.3。

答案：$\widetilde{\boldsymbol{E}}=-\hat{\boldsymbol{z}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3x}+2\mathrm{e}^{\mathrm{j}3x})$（V/m）。（参见）

M7.5

7.4 波的极化

均匀平面波的极化（polarization）概念，用于描述在空间的给定点处，垂直于波的传播方向的平面上，$\boldsymbol{E}$ 矢量的顶点随时间变化的轨迹与形状。在最一般的情况下，$\boldsymbol{E}$ 的轨迹是椭圆，相应的波称椭圆极化的（elliptically polarized）。在某些条件下，椭圆会退化为圆或一段直线，此时的极化状态（polarization state）分别称圆形的（circular）或线性的（linear）。

正如第 7.3 节所述，沿 z 方向传播的平面波，其电场、磁场的 z 分量都为 0。因此，电场相量 $\widetilde{\boldsymbol{E}}(z)$ 可以包含一个 x 分量 $\widetilde{E}_x(z)$ 和一个 y 分量 $\widetilde{E}_y(z)$，即

269

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(z)=\hat{\boldsymbol{x}}\widetilde{E}_x(z)+\hat{\boldsymbol{y}}\widetilde{E}_y(z),\tag{7.46}$$

其中

$$\widetilde{E}_x(z)=E_{x0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz},\tag{7.47a}$$

$$\widetilde{E}_y(z)=E_{y0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz},\tag{7.47b}$$

这里 E_{x0}、E_{y0} 分别是 $\widetilde{E}_x(z)$ 和 $\widetilde{E}_y(z)$ 的复振幅。为简单起见，上标的“+”被省略了，$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$ 中的负号，足以表明波是沿着 $+z$ 轴方向行进的。

E_{x0}、E_{y0} 这两个振幅通常是复数量，每个都有幅值和相角。波的相位是相对某个参考条件来定义的，例如相对 $z=0$ 以及 $t=0$，或任何其他的 z、t 组合。波的极化情况取决于 E_{y0} 相对 E_{x0} 的相位，而不是取决于 E_{x0}、E_{y0} 的绝对相位。因此，为了方便，选择 E_{x0} 的相位作参考（即赋予 E_{x0} 零度的相角），然后并记 E_{y0} 相对 E_{x0} 的相位为 δ。因此，δ 是 $\widetilde{\boldsymbol{E}}$ 的 y 分量与 x 分量间的相位差。相应地，定义 E_{x0}、E_{y0} 如下：

$$E_{x0}=a_x,\tag{7.48a}$$

$$E_{y0}=a_y\mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta},\tag{7.48b}$$

其中，$a_x=|E_{x0}|$，$a_y=|E_{y0}|$ 分别是 E_{x0}、E_{y0} 的幅值。基于 a_x、a_y 的定义，二者不可以取负值。将式（7.48a）、式（7.48b）代入式（7.47a）、式（7.47b），得到总的电场相量为

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(z)=(\hat{\boldsymbol{x}}a_x+\hat{\boldsymbol{y}}a_y\mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz},\tag{7.49}$$

对应的瞬时场表达式为

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\mathfrak{Re}[\widetilde{\boldsymbol{E}}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\hat{\boldsymbol{x}}a_x\cos(\omega t-kz)+\hat{\boldsymbol{y}}a_y\cos(\omega t-kz+\delta)\tag{7.50}$$

当谈论电磁波的特征时，人们最感兴趣的两个特性是电场的强度和方向。$\boldsymbol{E}(z,t)$ 的强度由其模 $|\boldsymbol{E}(z,t)|$ 给定，即

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{E}(z,t)|&=[E_x^2(z,t)+E_y^2(z,t)]^{1/2}\\&=[a_x^2\cos^2(\omega t-kz)+a_y^2\cos^2(\omega t-kz+\delta)]^{1/2}\end{aligned}\tag{7.51}$$

电场 $\boldsymbol{E}(z,t)$ 具有沿 x 和 y 两个方向的分量。在特定的位置 z，$\boldsymbol{E}(z,t)$ 的方向由过点 z 的 x-y 平面上的倾角 ψ 确定。ψ 相对 $\boldsymbol{E}(z,t)$ 的零相位参考分量进行定义，在目前的情

况下，即相对 x 分量定义，有

$$\psi(z,t) \triangleq \tan^{-1}\left(\frac{E_y(z,t)}{E_x(z,t)}\right) \tag{7.52}$$

在一般情况下，$\boldsymbol{E}(z,t)$ 的强度和方向都是 z 和 t 的函数。接下来将分析一些特殊情况。

7.4.1　线极化波

沿 z 方向行进的电磁波，其极化状态可以通过 $\boldsymbol{E}(z,t)$ 的顶点在垂直于传播方向的平面上随时间变化的轨迹来确定。为了方便又不失一般性，通常选择 $z=0$ 平面。如果 $E_x(z,t)$ 和 $E_y(z,t)$ 为同相的（$\delta=0$）或反相的（out of phase, $\delta=\pi$），则该电磁波称为线极化的（linearly polarized）。这是因为，对于给定的 z 值，譬如 $z=0$, $\boldsymbol{E}(0,t)$ 的顶点在 x-y 平面上的轨迹是一条直线。在 $z=0,\delta=0$ 或 π 时，式（7.50）简化为

$$\boldsymbol{E}(0,t) = (\hat{\boldsymbol{x}}a_x + \hat{\boldsymbol{y}}a_y)\cos\omega t \quad (\text{同相}), \tag{7.53a}$$

$$\boldsymbol{E}(0,t) = (\hat{\boldsymbol{x}}a_x - \hat{\boldsymbol{y}}a_y)\cos\omega t \quad (\text{反相}), \tag{7.53b}$$

下面考虑反相的情况。在 $\omega t=0$ 时，$\boldsymbol{E}(0,0)=\hat{\boldsymbol{x}}a_x-\hat{\boldsymbol{y}}a_y$，这意味着 $\boldsymbol{E}$ 从图 7-7 中的 x-y 平面的原点延伸到第四象限中的点 $(a_x,-a_y)$。随着 t 的增加，$\boldsymbol{E}(0,t)$ 的模的大小按余弦规律变化

270

$$|\boldsymbol{E}(0,t)| = [a_x^2 + a_y^2]^{1/2}\cos\omega t, \tag{7.54a}$$

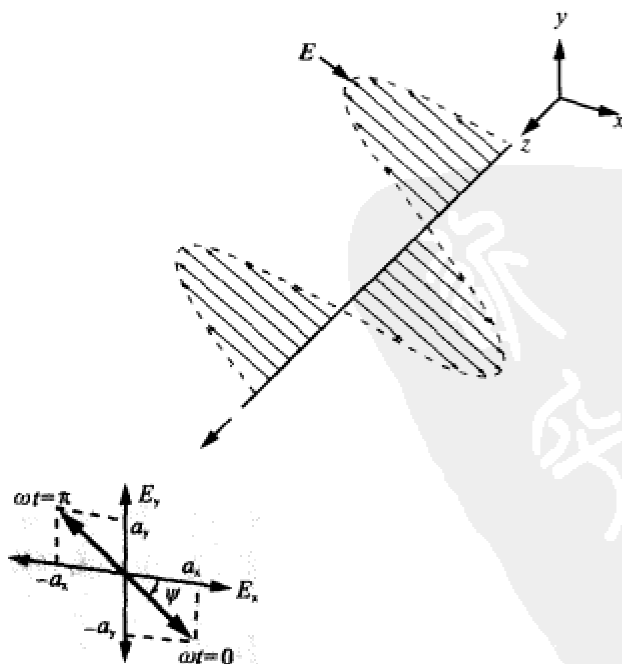


图 7-7　沿 $+z$ 轴方向（垂直纸面向外）行进的线极化波

根据式（7.52）的定义，倾角应该为

$$\psi=\tan^{-1}\left(\frac{-a_y}{a_x}\right) \quad (\text{反相}), \tag{7.54b}$$

它与 z 和 t 都没有关系。所以，代表 $\boldsymbol{E}(0,t)$ 的矢量的长度，在 $\omega t=\pi/2$ 时减小到零，然后进入 x-y 平面的第二象限开始反向增加，幅值在 $\omega t=\pi$ 时增加到 $[a_x^2+a_y^2]^{1/2}$。由于 ψ 独立于 z 和 t，因此 $\boldsymbol{E}(z,t)$ 保持在与 x 轴呈 ψ 角的直线方向上。

如果 $a_y=0,\psi=0°$ 或 $180°$，则波成为 x 极化的，如果 $a_x=0,\psi=90°$ 或 $-90°$，则波成为 y 极化的。

7.4.2 圆极化波

现在考虑 $\widetilde{\boldsymbol{E}}(z)$ 的 x 分量、y 分量幅值相等，且相位差为 $\delta=\pm\pi/2$ 的特殊情况。由于下面显而易见的原因，当 $\delta=\pi/2$ 时，称*左旋圆*（left-hand circular）极化波；而当 $\delta=-\pi/2$ 时，称*右旋圆*（right-hand circular）极化波。

左旋圆（LHC）极化波

因为 $a_x=a_y=a$，$\delta=\pi/2$，故式（7.49）、式（7.50）变为

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(z)=(\hat{\boldsymbol{x}}a+\hat{\boldsymbol{y}}ae^{j\pi/2})e^{-jkz}=a(\hat{\boldsymbol{x}}+j\hat{\boldsymbol{y}})e^{-jkz}, \tag{7.55a}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(z,t)&=\Re e[\widetilde{\boldsymbol{E}}(z)e^{j\omega t}]\\&=\hat{\boldsymbol{x}}a\cos(\omega t-kz)+\hat{\boldsymbol{y}}a\cos(\omega t-kz+\pi/2)\\&=\hat{\boldsymbol{x}}a\cos(\omega t-kz)-\hat{\boldsymbol{y}}a\sin(\omega t-kz)\end{aligned} \tag{7.55b}$$

相应的模和倾角为

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{E}(z,t)|&=[E_x^2(z,t)+E_y^2(z,t)]^{1/2}\\&=[a^2\cos^2(\omega t-kz)+a^2\sin^2(\omega t-kz)]^{1/2}=a,\end{aligned} \tag{7.56a}$$

$$\psi(z,t)=\tan^{-1}\left[\frac{E_y(z,t)}{E_x(z,t)}\right]=\tan^{-1}\left[\frac{-a\sin(\omega t-kz)}{a\cos(\omega t-kz)}\right]=-(\omega t-kz) \tag{7.56b}$$

可见，在这种情况下，$\boldsymbol{E}$ 的模与变量 z、t 无关，而 ψ 则与这两个变量都有关系。这种函数依存关系，正好与线极化的情况相反。 271

在固定的位置 z，譬如 $z=0$ 处，由式(7.56b)可得 $\psi=-\omega t$，其中的负号意味着，随着时间的增加，倾角减小。正如图 7-8a 所示，$\boldsymbol{E}(t)$ 的顶点轨迹为 x-y 平面中的一个圆，它随时间沿顺时针方向旋转（当迎着波观察时）。这种波称为*左旋圆极化的*（left-hand circularly polarized），因为当左手大拇指沿着波的传播方向时（此处为 z 方向），其余四指指向 $\boldsymbol{E}$ 旋转的方向。

右旋圆（RHC）极化波

因为 $a_x=a_y=a,\delta=-\pi/2$，所以有

$$|\boldsymbol{E}(z,t)|=a,\quad \psi=(\omega t-kz) \tag{7.57}$$

在 $z=0$ 处，$\boldsymbol{E}$ 随 t 变化的轨迹如图 7-8b 所示。对于右旋圆形极化，当右手大拇指沿着传播方向时，右手其余四指指向 $\boldsymbol{E}$ 旋转的方向。图 7-9 描绘了螺旋形天线辐射右旋圆形极化波的情况。需要注意的是，极化的（左右）手型定义，是在固定位置 z 处、

垂直于传播方向的平面上，**E** 随时间旋转方向的变化，这同时间 t 固定，**E** 随着距离 z 变化的旋转方向是相反的。

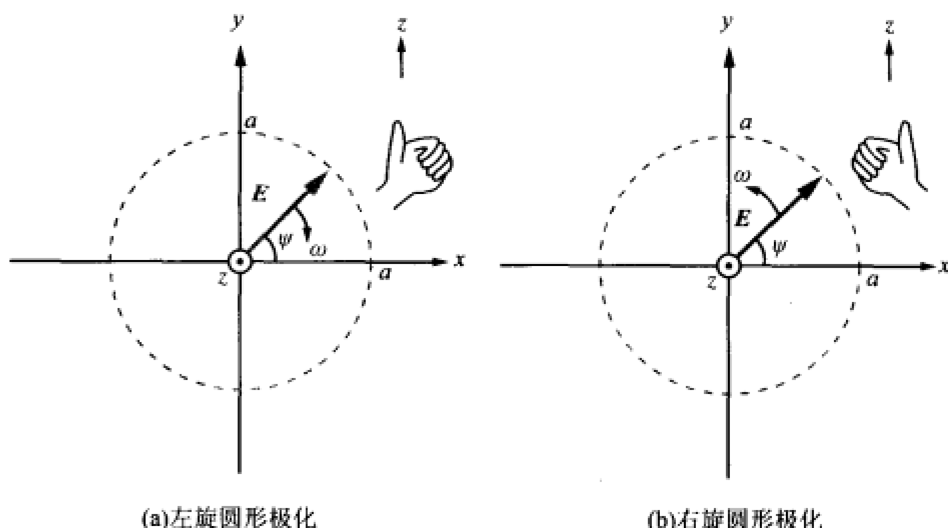


图 7-8　沿 $+z$ 轴方向（垂直纸面向外）行进的圆极化平面波

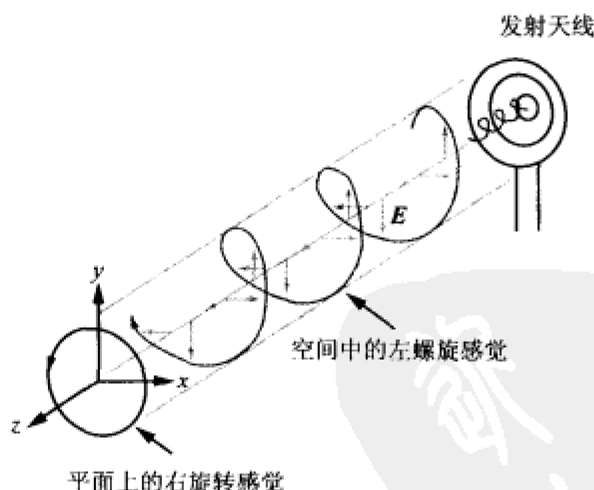


图 7-9　螺旋形天线辐射的右旋圆极化波

例 7-2　RHC 极化波

272

一个 RHC 极化波，电场模值为 3mV/m，在 $\varepsilon=4\varepsilon_0, \mu=\mu_0, \sigma=0$ 的电介媒介中沿 $+y$ 方向行进。如果波的频率为 100MHz，求 $\boldsymbol{E}(y,t)$ 和 $\boldsymbol{H}(y,t)$ 的表达式。

解答：因为波沿 $+y$ 方向行进，所以其场分量只能沿 x 和 z 方向。$\boldsymbol{E}(y,t)$ 的旋转情况如图 7-10 所示，其中 $\hat{\boldsymbol{y}}$ 垂直纸面往外。参照图 7-8b 所示的 RHC 极化波可知，选取 $\widetilde{\boldsymbol{E}}(y)$ 的 z 分量的相角为零，则 x 分量的相位移为 $\delta=-\pi/2$。两个分量的幅值都为 $a=3\text{mV/m}$。因此

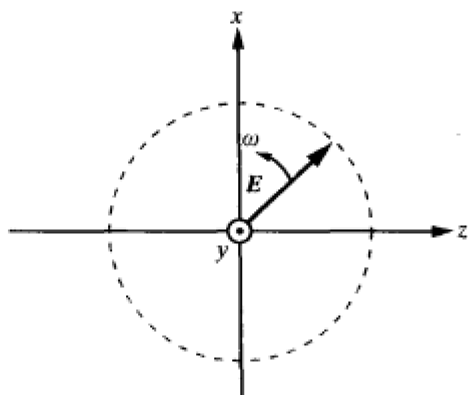


图 7-10 例 7-2 的右旋圆极化波

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(y)=\hat{\boldsymbol{x}}\widetilde{E}_x+\hat{\boldsymbol{z}}\widetilde{E}_z=\hat{\boldsymbol{x}}a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}ky}+\hat{\boldsymbol{z}}a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}ky}=(-\hat{\boldsymbol{x}}\mathrm{j}+\hat{\boldsymbol{z}})3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}ky}\quad(\mathrm{mV/m}),$$

应用式（7.39a）得：

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}(y)=\frac{1}{\eta}\hat{\boldsymbol{y}}\times\widetilde{\boldsymbol{E}}(y)=\frac{1}{\eta}\hat{\boldsymbol{y}}\times(-\hat{\boldsymbol{x}}\mathrm{j}+\hat{\boldsymbol{z}})3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}ky}=\frac{3}{\eta}(\hat{\boldsymbol{z}}\mathrm{j}+\hat{\boldsymbol{x}})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}ky}\quad(\mathrm{mA/m})$$

因为 $\omega=2\pi f=2\pi\times10^8\,\mathrm{rad/s}$，所以波数 k 为

$$k=\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_r}}{c}=\frac{2\pi\times10^8\sqrt{4}}{3\times10^8}=\frac{4}{3}\pi\quad(\mathrm{rad/m}),$$

本征阻抗 η 为

$$\eta=\frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}\approx\frac{120\pi}{\sqrt{4}}=60\pi\quad(\Omega)$$

因此，$\boldsymbol{E}(y,t)$ 和 $\boldsymbol{H}(y,t)$ 的瞬时值函数为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(y,t)&=\mathfrak{Re}[\widetilde{\boldsymbol{E}}(y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathfrak{Re}[(-\hat{\boldsymbol{x}}\mathrm{j}+\hat{\boldsymbol{z}})3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}ky}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]\\&=3[\hat{\boldsymbol{x}}\sin(\omega t-ky)+\hat{\boldsymbol{z}}\cos(\omega t-ky)]\quad(\mathrm{mV/m}),\\\boldsymbol{H}(y,t)&=\mathfrak{Re}[\widetilde{\boldsymbol{H}}(y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathfrak{Re}\left[\frac{3}{\eta}(\hat{\boldsymbol{z}}\mathrm{j}+\hat{\boldsymbol{x}})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}ky}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]\\&=\frac{1}{20\pi}[\hat{\boldsymbol{x}}\cos(\omega t-ky)-\hat{\boldsymbol{z}}\sin(\omega t-ky)]\quad(\mathrm{mA/m}),\end{aligned}$$

其中 $\omega=2\pi\times10^8(\mathrm{rad/s})$，$k=4\pi/3(\mathrm{rad/m})$。 ■

7.4.3 椭圆极化波

在最一般的情况下，$a_x\neq0$、$a_y\neq0$、$\delta\neq0$，$\boldsymbol{E}$ 的顶点轨迹为 x-y 平面上的椭圆，相应的波称为**椭圆极化波**。椭圆的形状以及极化的手型（左、右旋）取决于比值 a_y/a_x 以及极化相位差 δ。

图 7-11 所示的极化椭圆，其长轴为 a_ξ，沿着 ξ 方向，短轴为 a_η，沿着 η 方向。**旋转角**（rotation angle）γ 定义为椭圆长轴与某个参考方向之间的夹角。此处选取参考方位为 x 轴，γ 被限制在 $-\pi/2\leqslant\gamma\leqslant\pi/2$ 的范围里。椭圆的形状及手型由下式中的**椭圆角**（ellipticity angle）χ 确定 273



图 7-11　当波沿 z 轴方向（垂直纸面向外）行进时，在 x-y 平面上的极化椭圆

$$\tan\chi = \pm\frac{a_\eta}{a_\xi} = \pm\frac{1}{R}, \tag{7.58}$$

其中“+”对应左旋，“-”对应右旋。χ 的变化范围为 $-\pi/4 \leq \chi \leq \pi/4$。物理量 $R = a_\xi / a_\eta$ 称极化椭圆的轴比（axial ratio），其值在 1（对应圆极化）到无穷大（对应线极化）之间变化。极化相关的角度 γ、χ 与波的参数 a_x、a_y、δ 之间的关系[1]为

$$\tan 2\gamma = (\tan 2\psi_0)\cos\delta \quad (-\pi/2 \leq \gamma \leq \pi/2), \tag{7.59a}$$

$$\sin 2\chi = (\sin 2\psi_0)\sin\delta \quad (-\pi/4 \leq \chi \leq \pi/4), \tag{7.59b}$$

其中 ψ_0 为辅助角，定义如下

$$\tan\psi_0 = \frac{a_y}{a_x} \quad \left(0 \leq \psi_0 \leq \frac{\pi}{2}\right) \tag{7.60}$$

图 7-12 给出了不同的角度(γ,χ)组合下，极化椭圆的示意图。当 $\chi = \pm 45°$时，椭圆退化为圆，当 $\chi = 0$ 时，则退化为直线。正的 χ 对应着 $\sin\delta > 0$，相应的波左旋，而负的 χ 则对应着 $\sin\delta < 0$，相应的波右旋。

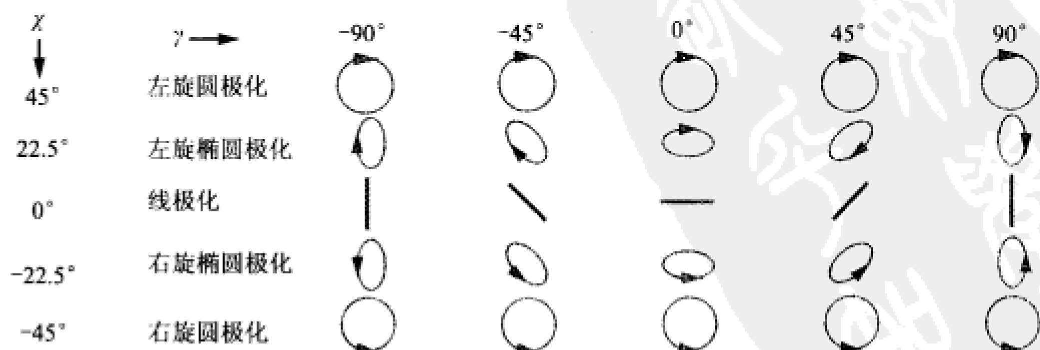


图 7-12　对于垂直纸面往外行进的电磁波，在不同的极化角度(γ,χ)组合下，极化状态的示意图

1. 摘自 M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, New York: Macmillan, 1965, 原书 p. 27。

根据定义，a_x、a_y的幅值是非负的，因此，比值a_x/a_y可以在0到无穷大之间变化（其中0对应x极化的线极化，无穷大则对应y极化的线极化）。所以，角ψ_0的范围为$0\leqslant\psi_0\leqslant 90°$。应用式（7.59a），可以得到$\gamma$的两个可能解答，二者都在$-\pi/2$到$\pi/2$的定义范围之内。正确的$\gamma$选择，应该遵从以下准则：

$$\text{若}\cos\delta>0，\text{则}\gamma>0，$$
$$\text{若}\cos\delta<0，\text{则}\gamma<0。$$

概括起来就是，旋转角γ的符号，与$\cos\delta$的符号相同；椭圆角χ的符号，与$\sin\delta$的符号相同。

例7-3 极化状态

一个平面波具有以下的电场，试确定其极化状态：

$$\mathbf{E}(z,t)=\hat{\mathbf{x}}\,3\cos(\omega t-kz+30°)-\hat{\mathbf{y}}\,4\sin(\omega t-kz+45°)\quad(\text{mV/m})$$

解答：先将第二项转换为余弦函数形式：

$$\mathbf{E}=\hat{\mathbf{x}}\,3\cos(\omega t-kz+30°)-\hat{\mathbf{y}}\,4\cos(\omega t-kz+45°-90°)$$
$$=\hat{\mathbf{x}}\,3\cos(\omega t-kz+30°)-\hat{\mathbf{y}}\,4\cos(\omega t-kz-45°)$$

274

对应的场相量$\widetilde{\mathbf{E}}(z)$为

$$\widetilde{\mathbf{E}}(z)=\hat{\mathbf{x}}\,3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\mathrm{e}^{\mathrm{j}30°}-\hat{\mathbf{y}}\,4\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}45°}$$
$$=\hat{\mathbf{x}}\,3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\mathrm{e}^{\mathrm{j}30°}+\hat{\mathbf{y}}\,4\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}45°}\mathrm{e}^{\mathrm{j}180°}$$
$$=\hat{\mathbf{x}}\,3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\mathrm{e}^{\mathrm{j}30°}+\hat{\mathbf{y}}\,4\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\mathrm{e}^{\mathrm{j}135°},$$

其中用$\mathrm{e}^{\mathrm{j}180°}$代替了第二项中的负号，以使两项的幅值都为正，从而可以利用7.4.3节中的定义。根据$\widetilde{\mathbf{E}}(z)$的表达式，x、y分量的相角分别为$\delta_x=30°$、$\delta_y=135°$，相位差为$\delta=\delta_y-\delta_x=135°-30°=105°$。辅助角$\psi_0$为

$$\psi_0=\tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)=53.1°$$

根据式（7.59a），

$$\tan 2\gamma=(\tan 2\psi_0)\cos\delta=\tan 106.2°\cos 105°=0.89,$$

由此可以得到两个γ值，分别是$\gamma=20.8°$和$\gamma=-69.2°$。因为$\cos\delta<0$，所以正确的γ值应该为$-69.2°$。根据式（7.59b），有

$$\sin 2\chi=(\sin 2\psi_0)\sin\delta=\sin 106.2°\ \sin 105°=0.93\quad\text{即}\quad\chi=34.0°$$

χ的幅值表明，该电磁波是椭圆极化的；χ的符号为正，表明该电磁波是左旋的。■

275

复习题

Q7.4 一个椭圆极化波，具有幅值a_x、a_y，以及相位差δ。如果a_x、a_y都非零，为使极化状态退化为线极化，δ应该为多少？

Q7.5 下面的两种描述，哪个是RHC极化波的定义？

(a) 一个入射到观察者的电磁波，对观察者而言，如果其电场在垂直于传播方向的一个固定平面上，作为时间的函数，逆时针旋转，则是RCH极化波；

(b) 一个入射到观察者的电磁波，对观察者而言，如果其电场在一个固定的时刻，作

为行进距离的函数，逆时针旋转，则是 RCH 极化波。

练习 7.5 一个平面波的电场为

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\hat{\boldsymbol{x}}3\cos(\omega t-kz)+\hat{\boldsymbol{y}}4\cos(\omega t-kz)\quad(\text{V/m})$$

试确定：(a) 极化状态；(b) $\boldsymbol{E}$ 的模值；(c) 倾角。

答案：(a) 线极化；(b) $|\boldsymbol{E}|=5\cos(\omega t-kz)(\text{V/m})$；(c) $\psi_0=53.1°$。（参见）

练习 7.6 如果一个 TEM 波的电场相量为 $\widetilde{\boldsymbol{E}}=(\hat{\boldsymbol{y}}-\hat{\boldsymbol{z}}\text{j})\text{e}^{-\text{j}kx}$，确定极化状态。

答案：RHC 极化。（参见）

 **D7.1-7.5**

7.5 有损媒介中平面波的传播

为了分析波在导电媒介中的传播，回到式（7.15）的波动方程

$$\nabla^2\widetilde{\boldsymbol{E}}-\gamma^2\widetilde{\boldsymbol{E}}=0,\tag{7.61}$$

其中

$$\gamma^2=-\omega^2\mu\varepsilon_c=-\omega^2\mu(\varepsilon'-\text{j}\varepsilon''),\tag{7.62}$$

其中 $\varepsilon'=\varepsilon,\varepsilon''=\sigma/\omega$。因为 γ 为复数，故可表示为

$$\gamma=\alpha+\text{j}\beta,\tag{7.63}$$

其中 α 是媒介的衰减常数（attenuation constant），β 是媒介的相位常数（phase constant）。在式（7.62）中，用（$\alpha+\text{j}\beta$）代替 γ，可得

$$(\alpha+\text{j}\beta)^2=(\alpha^2-\beta^2)+\text{j}2\alpha\beta=-\omega^2\mu\varepsilon'+\text{j}\omega^2\mu\varepsilon''\tag{7.64}$$

根据复代数运算的规则，一个方程两端的实部、虚部都应该对应相等，因此

$$\alpha^2-\beta^2=-\omega^2\mu\varepsilon',\tag{7.65a}$$

$$2\alpha\beta=\omega^2\mu\varepsilon''\tag{7.65b}$$

求解以上两个方程，得 α、β 为

$$\alpha=\omega\left\{\frac{\mu\varepsilon'}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2}-1\right]\right\}^{1/2}\quad(\text{Np/m}),\tag{7.66a}$$

$$\beta=\omega\left\{\frac{\mu\varepsilon'}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2}+1\right]\right\}^{1/2}\quad(\text{rad/m})\tag{7.66b}$$

对于电场为 $\widetilde{\boldsymbol{E}}=\hat{\boldsymbol{x}}\widetilde{E}_x(z)$、沿 $+z$ 轴方向行进的均匀平面波，式（7.61）的波动方程退化为

$$\frac{\text{d}^2\widetilde{E}_x(z)}{\text{d}z^2}-\gamma^2\widetilde{E}_x(z)=0\tag{7.67}$$

求解该波动方程得

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(z)=\hat{\boldsymbol{x}}\widetilde{E}_x(z)=\hat{\boldsymbol{x}}E_{x0}\text{e}^{-\gamma z}=\hat{\boldsymbol{x}}E_{x0}\text{e}^{-\alpha z}\text{e}^{-\text{j}\beta z}\tag{7.68}$$

相应的磁场 $\widetilde{\boldsymbol{H}}$ 可以通过以下几种方式之一得到：（1）应用式（7.2b），即 $\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{E}}=-\text{j}\omega\mu\widetilde{\boldsymbol{H}}$；（2）应用式（7.39a），即 $\widetilde{\boldsymbol{H}}=(\hat{\boldsymbol{k}}\times\widetilde{\boldsymbol{E}})/\eta_c$，其中 η_c 为有损媒介的本征阻抗（intrinsic impedance of lossy medium）；（3）仿照无损的情况。无论其中哪个方法，都可以得到以下结果

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}(z)=\hat{\boldsymbol{y}}\widetilde{H}_y(z)=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\widetilde{E}_x(z)}{\eta_c}=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{E_{x0}}{\eta_c}\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z},\tag{7.69}$$

其中

$$\eta_c=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}\left(1-\mathrm{j}\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^{-1/2}\quad(\Omega)\tag{7.70}$$

通过早前的分析知道，对于不导电的媒介，$\boldsymbol{E}(z,t)$ 和 $\boldsymbol{H}(z,t)$ 是同相位的，但在导电媒介中，由于 η_c 为复数，因此两个场不再同相位（例 7-4 将对此予以证明）。

根据式（7.68），$\widetilde{E}_x(z)$ 的幅值为

$$|\widetilde{E}_x(z)|=|E_{x0}\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}|=|E_{x0}|\mathrm{e}^{-\alpha z},\tag{7.71}$$

它以衰减常数 α 随着 z 按指数规律减小。因为 $\widetilde{H}_y=\widetilde{E}_x/\eta_c$，所以，$\widetilde{H}_y$ 的幅值也以 $\mathrm{e}^{-\alpha z}$ 的规律衰减。由于媒介导电的原因，衰减过程使得电磁波携带的部分能量转换成了热能。如图 7-13 所示，当波经过一段距离 $z=\delta_s$

$$\delta_s=\frac{1}{\alpha}\quad(\mathrm{m}),\tag{7.72}$$

波的幅值减小为 $z=0$ 处的 $\mathrm{e}^{-1}\approx0.37$ 倍。距离 δ_s 称媒介的*趋肤深度*（skin depth），它表征一个电磁波穿透导电媒介的能力。对于理想电介质，$\sigma=0$，因此有 $\alpha=0,\delta_s=\infty$。所以，在自由空间中，平面波可以传播到无穷远处，而不会出现幅值的减小。另一个极端是，如果媒介是理想导体，即 $\sigma=\infty$，则根据式（7.66a）有 $\varepsilon''=\sigma/\omega$，所以，$\alpha=\infty,\delta_s=0$。在同轴电缆中，如果使外导体的厚度等于几个趋肤深度，则既可以防止电缆中的能量泄漏到外部，也可以屏蔽外部的电磁波能量透入电缆。

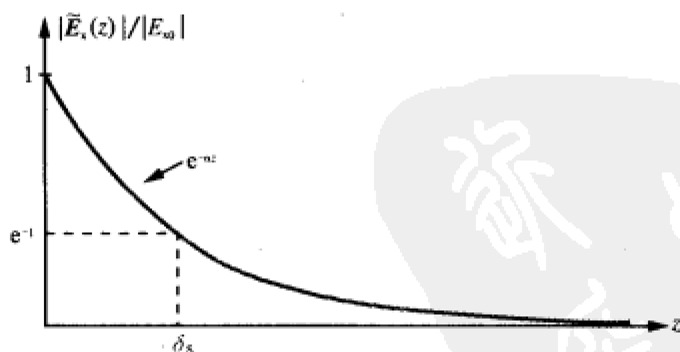


图 7-13 $\widetilde{E}_x(z)$ 随距离 z 的衰减。趋肤深度 δ_s 为 $|\widetilde{E}_x(z)|/|E_{x0}|=\mathrm{e}^{-1}$ 时的 z 值，即 $z=\delta_s=1/\alpha$

 **D7.6-7.8**

式（7.66a）、式（7.66b）、式（7.70）给定的 α、β、η_c 表达式，对于任何线性、各向同性、且均质的媒介都成立。如果媒介为理想电介质（$\sigma=0$），则这些表达式退化为无损的情况（7.3 节），即 $\alpha=0,\beta=k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon},\eta_c=\eta$。对于有损媒介，比值 $\varepsilon''/\varepsilon'$

$=\sigma/\omega\varepsilon$ 出现在上述全部三个表达式中，它在确定有损媒介的耗损程度上具有重要作

277 用。当 $\varepsilon''/\varepsilon'\ll 1$ 时，媒介称低耗电介质（low-loss dielectric），而当 $\varepsilon''/\varepsilon'\gg 1$ 时，则媒介为良导体（good conductor）。在实际应用中，如果媒介的 $\varepsilon''/\varepsilon'<10^{-2}$，则可当作低耗电介质，如果 $\varepsilon''/\varepsilon'>10^{2}$，则当作良导体，而当 $10^{-2}\leqslant\varepsilon''/\varepsilon'\leqslant 10^{2}$ 时，则当作准导体（quasi-conductor）。

7.5.1 低耗电介质

根据式（7.62），γ 的一般表达式为

$$\gamma=\mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}\left(1-\mathrm{j}\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^{1/2} \tag{7.73}$$

对于任何量 $|x|\ll 1$，函数 $(1-x)^{1/2}$ 可以用其二项式级数的前两项来近似，即 $(1-x)^{1/2}\approx 1-x/2$。对于低耗电介质，由于 $\varepsilon''/\varepsilon'\ll 1$，令 $x=\mathrm{j}\varepsilon''/\varepsilon'$，应用上述近似于式（7.73）可得

$$\gamma\cong\mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}\left(1-\mathrm{j}\frac{\varepsilon''}{2\varepsilon'}\right) \tag{7.74}$$

式（7.74）的实部和虚部分别为

$$\alpha\cong\frac{\omega\varepsilon''}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}=\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\quad(\mathrm{Np/m}), \tag{7.75a}$$

$$\beta\cong\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\quad(\mathrm{rad/m}) \tag{7.75b}$$

可见，上面 β 的表达式就同无损媒介的波数 k 的表达式相同。应用二项式近似 $(1-x)^{-1/2}\approx 1+x/2$ 于式（7.70），可得

$$\eta_c\cong\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}\left(1+\mathrm{j}\frac{\varepsilon''}{2\varepsilon'}\right)=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1+\mathrm{j}\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\right) \tag{7.76a}$$

实际上，只要 $\varepsilon''/\varepsilon'=\sigma/\omega\varepsilon<1/100$，$\alpha$、$\beta$、$\eta_c$ 的上述表达式即可使用，在这种情况下，式（7.76a）的第二项可以忽略，即

$$\eta_c\cong\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \tag{7.76b}$$

这同式（7.31）给出的无损情况下的表达式相同。

7.5.2 良导体

现在分析良导体，即 $\varepsilon''/\varepsilon'>100$ 的情况。在这个条件下，式（7.66a）、式（7.66b）和式（7.70）可近似为

$$\alpha\cong\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon''}{2}}=\omega\sqrt{\frac{\mu\sigma}{2\omega}}=\sqrt{\pi f\mu\sigma}\quad(\mathrm{Np/m}), \tag{7.77a}$$

$$\beta=\alpha\cong\sqrt{\pi f\mu\sigma}\quad(\mathrm{rad/m}), \tag{7.77b}$$

$$\eta_c\cong\sqrt{\mathrm{j}\frac{\mu}{\varepsilon''}}=(1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\pi f\mu}{\sigma}}=(1+\mathrm{j})\frac{\alpha}{\sigma}\quad(\Omega) \tag{7.77c}$$

在式（7.77c）中，利用了式（1.53）的关系，即 $\sqrt{\mathrm{j}}=(1+\mathrm{j})/\sqrt{2}$。对于理想导体，

$\sigma=\infty$，由上述表达式可得 $\alpha=\beta=\infty$，$\eta_c=0$。理想导体等效于短路。

为了便于引用，表 7-1 列出了在不同类型的媒介中，各种传播参数的表达式。

表 7-1 不同类型媒介的 α、β、η_c、u_p 及 λ 的表达式

	任何媒介	无损媒介 ($\sigma=0$)	低耗媒介 ($\varepsilon''/\varepsilon'\ll1$)	良导体 ($\varepsilon''/\varepsilon'\gg1$)	单 位
$\alpha=$	$\omega\left[\frac{\mu\varepsilon'}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2}-1\right]\right]^{1/2}$	0	$\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$	$\sqrt{\pi f\mu\sigma}$	Np/m
$\beta=$	$\omega\left[\frac{\mu\varepsilon'}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2}+1\right]\right]^{1/2}$	$\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$	$\sqrt{\pi f\mu\sigma}$	rad/m
$\eta_c=$	$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}\left(1-j\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^{-1/2}$	$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$	$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$	$(1+j)\frac{\alpha}{\sigma}$	Ω
$u_p=$	ω/β	$1/\sqrt{\mu\varepsilon}$	$1/\sqrt{\mu\varepsilon}$	$\sqrt{4\pi f/\mu\sigma}$	m/s
$\lambda=$	$2\pi/\beta=u_p/f$	u_p/f	u_p/f	u_p/f	m

注：$\varepsilon'=\varepsilon$；$\varepsilon''=\sigma/\omega$；在自由空间中，$\varepsilon=\varepsilon_0$，$\mu=\mu_0$；实际上，当 $\varepsilon''/\varepsilon'=\sigma/\omega\varepsilon<0.01$ 时，则当作低耗媒介，当 $\varepsilon''/\varepsilon'>100$ 时，则当作良导体媒介。

例 7-4 海水中的平面波

以 x-y 平面表示海水表明，z 轴朝下，$z=0$ 表示海水表面的点，一个均匀平面波沿 $+z$ 轴行进到海水中。海水的构造参数为 $\varepsilon_r=80$，$\mu_r=1$，$\sigma=4\text{S/m}$。已知在 $z=0$ 处的磁场为 $\boldsymbol{H}(0,t)=\hat{\boldsymbol{y}}100\cos(2\pi\times10^3t+15°)(\text{mA/m})$。(a) 求 $\boldsymbol{E}(z,t)$ 和 $\boldsymbol{H}(z,t)$ 的表达式；(b) 某处 $\boldsymbol{E}$ 的幅值为 $z=0$ 处的 1%，求该处的深度。

解答：(a) 因为 $\boldsymbol{H}$ 沿着 $\hat{\boldsymbol{y}}$ 方向，传播方向为 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 方向，所以 $\boldsymbol{E}$ 必然沿着 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 方向。因此，相量场的一般表达式为

$$\tilde{\boldsymbol{E}}(z)=\hat{\boldsymbol{x}}E_{x0}e^{-\alpha z}e^{-j\beta z},\tag{7.78a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{H}}(z)=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{E_{x0}}{\eta_c}e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}\tag{7.78b}$$

278

为了确定海水的 α、β、及 η_c，先计算 $\varepsilon''/\varepsilon'$ 的比值。根据 $\boldsymbol{H}(0,t)$ 中余弦函数的自变量可知 $\omega=2\pi\times10^3(\text{rad/s})$，因此 $f=1\text{kHz}$。所以

$$\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}=\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}=\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_r\varepsilon_0}=\frac{4}{2\pi\times10^3\times80\times(10^{-9}/36\pi)}=9\times10^5$$

因为 $\varepsilon''/\varepsilon'\gg1$，故海水在 1kHz 时为良导体。所以可以应用表 7-1 中良导体的表达式

$$\alpha=\sqrt{\pi f\mu\sigma}=\sqrt{\pi\times10^3\times4\pi\times10^{-7}\times4}=0.126\quad(\text{Np/m}),\tag{7.79a}$$

$$\beta=\alpha=0.126\quad(\text{rad/m}),\tag{7.79b}$$

$$\eta_c=(1+j)\frac{\alpha}{\sigma}=(\sqrt{2}e^{j\pi/4})\frac{0.126}{4}=0.044e^{j\pi/4}\quad(\Omega)\tag{7.79c}$$

由于未给定电场幅值 E_{x0} 的任何明确信息，所以应假定其为复数，即 $E_{x0}=|E_{x0}|e^{j\phi_0}$。这样，就可以写出波的瞬态电场和磁场：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(z,t)&=\mathfrak{Re}[\hat{\boldsymbol{x}}|E_{x0}|e^{j\phi_0}e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}e^{j\omega t}]\\&=\hat{\boldsymbol{x}}|E_{x0}|e^{-0.126z}\cos(2\pi\times10^3t-0.126z+\phi_0)\quad(\text{V/m}),\end{aligned}\tag{7.80a}$$

279

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(z,t)&=\mathfrak{Re}\left[\hat{\boldsymbol{y}}\frac{|E_{x0}|e^{j\phi_0}}{0.044e^{j\pi/4}}e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}e^{j\omega t}\right]\\&=\hat{\boldsymbol{y}}22.5|E_{x0}|e^{-0.126z}\cos(2\pi\times10^3t-0.126z+\phi_0-45°)\quad(\text{A/m})\end{aligned}\tag{7.80b}$$

在 $z=0$ 处，

$$\boldsymbol{H}(0,t)=\hat{\boldsymbol{y}}22.5|E_{x0}|\cos(2\pi\times10^3t+\phi_0-45°)\quad(\text{A/m})\tag{7.81}$$

比较式（7.81）与题目中给出的陈述

$$\boldsymbol{H}(0,t)=\hat{\boldsymbol{y}}100\cos(2\pi\times10^3t+15°)\quad(\text{mA/m}),$$

可推得

$$22.5|E_{x0}|=100\times10^{-3}$$

即

$$|E_{x0}|=4.44\quad(\text{mV/m}),$$

及

$$\phi_0-45°=15°\quad\text{即}\quad\phi_0=60°$$

因此，$\boldsymbol{E}(z,t)$ 和 $\boldsymbol{H}(z,t)$ 的最终表达式为

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\hat{\boldsymbol{x}}4.44e^{-0.126z}\cos(2\pi\times10^3t-0.126z+60°)\quad(\text{mV/m}),\tag{7.82a}$$

$$\boldsymbol{H}(z,t)=\hat{\boldsymbol{y}}100e^{-0.126z}\cos(2\pi\times10^3t-0.126z+15°)\quad(\text{mA/m})\tag{7.82b}$$

（b）$\boldsymbol{E}$ 的幅值减少到 $z=0$ 处的初始值之1%的深度可由下式确定

$$0.01=e^{-0.126z}\quad\text{即}\quad z=\frac{\ln(0.01)}{-0.126}=36(\text{m})$$ ■

练习7.7　铜的构造参数为 $\mu=\mu_0=4\pi\times10^{-7}\text{H/m},\varepsilon=\varepsilon_0\approx(1/36\pi)\times10^{-9}\text{F/m},\sigma=5.8\times10^7\text{S/m}$。假定这些参数是与频率无关的，问在电磁频谱（见图1-15）的什么频率范围内，铜可以看成良导体？

答案：频率范围为 $f<1.04\times10^{16}$Hz，具体包括无线电波，红外及可见光区域，以及部分紫外线区域。（参见❁）

练习7.8　在什么频率范围内，$\varepsilon_r=3,\mu_r=1,\sigma=10^{-4}$S/m 的干燥土壤可以看成低耗电介质媒介？

答案：$f>60$MHz。（参见❁）

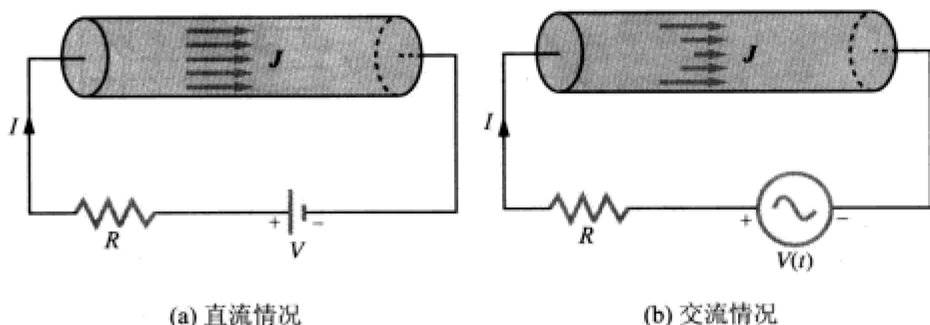
练习7.9　波在某种媒介中传播的趋肤深度为 δ_s。问当经过 $3\delta_s$ 的距离后，$\boldsymbol{E}$ 的幅值变为初始值的多少？

答案：$e^{-3}\approx0.05$ 或5%。（参见❁）

7.6　良导体中的电流

当直流电压施加到导线两端时，流经导线的电流将在导线的横截面上形成均匀的电流密度 $\boldsymbol{J}$。即导线轴线的 $\boldsymbol{J}$ 与导线外圆周的 $\boldsymbol{J}$ 具有相同的数值，如图7-14a所示。

交流情况下却不是这样。马上就会看到，在时变情况下，电流密度在导线外圆周上最大，随着距离向轴线靠近，它将按指数函数规律减少，如图 7-14b 所示。实际上，在很高的频率下，大部分电流将在导线外面的一个薄层中流通，如果导线是理想导体，则电流将全部沿着导线表面流通。 280



(a) 直流情况 (b) 交流情况

图 7-14 一根导线中的电流密度 $\boldsymbol{J}$，在直流情况下，将是沿横截面均匀分布的，如（a）所示；而在交流情况下，则 $\boldsymbol{J}$ 在导线外圆周上最大，如（b）所示

在处理横截面为圆形的导线情况之前，先考虑形状较简单的半无穷大导电块，如图 7-15a 所示。导电块的深度为无穷大，有一个平面表面与 x-y 平面重合。如果在 $z=0^-$ 处（即导体表面上方紧挨导体处），有一个 $\tilde{\boldsymbol{E}}=\hat{\boldsymbol{x}}E_0$、$\tilde{\boldsymbol{H}}=\hat{\boldsymbol{y}}E_0/\eta$ 的 x 极化电磁场，存在于导体之上方的媒介中，则在导体媒介中，将感应出一个相似的极化电磁场，并构成平面波，沿着 $+z$ 轴方向行进。根据边界条件的要求，即在任何两个毗邻媒介的交界面上，$\boldsymbol{E}$ 的切向分量必须连续，所以在 $z=0^+$ 处（即紧挨交界面的下方），波的电场为 $\tilde{\boldsymbol{E}}(0)=\hat{\boldsymbol{x}}E_0$。因此，在导体中任何深度 z 处，电磁波的场为

$$\tilde{\boldsymbol{E}}(z)=\hat{\boldsymbol{x}}E_0\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}, \tag{7.83a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{H}}(z)=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{E_0}{\eta_c}\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \tag{7.83b}$$

根据 $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$，电流沿 x 方向流动，其密度为

$$\tilde{\boldsymbol{J}}(z)=\hat{\boldsymbol{x}}\tilde{J}_x(z), \tag{7.84}$$

其中

$$\tilde{J}_x(z)=\sigma E_0\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}=J_0\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}, \tag{7.85}$$

其中 $J_0=\sigma E_0$，是表面上的电流密度幅值。根据式（7.77b），在良导体中有 $\alpha=\beta$，因此，利用式（7.72）定义的趋肤深度 $\delta_s=1/\alpha$，可将式（7.85）写成：

$$\tilde{J}_x(z)=J_0\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{j})z/\delta_s}\quad(\mathrm{A/m^2}) \tag{7.86}$$

对于在 z 方向从 0 延伸到 ∞、在 y 方向宽度为 w 的矩形长条，其中流过的电流为

$$\tilde{I}=w\int_0^\infty\tilde{J}_x(z)\mathrm{d}z=w\int_0^\infty J_0\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{j})z/\delta_s}\mathrm{d}z=\frac{J_0w\delta_s}{(1+\mathrm{j})}\quad(\mathrm{A}) \tag{7.87}$$

式（7.87）的分子，等效于一个均匀的电流密度 J_0，在表面处厚度为 δ_s、宽度为 w 的薄层中流过。因为 $\tilde{J}_x(z)$ 随 z 按指数规律减小，对于导体厚度 d 为有限值的情况， 281

只要 d 达到几个趋肤深度的厚度，实际上就可以当无穷深处理。如果 $d=3\delta_s$（用其代替式（7.87）中的∞积分上限），由此而在式（7.87）右端引起的误差小于5%，如果取 $d=5\delta_s$ 的话，则误差将小于1%。

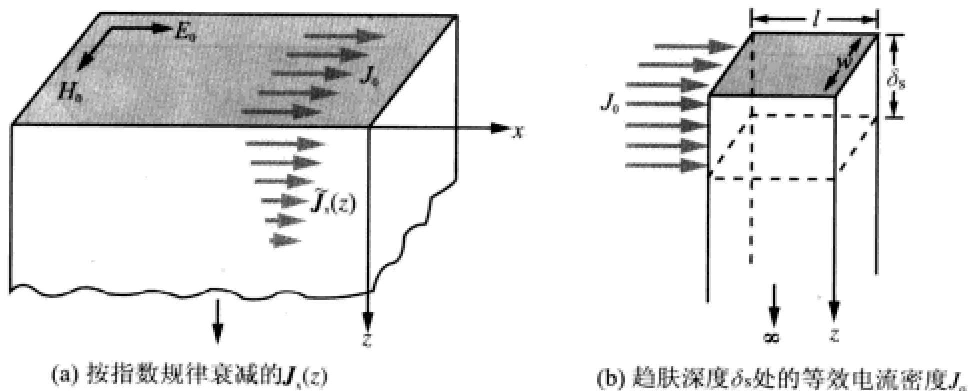


图7-15　在导体块中，电流密度 $\tilde{J}_s(z)$ 随 z 指数衰减。流经（a）所示 $z=0$ 到 $z=\infty$ 之间、宽度为 w 的区域上的总电流，等效于（b）所示在深度为 δ_s 的区域上，流过的均匀电流密度 J_0

在图7-15b中，在长度为 l 的表面上，引起的电压降为

$$\tilde{V}=E_0 l=\frac{J_0}{\sigma}l \tag{7.88}$$

因此，宽度为 w、长度为 l、深度为 $d=\infty$（或在现实中 $d>5\delta_s$）的薄板，其阻抗为

$$Z=\frac{\tilde{V}}{\tilde{I}}=\frac{1+\mathrm{j}}{\sigma\delta_s}\frac{l}{w}\quad(\Omega) \tag{7.89}$$

依照惯例，将 Z 表示成

$$Z=Z_s\frac{l}{w}, \tag{7.90}$$

其中 Z_s 称导体的内阻抗（internal impedance）或表面阻抗（surface impedance），定义为单位长度（$l=1\text{m}$）和单位宽度（$w=1\text{m}$）下的阻抗 Z，即

$$Z_s=\frac{1+\mathrm{j}}{\sigma\delta_s}\quad(\Omega) \tag{7.91}$$

因为 Z_s 的电抗部分为正，所以 Z_s 可以表示为

$$Z_s=R_s+\mathrm{j}\omega L_s$$

其中

$$R_s=\frac{1}{\sigma\delta_s}=\sqrt{\frac{\pi f\mu}{\sigma}}\quad(\Omega), \tag{7.92a}$$

$$L_s=\frac{1}{\omega\sigma\delta_s}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\pi f\sigma}}\quad(\text{H}), \tag{7.92b}$$

其中应用了式（7.77a）中的关系 $\delta_s=1/\alpha\approx1/\sqrt{\pi f\mu\sigma}$。当用表面电阻（surface re-

sistance）R_s表示时，宽度为 w、长度为 l 的薄板的交流电阻（ac resistance）为

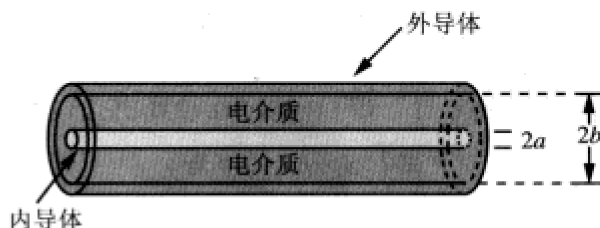
$$R = R_s \frac{l}{w} = \frac{l}{\sigma \delta_s w} \quad (\Omega) \tag{7.93}$$

从表达式上看，交流电阻 R，等效于长度为 l、截面积为 $A = \delta_S w$ 的平面导体的直流电阻。

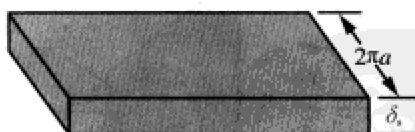
下面把从平面导体获得的结果，推广到图 7-16a 所示的同轴电缆。如果导体由 $\sigma = 5.8 \times 10^7$ S/m的铜构成，则在 1MHz 时，趋肤深度为 $\delta_S = 1/\sqrt{\pi f \mu \sigma} = 0.66$mm。由于 δ_S随 $1/\sqrt{f}$变化，因此在更高的频率下，δ_S将变得更小。对于内导体，只要其半径大于 $5\delta_S$，对于 1MHz 而言是 0.33mm，其“深度”就可以看成为半无穷大，类似的判据也适用于外导体。流经内导体的电流，集中在其外表面上，可以用厚度为 δ_S、周长为 $2\pi a$ 的薄层中流过的均匀电流来近似等效。这等效于一个宽度为 $w = 2\pi a$ 的平面导体，如图 7-16b 所示。在式（7.93）中，令 $w = 2\pi a$，并除以 l，可以得到内导体每单位长度的电阻为

282

$$R'_1 = \frac{R}{l} = \frac{R_s}{2\pi a} \quad (\Omega/\text{m}) \tag{7.94}$$



(a) 同轴电缆



(b) 等效的内导体

图 7-16 图（a）中同轴电缆的内导体，可以用图（b）中宽度为 $2\pi a$、深度为 δ_s的平面导体代替，就如同在底边上沿着内导体的长度方向将表皮割开，展开到平面上一样

与此类似，对于外导体，其中的电流集中在导体内表面紧靠绝缘媒介的一个薄层中，内外导体间的这些绝缘媒介，正是电磁场存在的地方。对于半径为 b 的外导体，每单位长度的电阻为

$$R'_2 = \frac{R_s}{2\pi b} \quad (\Omega/\text{m}) \tag{7.95}$$

每单位长度总的交流电阻为

$$R' = R'_1 + R'_2 = \frac{R_s}{2\pi}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad (\Omega/\text{m}) \tag{7.96}$$

在第2章中，曾经应用了这个表达式，以表征同轴传输线每单位长度的电阻。

复习题

Q7.6 和无损媒介相比，低耗电介质媒介的β有何特点？

Q7.7 在良导体中，$\boldsymbol{H}$的相位是超前还是滞后$\boldsymbol{E}$？具体多少度？

Q7.8 衰减意味着当波在有损媒介中传播时损失能量。损失的能量到哪里去了？

Q7.9 导电媒介是色散的还是无色散的？解释理由。

Q7.10 比较直流、交流两种情况下，导线中电流的流经情况。比较对应导线的直流电阻和交流电阻。

7.7 电磁功率密度

本节处理电磁波携带的功率流。对于具有电场$\boldsymbol{E}$和磁场$\boldsymbol{H}$的任何电磁波，坡印亭矢量（Poynting vector）$\boldsymbol{S}$定义为

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \quad (\text{W/m}^2) \tag{7.97}$$

$\boldsymbol{S}$的单位是(V/m)×(A/m)＝（W/m²），方向则沿着波的传播方向$\hat{\boldsymbol{k}}$。因此，S代表波在每单位面积上携带的功率（即功率密度），当波入射到一个向外的面法向单位矢量为$\hat{\boldsymbol{n}}$、面积为A的孔径时（图7-17），通过孔径或由孔径截取的总功率为

$$P = \int_A \boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} dA \quad (\text{W}) \tag{7.98}$$

对于传播方向$\hat{\boldsymbol{k}}$与$\hat{\boldsymbol{n}}$成θ角的均匀平面波，$P = SA\cos\theta$，其中$S = |\boldsymbol{S}|$。

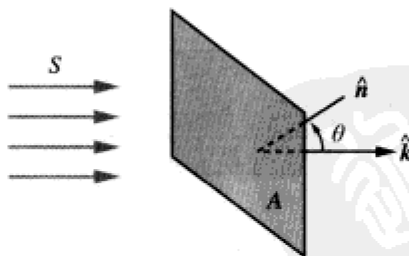


图7-17 电磁功率流过孔径

[283] 除了单位不同之外（$\boldsymbol{S}$为每单位面积的功率），矢量表达式（7.97）类似流过传输线上的瞬时功率$P(z,t)$的标量表达式

$$P(z,t) = v(z,t)\,i(z,t), \tag{7.99}$$

其中$v(z,t)$和$i(z,t)$是线路上的瞬时电压和电流。

因为$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$都是时间的函数，因此坡印亭矢量$\boldsymbol{S}$也是时间的函数。实际上，人们更感兴趣的是波的平均功率密度(average power density)$\boldsymbol{S}_{av}$，它是$\boldsymbol{S}$对时间的平均值。对于一个由时谐（正弦）源激励的传输线，在第2章已经证明，流向负载的时间平均功率可以应用式（2.87）计算

$$P_{av}(z)=\frac{1}{2}\Re\mathfrak{e}[\tilde{V}(z)\tilde{I}^{*}(z)], \tag{7.100}$$

其中 $\tilde{V}(z)$ 和 $\tilde{I}(z)$ 分别是对应 $v(z,t)$ 和 $i(z,t)$ 的相量。对于电磁波，上式所对应表达式为

$$S_{av}=\frac{1}{2}\Re\mathfrak{e}[\tilde{E}\times\tilde{H}^{*}] \quad (\mathrm{W/m^2}) \tag{7.101}$$

7.7.1 无损媒介中的平面波

沿 $+z$ 轴行进、具有任意极化方式的平面波，其电场相量的通式为

$$\tilde{E}(z)=\hat{x}\tilde{E}_x(z)+\hat{y}\tilde{E}_y(z)=(\hat{x}E_{x0}+\hat{y}E_{y0})e^{-jkz}, \tag{7.102}$$

其中，E_{x0}、E_{y0} 通常是复数量。$\tilde{E}$ 的幅值为

$$|\tilde{E}|=(\tilde{E}\cdot\tilde{E}^{*})^{1/2}=[|E_{x0}|^2+|E_{y0}|^2]^{1/2} \tag{7.103}$$

与 $\tilde{E}$ 相应的磁场相量可以由式（7.39a）得到

$$\tilde{H}(z)=\frac{1}{\eta}\hat{z}\times\tilde{E}=\frac{1}{\eta}(-\hat{x}E_{y0}+\hat{y}E_{x0})e^{-jkz} \tag{7.104}$$

可以将一般的波看成两个波之和，一个为 $(\tilde{E}_x,\tilde{H}_y)$，另一个为 $(\tilde{E}_y,\tilde{H}_x)$。将式（7.102）、式（7.104）代入式（7.101）可得

$$S_{av}=\hat{z}\frac{1}{2\eta}(|E_{x0}|^2+|E_{y0}|^2)=\hat{z}\frac{|\tilde{E}|^2}{2\eta} \quad (\mathrm{W/m^2}), \tag{7.105}$$

这表明，功率流动沿着 z 轴方向，平均功率密度等于 $(\tilde{E}_x,\tilde{H}_y)$ 波和 $(\tilde{E}_y,\tilde{H}_x)$ 波的功率密度之和。值得注意的是，因为 S_{av} 仅仅依赖 η 和 $|\tilde{E}|$，所以，具有不同极化状态的波，如果它们的电场幅值相同，则携带相同数量的平均功率。

例 7-5 太阳能

如果太阳光在地球表面的功率密度为 $1\mathrm{kW/m^2}$，求：（a）太阳辐射的总功率；（b）地球截取的总功率；（c）入射到地球表面上的功率密度的电场（假设太阳光具有单一频率）。已知地球环绕太阳的轨道半径 R_s 近似为 $1.5\times10^8\mathrm{km}$，地球的平均半径为 6380km。

解答：（a）假定太阳的辐射是各向同性的（即各方向辐射相同），则辐射的总功率等于 $S_{av}A_{sph}$，其中 A_{sph} 是半径为 R_s 的球面的面积（图 7-18a）。因此

$$P_{sun}=S_{av}(4\pi R_s^2)=1\times10^3\times4\pi\times(1.5\times10^{11})^2=2.8\times10^{26}(\mathrm{W})$$

284

（b）参考图 7-18b，由地球的横截面积 $A_e=\pi R_e^2$ 截取的功率为

$$P_{int}=S_{av}(\pi R_e^2)=1\times10^3\times\pi\times(6.38\times10^6)^2=1.28\times10^{17}(\mathrm{W})$$

（c）功率密度 S_{av} 同电场幅值 $|E_0|$ 的关系为

$$S_{av}=\frac{|E_0|^2}{2\eta_0},$$

其中，对于空气 $\eta_0=377\Omega$，因此有

$$|E_0|=\sqrt{2\eta_0S_{av}}=\sqrt{2\times377\times10^3}=870 \quad (\mathrm{V/m})$$

■

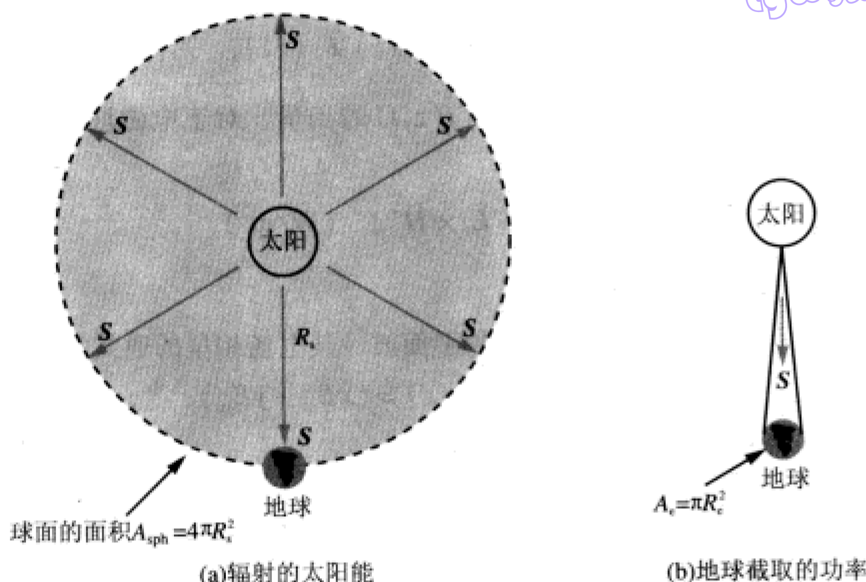


图7-18　由图（a）所示半径为R_s的球面截取的太阳辐射，以及由图（b）的地球表面截取的太阳辐射（例7-5）

7.7.2　有损媒介中的平面波

式（7.68）、式（7.69）给出了在传播常数为$\gamma=\alpha+j\beta$的有损媒介中，沿着z方向传播的x极化平面波的电场、磁场的表达式。将这些表达式扩展到一般的波，即既含有x分量，也含有y分量的波，则

$$\tilde{\boldsymbol{E}}(z)=\hat{\boldsymbol{x}}\tilde{E}_x(z)+\hat{\boldsymbol{y}}\tilde{E}_y(z)=(\hat{\boldsymbol{x}}E_{x0}+\hat{\boldsymbol{y}}E_{y0})e^{-\alpha z}e^{-j\beta z},\tag{7.106a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{H}}(z)=\frac{1}{\eta_c}(-\hat{\boldsymbol{x}}E_{y0}+\hat{\boldsymbol{y}}E_{x0})e^{-\alpha z}e^{-j\beta z},\tag{7.106b}$$

其中η_c是有损媒介的本征阻抗。应用式（7.101）可得

$$\boldsymbol{S}_{av}(z)=\frac{1}{2}\mathfrak{Re}[\tilde{\boldsymbol{E}}\times\tilde{\boldsymbol{H}}^*]=\frac{\hat{\boldsymbol{z}}(|E_{x0}|^2+|E_{y0}|^2)}{2}e^{-2\alpha z}\mathfrak{Re}\left(\frac{1}{\eta_c^*}\right)\tag{7.107}$$

将η_c表示成极坐标形式

$$\eta_c=|\eta_c|e^{j\theta_\eta},\tag{7.108}$$

则式（7.107）可重写为

$$\boldsymbol{S}_{av}(z)=\hat{\boldsymbol{z}}\frac{|E_0|^2}{2|\eta_c|}e^{-2\alpha z}\cos\theta_\eta\quad(\text{W/m}^2),\tag{7.109}$$

其中$|E_0|=[|E_{x0}|^2+|E_{y0}|^2]^{1/2}$，是$\tilde{\boldsymbol{E}}(z)$在$z=0$处的幅值。虽然$\tilde{\boldsymbol{E}}(z)$和$\tilde{\boldsymbol{H}}(z)$是随$z$按$e^{-\alpha z}$的规律衰减的，但功率密度$\boldsymbol{S}_{av}$却按$e^{-2\alpha z}$的规律减小。当波传播一段距离$z=\delta_s=1/\alpha$时，电场与磁场的幅值减小到初始值的$e^{-1}\approx37\%$，而平均功率密度则减小到其初始值的$e^{-2}\approx14\%$。

285

7.7.3 功率比的分贝尺度

功率的单位是 W。但在许多工程问题中，感兴趣的量却是功率水平之间的比值 (P_1/P_2)，例如传输线上的入射功率和反射功率的比值，比值 P_1/P_2 通常具有几个数量级的幅值变化范围。分贝（dB）尺度是按对数规律变化的，它为功率比值的表示提供了一种方便的表示，尤其在需要绘制 P_1/P_2 的数值随某个感兴趣的变量变化的图形时，更是如此。如果

$$G = \frac{P_1}{P_2}, \tag{7.110}$$

那么

$$G[\text{dB}] \triangleq 10\ \log G = 10\ \log\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \quad (\text{dB}) \tag{7.111}$$

表 7-2 给出了几个 G 值及其对应的 $G[\text{dB}]$ 值，以供对比。分贝虽然是为表示功率比定义的，有时也可以用于表示其他的量。例如，如果在 t_1 时刻，电阻 R 两端的电压为 V_1，消耗的功率为 $P_1 = V_1^2/R$，而在 t_2 时刻，电阻 R 两端的电压为 V_2，消耗的功率为 $P_2 = V_2^2/R$，则

$$G[\text{dB}] = 10\ \log\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = 10\ \log\left(\frac{V_1^2/R}{V_2^2/R}\right) = 20\ \log\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = 20\ \log(g) \triangleq g[\text{dB}], \tag{7.112}$$

这里 $g = V_1/V_2$，是电压比。需注意的是，电压（电流）比的标度系数是 20 而非 10，这可以保证 $G[\text{dB}] = g[\text{dB}]$。

表 7-2　用原始数据及用分贝数表示的功率比值

G	10^x	4	2	1	0.5	0.25	0.1	10^{-3}
G [dB]	10xdB	6dB	3dB	0dB	-3dB	-6dB	-10dB	-30dB

衰减率（attenuation rate）表示 $S_{av}(z)$ 的幅值随传播距离减小的速率，具体定义为

$$\begin{aligned} A &= 10\ \log\left[\frac{S_{av}(z)}{S_{av}(0)}\right] = 10\ \log(e^{-2\alpha z}) = -20\alpha z\ \log e \\ &= -8.68\alpha z = -\alpha[\text{dB/m}]z \quad (\text{dB}), \end{aligned} \tag{7.113}$$

其中

$$\alpha[\text{dB/m}] \triangleq 8.68\alpha[\text{Np/m}] \tag{7.114}$$

由前面的介绍可知，$S_{av}(z)$ 是直接正比于 $|E(z)|^2$ 的，因此

$$A = 10\ \log\left[\frac{|E(z)|^2}{|E(0)|^2}\right] = 20\ \log\left[\frac{|E(z)|}{|E(0)|}\right] \quad (\text{dB}) \tag{7.115}$$

例 7-6　潜艇天线接收的功率

水下 200m 深处的潜艇，利用线状天线接收 1kHz 的信号。对于例 7-4 的电磁波，试确定入射到潜艇天线的功率密度。

286

解答：根据例7-4，$|E_0| = |E_{x0}| = 4.44(\text{mV/m})$，$\alpha = 0.126(\text{Np/m})$，$\eta_c = 0.044\angle 45°$ (Ω)。应用式（7.109）得

$$S_{av}(z) = \hat{z}\frac{|E_0|^2}{2|\eta_c|}e^{-2\alpha z}\cos\theta_\eta$$

$$= \hat{z}\frac{(4.44\times10^{-3})^2}{2\times0.044}e^{-0.252z}\cos 45° = \hat{z}0.16e^{-0.252z} \quad (\text{mW/m}^2)$$

在 $z = 200\text{m}$ 处，入射波功率密度为

$$S_{av} = \hat{z}(0.16\times10^{-3}e^{-0.252\times200}) = 2.1\times10^{-26} \quad (\text{W/m}^2)$$

■

练习7.10 将以下功率比 G 的实际值，转换为分贝值：（a）2.3；（b）4×10^3；（c）3×10^{-2}。

答案：（a）3.6dB；（b）36dB；（c）−15.2dB。（参见）

练习7.11 求对应下列功率比 G（分贝值）的电压比 g（实际值）：（a）23dB；（b）−14dB；（c）−3.6dB。

答案：（a）14.13；（b）0.2；（c）0.66。（参见）

本章要点

- 由源辐射的球面波，在远离源的地方，成为近似的均匀平面波。
- 横电磁（TEM）波的电场和磁场是互相垂直的，并且两者都垂直于波行进的方向。
- TEM 波的电场与磁场幅值通过媒介的本征阻抗相联系。
- 波的极化概念用于描述空间给定点处的 **E** 矢量顶点随时间变化的轨迹及形状。极化状态包括线极化、圆极化及椭圆极化，是由电场矢量的两个垂直分量的幅值之比及二者间的相位差决定的。
- 根据比值 $\varepsilon''/\varepsilon' = \sigma/\omega\varepsilon$ 的不同，媒介分为无损媒介、低耗媒介、准导体，以及良导体。
- 在直流情况下，流经导线的电流均匀分布在其横截面上，与此不同，在交流情况下，大部分电流集中在导线的外圆周上。
- 行进在无界媒介中的平面电磁波，所载的功率密度类似传输线上的电压/电流波所载的功率。

重要术语汇总

请说明下列术语的意义，或给出定义：

导向媒介	无界媒介	球面波	均匀平面波
复介电常数 ε_c	波数 k	TEM 波	本征阻抗 η
波的极化	椭圆极化	圆极化	线极化
LHC 极化、RHC 极化	衰减常数 α	相位常数 β	趋肤深度 δ_s
低耗电介	准导体	良导体	内阻抗或表面阻抗
表面电阻 R_s	直流电阻和交流电阻	坡印亭矢量 **S**	平均功率密度 S_{av}

习题

7.3　无损媒介中平面波的传播

7.1* 在某非磁性材料中传播的电磁波，其磁场为

$$\mathbf{H} = \hat{z}\, 50\cos(10^9 t - 5y) \quad (\text{mA/m})$$

求：

(a) 波传播的方向；

(b) 相速度；

(c) 材料的波长；

(d) 材料的相对介电常数；

(e) 电场相量。

7.2 无耗非磁性媒介的相对介电常数为 $\varepsilon_r = 9$，其中有沿 $+y$ 轴方向行进的一个正弦平面波，频率为 1GHz，电场是 x 极化的，峰值为 3V/m，在 $t = 0$ 时刻、$y = 2$m 处，强度为 2V/m，试写出电场和磁场的通式。

7.3 一个均匀平面波的电场相量为 $\widetilde{\mathbf{E}} = \hat{y}\, 10\, e^{j0.2z}$ (V/m)，如果波的相速度为 1.5×10^8 m/s，相对磁导率 $\mu_r = 2.4$，求：

(a) 波长；

(b) 波的频率 f；

(c) 媒介的相对介电常数；

(d) 磁场 $\mathbf{H}(z, t)$。

7.4 在非磁性媒介中传播的平面波，其电场为

$$\mathbf{E} = [\hat{y}\, 3\sin(2\pi \times 10^7 t - 0.4\pi x) + \hat{z}\, 4\cos(2\pi \times 10^7 t - 0.4\pi x)] \quad (\text{V/m})$$

确定：

(a) 波长；

(b) ε_r；

(c) $\mathbf{H}$。

7.5* 在空气中，从源辐射的电磁波入射到土壤表面，其中部分波透射到了土壤媒介中。如果该波在空气中的波长为 30cm，在土壤中的波长为 15cm，土壤的相对介电常数为多少？假定土壤为耗损极低的媒介。

7.6 在 $\varepsilon_r = 2.56$ 的无耗、非磁性、电介质媒介中，传播着一个平面电磁波，其电场为

$$\mathbf{E} = \hat{y}\, 20\cos(8\pi \times 10^9 t - kz) \quad (\text{V/m})$$

确定：

(a) f, u_p, λ, k 及 η；

(b) 磁场 $\mathbf{H}$。

7.4　波的极化

7.7* 一个 RHC 极化波，模值为 2(V/m)，在自由空间沿 $-z$ 方向行进。假定波长为

---

* 答案见附录 D。

解答见 CD-ROM。

6cm，写出波的电场矢量表达式。

7.8 一个波的电场为

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\hat{\boldsymbol{x}}a_x\cos(\omega t-kz)+\hat{\boldsymbol{y}}a_y\cos(\omega t-kz+\delta)$$

辨识波的极化状态，确定其极化角（γ，χ），并对以下各种情况，绘出$\boldsymbol{E}(0,t)$的轨迹：

(a) $a_x=3\text{V/m},a_y=4\text{V/m},\delta=0$;

(b) $a_x=3\text{V/m},a_y=4\text{V/m},\delta=180°$;

(c) $a_x=3\text{V/m},a_y=3\text{V/m},\delta=45°$;

288

(d) $a_x=3\text{V/m},a_y=4\text{V/m},\delta=-135°$。

7.9* 在自由空间传播的均匀平面波，其电场为

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}=(\hat{\boldsymbol{x}}+\text{j}\hat{\boldsymbol{y}})20\text{e}^{-\text{j}\pi z/6}\quad(\text{V/m})$$

确定当$t=0.5$和10ns时，在$z=0$处电场强度的模及方向。

7.10 $\widetilde{\boldsymbol{E}}=\hat{\boldsymbol{x}}a_x\text{e}^{-\text{j}kz}$形式的线极化平面波，可以表示为一个幅值为$a_R$的RHC极化波，和一个幅值为$a_L$的LHC极化波之和。求用$a_x$表示的$a_R$、$a_L$表达式，以证明上述观点。

7.11* 一个椭圆极化平面波，其电场为

$$\boldsymbol{E}(z,t)=[-\hat{\boldsymbol{x}}\,10\sin(\omega t-kz-60°)+\hat{\boldsymbol{y}}\,20\cos(\omega t-kz)]\quad(\text{V/m})$$

确定：

(a) 极化角（γ，χ）；

(b) 旋转方向。

7.12 比较下面各对平面波的极化状态：

(a) 波1：$\boldsymbol{E}_1=\hat{\boldsymbol{x}}\,2\cos(\omega t-kz)+\hat{\boldsymbol{y}}\,2\sin(\omega t-kz)$;

波2：$\boldsymbol{E}_2=\hat{\boldsymbol{x}}\,2\cos(\omega t+kz)+\hat{\boldsymbol{y}}\,2\sin(\omega t+kz)$;

(b) 波1：$\boldsymbol{E}_1=\hat{\boldsymbol{x}}\,2\cos(\omega t-kz)-\hat{\boldsymbol{y}}\,2\sin(\omega t-kz)$;

波2：$\boldsymbol{E}_2=\hat{\boldsymbol{x}}\,2\cos(\omega t+kz)-\hat{\boldsymbol{y}}\,2\sin(\omega t+kz)$。

7.13 一个平面波的电场为

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\hat{\boldsymbol{x}}\sin(\omega t+kz)+\hat{\boldsymbol{y}}\,2\cos(\omega t+kz)$$

绘出其$\boldsymbol{E}(0,t)$的轨迹，并由所绘制图形确定极化状态。

7.5 有损媒介中平面波的传播

7.14 对于下述每种参数组合，确定媒介到底是低耗媒介、准导体，还是良导体，并计算α、β、λ、u_p以及η_c：

(a) 10GHz下的玻璃：$\mu_r=1$，$\varepsilon_r=5$，$\sigma=10^{-12}\text{S/m}$；

(b) 100MHz下的动物组织：$\mu_r=1$，$\varepsilon_r=12$，$\sigma=0.3\text{S/m}$；

(c) 1kHz下的木头：$\mu_r=1$，$\varepsilon_r=3$，$\sigma=10^{-4}\text{S/m}$。

7.15 干燥土壤的$\varepsilon_r=5$，$\mu_r=1$，$\sigma=10^{-4}\text{S/m}$。在以下各种频率下，确定干燥土壤到底应该看成良导体、准导体，还是低耗电介质，并计算α、β、λ、u_p以及η_c：

(a) 60Hz;

(b) 1kHz;

(c) 1MHz;

(d) 1GHz。

7.16 一个媒介，其$\varepsilon_r=9$，$\mu_r=1$，$\sigma=0.1\text{S/m}$。在100MHz下，确定磁场超前电场的相角。

7.17　采用对数－对数坐标，在 1kHz 到 10GHz 频率范围内，绘制海水的趋肤深度 δ_S 随频率变化的曲线。海水的构造参数为 $\mu_r=1$，$\varepsilon_r=80$，$\sigma=4\text{S/m}$。

7.18　忽略空气－土壤交界上的反射，如果 2GHz 的入射波在潮湿土壤表面的幅值为 10V/m，问在多大深度下，幅值将降低到 1mV/m？潮湿土壤的 $\mu_r=1$，$\varepsilon_r=16$，$\sigma=5\times10^{-4}\text{S/m}$。

7.19*　某非磁性导电媒介在 5GHz 时的趋肤深度为 2μm。确定媒介中的相速度。

7.20　通过在 1MHz 下测量波的衰减和反射，得到波在某媒介中的本征阻抗为 $28.1\angle45°$（Ω），趋肤深度为 5m。确定：

289

(a) 材料的电导率；

(b) 材料的波长；

(c) 相速度。

7.21*　在非磁性媒介中传播的平面波的电场为

$$\mathbf{E}=\hat{z}\,25e^{-30x}\cos(2\pi\times10^9t-40x)\quad(\text{V/m})$$

求对应的 $\mathbf{H}$ 表达式。

7.6　良导体中的电流

7.22　在非磁性、有耗、电介质媒介中，一个 300MHz 的平面波的磁场相量为

$$\tilde{\mathbf{H}}=(\hat{x}-j4\hat{z})e^{-2y}e^{-j9y}\quad(\text{A/m})$$

求电场、磁场矢量的时域表达式。

7.23*　一个矩形铜块，沿 z 轴方向的高度为 30cm。当一个波从上方入射到铜块上时，在铜块中感应出一个沿 +x 方向的电流。确定在 1kHz 时，铜块的交流电阻与直流电阻的比值。铜的相关特性参数见附录 B。

7.24　同轴电缆的内外导体半径分别为 0.5cm 和 1cm。导体由 $\varepsilon_r=1,\mu_r=1,\sigma=5.8\times10^7\text{S/m}$ 的铜构成，外导体的厚度为 0.1cm。在 10MHz 时：

(a) 在考虑流经导体的电流时，导体的厚度是否足以看成无穷厚？

(b) 确定表面电阻 R_S；

(c) 确定每单位长度电缆的交流电阻。

7.7　电磁功率密度

7.25*　空气中传播的平面电磁波的磁场为 $\mathbf{H}=\hat{x}\,25\sin(2\pi\times10^7t-ky)$（mA/m）。确定电磁波所载的平均功率密度。

7.26　波在 $\varepsilon_r=9$ 的非磁性媒介中行进，电场为

$$\mathbf{E}=[\hat{y}\,3\cos(\pi\times10^7t+kx)-\hat{z}\,2\cos(\pi\times10^7t+kx)]\quad(\text{V/m})$$

确定波行进的方向以及波所载的平均功率密度。

7.27*　水中朝下行进的均匀平面波，其电场相量为

$$\tilde{\mathbf{E}}=\hat{x}\,10e^{-0.2z}e^{-j0.2z}\quad(\text{V/m})$$

其中 $\hat{z}$ 为朝下的方向，$z=0$ 是水面。如果 $\sigma=4\text{S/m}$：

(a) 求平均功率密度表达式；

(b) 确定衰减速率；

(c) 确定功率密度降低 40dB 的深度。

7.28　椭圆极化平面波行进在 $\varepsilon_r=4$ 的无耗、非磁性媒介中，振幅为 $H_{y0}=6\text{mA/m}$、$H_{z0}=$

8mA/m。确定 y-z 平面上面积为 20m^2 的孔径中流过的平均功率。

7.29* 行进在无耗、非磁性媒介中的电磁波，电场幅值为 24.56V/m，平均功率密度为 4W/m^2。确定波的相速度。

7.30 在微波频率范围内，人体暴露的安全功率密度是 1mW/cm^2。一雷达辐射的电磁波，其电场振幅 E 随距离衰减的表达式为 $E(R)=(3000/R)$ (V/m)，其中 R 是距离，单位为 m。求不安全的区域半径。

290

7.31 考虑图 7-19 所示的假想矩形盒子。

(a) 在空气中有一平面波，其电场为：

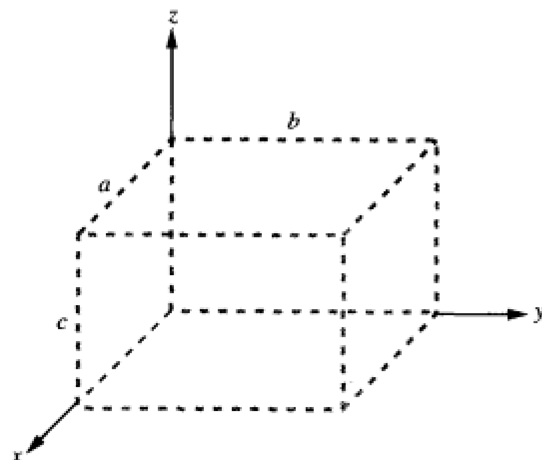


图 7-19 习题 7.31 及 7.32 的假想矩形盒子

$$\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{x}}E_0\cos(\omega t-ky) \quad (\text{V/m})$$

确定进入盒子的净功率通量 $P(t)$。

(b) 确定进入盒子的净时间平均功率。

7.32 对于在有损媒介中行进的以下电磁波，重做习题 7.31，

$$\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{x}}\,100\mathrm{e}^{-30y}\cos(2\pi\times10^9t-40y) \quad (\text{V/m})$$

$$\boldsymbol{H}=-\hat{\boldsymbol{z}}\,0.64\mathrm{e}^{-30y}\cos(2\pi\times10^9t-40y-36.85°) \quad (\text{A/m})$$

盒子的尺寸为 $a=1\text{cm}$，$b=2\text{cm}$，$c=0.5\text{cm}$。

7.33 给定波的电场为

$$\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{x}}E_0\cos(\omega t-kz)$$

计算：

(a) 时间平均电能密度

$$(w_e)_{av}=\frac{1}{T}\int_0^T w_e\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2T}\int_0^T \varepsilon E^2\,\mathrm{d}t$$

(b) 时间平均磁能密度：

$$(w_m)_{av}=\frac{1}{T}\int_0^T w_m\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2T}\int_0^T \mu H^2\,\mathrm{d}t$$

(c) 证明 $(w_e)_{av}=(w_m)_{av}$。

291

7.34 ~ 7.36 附加习题——题目及完整解答参见光盘。

第8章 波的反射与透射、几何光学

8.1 交界上的电磁波

图8-1所示的草图，示意性地绘出了信号在船只甲板上的发射器与水下潜艇上的接收器之间传播的路径。下面利用这个通信系统，对信道上电磁波所经历的过程进行分析。从发射器（图8-1中的Tx）出发，信号沿着传输线行进到天线。发射器（振荡器）的输出功率P_t与供给天线的功率之间的关系，遵从第2章的传输线方程。如果传输线是近似无损的、且与发射天线匹配得当的话，则全部的P_t将传输到天线。波所经历的下一个过程是辐射，即把通过传输线提供给天线的导波，转换成球面波往外部空间辐射。辐射过程将在第9章讲述。从点1（甲板上天线所在位置）到点2（水面上波的入射点）的信号，遵从第7章介绍的无损媒介中波的传播方程。当信号遇到空气-水的交界面时，一部分被表面反射，而另外一部分则穿过表面透射到水中。透射的部分将发生折射，波传播的方向将往法向靠近。反射与透射是本章要讲述的主要内容。从点3（水下紧挨水面的点）行进到点4（潜艇天线的位置）的电磁波，遵从第7章介绍的有损媒介中波的传播规律。最后一步牵涉到信号的侦听，即截取入射到接收天线上的电磁波，并将电磁波的能量转换为接收能P_{rec}，经一条传输线送到接收器。天线的接收特性将在第9章介绍。总之，对于图8-1所示起于发射器、止于接收器的信号传输过程，其中与电磁波相关的各个方面，本书都有相应章节予以介绍。

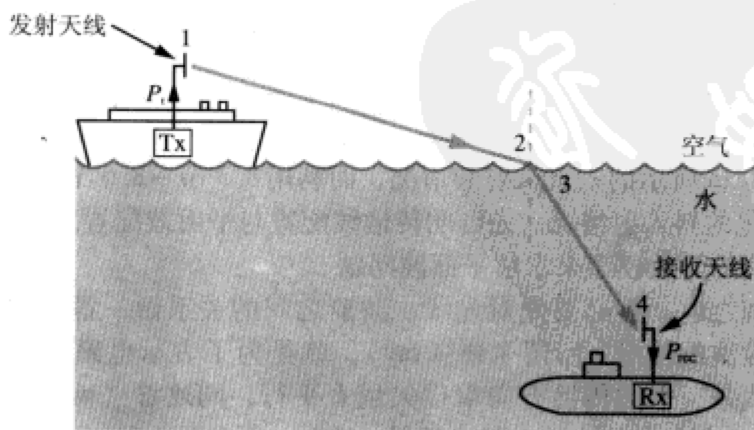


图8-1 船只甲板上的发射器（Tx）到潜艇接收器（Rx）间的信号路径

本章从分析平面交界上的平面入射波的反射与透射特性问题入手，以分析反射镜、透镜成像特性的几何光学相关小节作结。两部分之间的篇幅，则用于讨论功率关系、纤维光学等内容。

8.2　垂直入射波的反射与透射

由第 2 章可知，当沿着传输线行进的导波遇到阻抗不连续点时，例如在图8-2a中具有不同特征阻抗的两传输线的交界处，入射波部分被反射回源端，部分则穿过交界进入第二条传输线。当均匀平面波在无界（unbounded）媒介中传播而遇到交界时，也发生类似的现象。事实上，图 8-2b 所示的情况，同图 8-2a 所示的传输线情况是完全类似的。图 8-2b 中的边界条件，即入射波、反射波、透射波等的电场、磁场间的关系，同第 2 章获得的传输线上对应波的电压、电流关系是相似的。

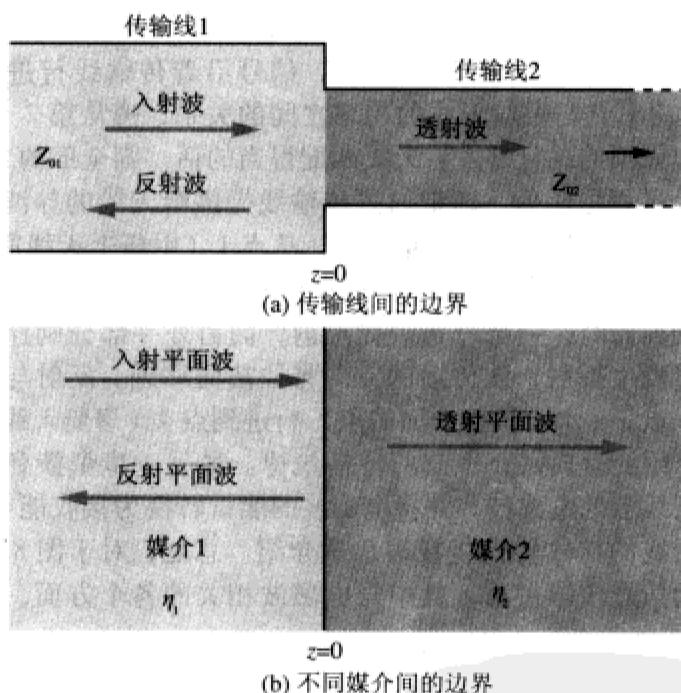
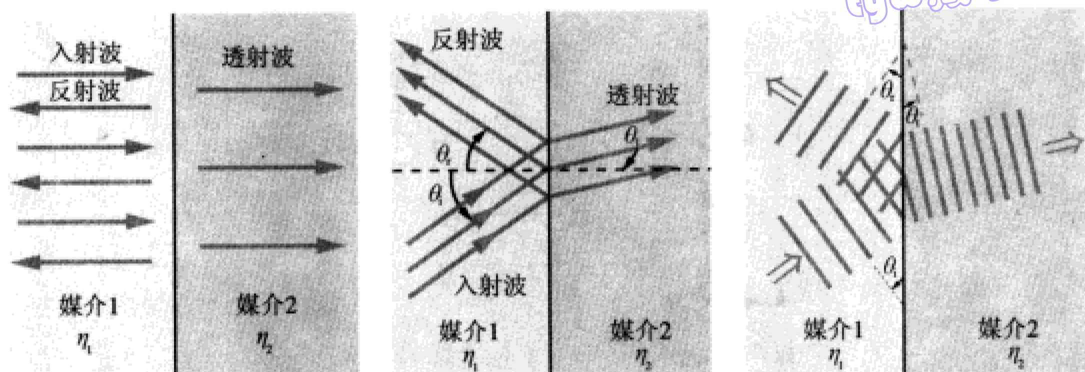


图 8-2　两段不同传输线间的不连续性，类似两种不同媒介间的不连续性

为方便起见，将平面边界的反射波、透射波的分析分成两部分来处理：在本节中，只讨论图 8-3a 所示的垂直入射的情况，而利用 8.3 节 ~ 8.5 节的篇幅，来分析图 8-3b 所示一般化的斜入射情况。先证明传输线配置与平面波配置之间的相似性基础，以便应用传输线的等效模型来求解平面波问题。

在开始处理之前，有必要先对光线、波前之间的关系做一番说明，因为二者都将用来表示电磁波的传播。所谓光线（ray），就是为了表示电磁波携带的电磁能流动方向而画的线条，它同传播方向单位矢量 $\hat{k}$ 平行，同波前（wavefront）垂直。在图 8-3b 中，用光线来表示波的入射、反射、透射，而在图 8-3c 中，则用波前来表示，这两个图是等效的。这两种表示法互为补充，光线表示方法较早用于图示，而波前表示方法则可以提供更加丰富、深入的物理信息，当用于分析不连续交界处波的传播时，可以揭示波所经历的变化。在接下来的讨论中，两种方法都将用到。



(a) 垂直入射　(b) 斜入射的光线表示法　(c) 斜入射时的波前表示法

图 8-3　垂直入射（a）与斜入射（b）时，波反射、透射的光线表示法，以及斜入射时的波前表示法（c）

8.2.1　无损媒介的交界

在图 8-4a 中，一个平面边界位于 $z=0$ 处，将两种无损、均质的电介质媒介分开。位于 $z\leqslant 0$ 区域的媒介 1，其材料参数为(ε_1,μ_1)；位于 $z\geqslant 0$ 区域的媒介 2，其材料参数为(ε_2,μ_2)。在媒介 1 中，x 极化的平面入射波，场量为$(\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}},\boldsymbol{H}^{\mathrm{i}})$，沿着 $\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{i}}=\hat{\boldsymbol{z}}$ 方向往媒介 2 行进。由于在不连续交界上的反射与透射，导致在媒介 1 中出现 $\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{r}}=-\hat{\boldsymbol{z}}$ 的反射波$(\boldsymbol{E}^{\mathrm{r}},\boldsymbol{H}^{\mathrm{r}})$，在媒介 2 中出现 $\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{t}}=\hat{\boldsymbol{z}}$ 的透射波$(\boldsymbol{E}^{\mathrm{t}},\boldsymbol{H}^{\mathrm{t}})$。基于 7.2 节、7.3 节获得的描述 TEM 波的场量公式，以上三个波可以用下述相量形式进行描述： 294

入射波

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{i}}(z)=\hat{\boldsymbol{x}}\,E_0^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1z} \tag{8.1a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{i}}(z)=\hat{\boldsymbol{z}}\times\frac{\widetilde{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{i}}(z)}{\eta_1}=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{E_0^{\mathrm{i}}}{\eta_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1z} \tag{8.1b}$$

反射波

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{r}}(z)=\hat{\boldsymbol{x}}E_0^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_1z}, \tag{8.2a}$$

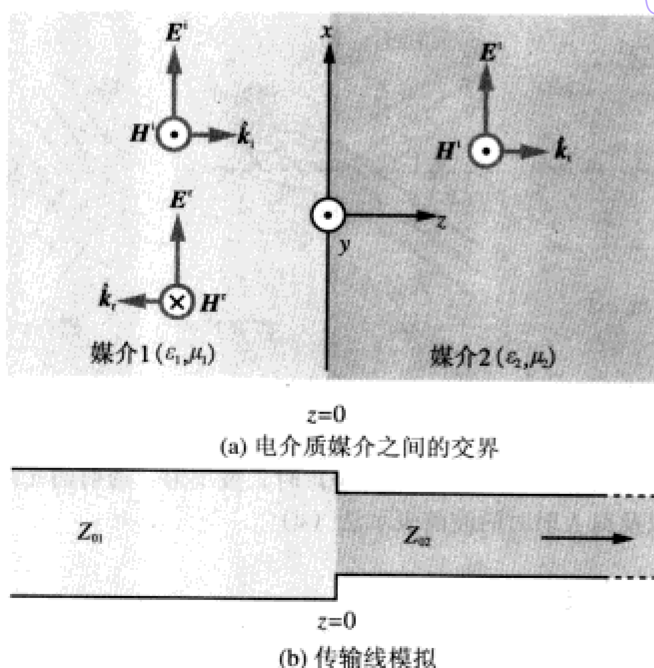
$$\widetilde{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{r}}(z)=(-\hat{\boldsymbol{z}})\times\frac{\widetilde{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{r}}(z)}{\eta_1}=-\hat{\boldsymbol{y}}\frac{E_0^{\mathrm{r}}}{\eta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_1z} \tag{8.2b}$$

透射波

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{t}}(z)=\hat{\boldsymbol{x}}\,E_0^{\mathrm{t}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2z}, \tag{8.3a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{t}}(z)=\hat{\boldsymbol{z}}\times\frac{\widetilde{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{t}}(z)}{\eta_2}=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{E_0^{\mathrm{t}}}{\eta_2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2z} \tag{8.3b}$$

物理量 E_0^{i}，E_0^{r} 和 E_0^{t} 分别表示在 $t=0$ 时刻，$z=0$ 处（两种媒介交界处）的入射波、反射波以及透射波的电场幅值。媒介 1 的波数和本征阻抗分别是 $k_1=\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}$和 $\eta_1=\sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}$，同样，对媒介 2 有 $k_2=\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$和 $\eta_2=\sqrt{\mu_2/\varepsilon_2}$。



(a) 电介质媒介之间的交界

(b) 传输线模拟

图 8-4　图（a）中由 x-y 平面分隔的两电介质媒介，可以用图（b）中的传输线来模拟

由于幅值 E_0^{i} 同产生入射波的场源相对应，因此可当成已知量。下面的任务是用 E_0^{i} 来表示 E_0^{r} 和 E_0^{t}。应用 $z=0$ 处 $\tilde{E}$、$\tilde{H}$ 的边界条件，可以完成这一任务。根据表 6-2，在邻接的两媒介交界面上，$\boldsymbol{E}$ 的切向分量总是连续的，同样，在交界面没有电流源的情况下，$\boldsymbol{H}$ 的切向分量也是连续的。对于这里讨论的垂直入射波，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都同边界相切。由于边界上既无自由电荷，也无电流存在，因此反射波、透射波的场都只有切向分量。在图 8-4a 及其对应的式(8.2a)和式(8.3a)中，随意将 $\tilde{\boldsymbol{E}}^{r}$、$\tilde{\boldsymbol{E}}^{t}$ 的方向选择为同 $\tilde{\boldsymbol{E}}^{i}$ 的方向一致，即沿着正 x 轴的方向，则它们的真正方向，即相对于所选的方向，将由幅值 E_0^{r} 和 E_0^{t} 的极性来确定。很快就会看到，这两个幅值的数量大小和极性，都是由两媒介的本征阻抗，即 η_1 和 η_2 确定的。

295

媒介 1 中的总电场 $\tilde{\boldsymbol{E}}_1(z)$ 为入射波与反射波的电场之和，$\tilde{\boldsymbol{H}}_1(z)$ 也是如此。因此

媒介 1

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_1(z)=\tilde{\boldsymbol{E}}^{i}(z)+\tilde{\boldsymbol{E}}^{r}(z)=\hat{\boldsymbol{x}}(E_0^{i}e^{-jk_1z}+E_0^{r}e^{jk_1z}),\tag{8.4a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{H}}_1(z)=\tilde{\boldsymbol{H}}^{i}(z)+\tilde{\boldsymbol{H}}^{r}(z)=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{1}{\eta_1}(E_0^{i}e^{-jk_1z}-E_0^{r}e^{jk_1z})\tag{8.4b}$$

媒介 2 中仅有透射波，因此场量为

媒介 2

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_2(z)=\tilde{\boldsymbol{E}}^{t}(z)=\hat{\boldsymbol{x}}\,E_0^{t}e^{-jk_2z},\tag{8.5a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{H}}_2(z)=\tilde{\boldsymbol{H}}^{t}(z)=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{E_0^{t}}{\eta_2}e^{-jk_2z}\tag{8.5b}$$

在交界上（$z=0$），电场、磁场的切向分量是连续的，因此

$$\widetilde{E}_1(0)=\widetilde{E}_2(0) \quad 即 \quad E_0^{i}+E_0^{r}=E_0^{t}, \tag{8.6a}$$

$$\widetilde{H}_1(0)=\widetilde{H}_2(0) \quad 即 \quad \frac{E_0^{i}}{\eta_1}-\frac{E_0^{r}}{\eta_1}=\frac{E_0^{t}}{\eta_2} \tag{8.6b}$$

同时 E_0^r、E_0^t 的解用 E^i 表示为

$$E_0^{r}=\left(\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}\right)E_0^{i}=\Gamma E_0^{i}, \tag{8.7a}$$

$$E_0^{t}=\left(\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}\right)E_0^{i}=\tau E_0^{i}, \tag{8.7b}$$

296

其中

$$\Gamma=\frac{E_0^{r}}{E_0^{i}}=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1} \quad （垂直入射）, \tag{8.8a}$$

$$\tau=\frac{E_0^{t}}{E_0^{i}}=\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1} \quad （垂直入射） \tag{8.8b}$$

参数 Γ、τ 分别称为反射系数（reflection coefficient）和透射系数（transmission coefficient）。对于无损电介质媒介，η_1、η_2 都是实数，因此 Γ、τ 也都是实数。在 8.2.4 节中将会看到，式（8.8a）、式（8.8b）给出的表达式同样也适用于导电媒介，只不过此时的 η_1、η_2 可能是复数，因此 Γ、τ 也可能是复数。利用式（8.8a）和式（8.8b），很容易证明 Γ、τ 由以下简单公式相联系

$$\tau=1+\Gamma \quad （垂直入射） \tag{8.9}$$

对于非磁性媒介，有

$$\eta_1=\frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r_1}}},$$

$$\eta_2=\frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r_2}}},$$

其中 η_0是自由空间的本征阻抗，此时式（8.8a）可以重写为

$$\Gamma=\frac{\sqrt{\varepsilon_{r_1}}-\sqrt{\varepsilon_{r_2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r_1}}+\sqrt{\varepsilon_{r_2}}} \quad （非磁性媒介） \tag{8.10}$$

8.2.2 与传输线的类比

图 8-4b 中的传输线配置，包括一根特征阻抗为 Z_{01} 的无损传输线，在 $z=0$ 处，同另外一根特征阻抗为 Z_{02}、无限长的无损传输线相连。无限长线的输入阻抗等于其特征阻抗，因此，在 $z=0$ 处，电压反射系数（从第 1 根线的首段往交界处看）为

$$\Gamma=\frac{Z_{02}-Z_{01}}{Z_{02}+Z_{01}},$$

它同式（8.8a）在形式上完全相同。为了证明平面波和传输线之间类似性的基础，将两种情况下的表达式一起列于表 8-1 中。比较两列可见，传输线的参数（$\widetilde{V}$，$\widetilde{I}$，β，Z_0）

与平面波的参数($\tilde{E}$, $\tilde{H}$, k, η)之间是一一对应的。这种对应关系使得人们可以利用第2章开发的技术，其中包括利用史密斯圆图法计算阻抗变换，来求解平面波传播的问题。

表 8-1 在无损情况下，垂直入射的平面波方程与传输线方程的类比

平面波(图 8-4a)		传输线(图 8-4b)	
$\tilde{\boldsymbol{E}}_1(z)=\hat{\boldsymbol{x}}E_0^i(e^{-jk_1z}+\Gamma e^{jk_1z})$	(8.11a)	$\tilde{V}_1(z)=V_0^+(e^{-j\beta_1z}+\Gamma e^{j\beta_1z})$	(8.11b)
$\tilde{\boldsymbol{H}}_1(z)=\hat{\boldsymbol{y}}\dfrac{E_0^i}{\eta_1}(e^{-jk_1z}-\Gamma e^{jk_1z})$	(8.12a)	$\tilde{I}_1(z)=\dfrac{V_0^+}{Z_{01}}(e^{-j\beta_1z}-\Gamma e^{j\beta_1z})$	(8.12b)
$\tilde{\boldsymbol{E}}_2(z)=\hat{\boldsymbol{x}}\tau E_0^i e^{-jk_2z}$	(8.13a)	$\tilde{V}_2(z)=\tau V_0^+ e^{-j\beta_2z}$	(8.13b)
$\tilde{\boldsymbol{H}}_2(z)=\hat{\boldsymbol{y}}\tau\dfrac{E_0^i}{\eta_2}e^{-jk_2z}$	(8.14a)	$\tilde{I}_2(z)=\tau\dfrac{V_0^+}{Z_{02}}e^{-j\beta_2z}$	(8.14b)
$\Gamma=(\eta_2-\eta_1)/(\eta_2+\eta_1)$		$\Gamma=(Z_{02}-Z_{01})/(Z_{02}+Z_{01})$	
$\tau=1+\Gamma$		$\tau=1+\Gamma$	
$k_1=\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}$, $k_2=\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$		$\beta_1=\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}$, $\beta_2=\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$	
$\eta_1=\sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}$, $\eta_2=\sqrt{\mu_2/\varepsilon_2}$		Z_{01} 和 Z_{02} 取决于传输线的参数	

M8.1-8.3
D8.1-8.3

当在一种媒介中同时存在入射波与反射波时，例如在图 8-4a 中的媒介 1 里，将产生驻波图。类比传输线的情况，媒介 1 中的驻波比（standing-wave ratio）为

$$S=\frac{|\tilde{\boldsymbol{E}}_1|_{\max}}{|\tilde{\boldsymbol{E}}_1|_{\min}}=\frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} \tag{8.15}$$

如果两媒介具有相同的阻抗($\eta_1=\eta_2$)，则 $\Gamma=0$、$S=1$；如果媒介 2 是 $\eta_2=0$ 的理想导体（等效于短路的传输线），则 $\Gamma=-1$、$S=\infty$。在媒介 1 中，电场强度振幅为最大值的点，其到交界的距离 $l_{\max}$ 的表达式，与传输线上的电压最大值点的表达式（2.56）完全相同，即

297

$$-z=l_{\max}=\frac{\theta_r+2n\pi}{2k_1}=\frac{\theta_r\lambda_1}{4\pi}+\frac{n\lambda_1}{2},\begin{cases}n=1,2,\dots, & \text{当 } \theta_r<0 \text{ 时},\\ n=0,1,2,\dots, & \text{当 } \theta_r\geqslant 0 \text{ 时},\end{cases} \tag{8.16}$$

其中，$\lambda_1=2\pi/k_1$，θ_r 是 Γ 的相角（即，$\Gamma=|\Gamma|e^{j\theta_r}$，$\theta_r$ 的变化范围为 $-\pi\leqslant\theta_r\leqslant\pi$）。相邻最大值点的间隔为 $\lambda_1/2$，最大值点同最近的最小值点的间隔为 $\lambda_1/4$。最小电场点发生在

$$l_{\min}=\begin{cases}l_{\max}+\lambda_1/4, & \text{当 } l_{\max}<\lambda_1/4 \text{ 时},\\ l_{\max}-\lambda_1/4, & \text{当 } l_{\max}\geqslant\lambda_1/4 \text{ 时}。\end{cases} \tag{8.17}$$

只要包含驻波图的媒介是无耗的或低耗的电介质，$l_{\max}$、$l_{\min}$ 的表达式就成立，而与反射媒介的性质无关。

8.2.3 无损媒介中的功率流

在图 8-4a 的媒介 1 中，同时存在入射波和反射波，二者共同产生电场 $\tilde{\boldsymbol{E}}_1(z)$ 和磁场 $\tilde{\boldsymbol{H}}_1(z)$，分别对应表 8-1 中的式（8.11a）和式（8.12a）。根据式（7.101），媒介

1 中流过的净平均功率密度为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}_{\mathrm{av}_1}(z) &= \frac{1}{2}\Re e[\widetilde{\boldsymbol{E}}_1(z)\times\widetilde{\boldsymbol{H}}_1^*(z)] \\ &= \frac{1}{2}\Re e\left[\hat{\boldsymbol{x}}E_0^{\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1z}+\Gamma\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_1z})\times\hat{\boldsymbol{y}}\frac{E_0^{\mathrm{i}*}}{\eta_1}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_1z}-\Gamma^*\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1z})\right] \\ &= \hat{\boldsymbol{z}}\frac{|E_0^{\mathrm{i}}|^2}{2\eta_1}(1-|\Gamma|^2), \end{aligned} \tag{8.18}$$

298

这同无损传输线情况下的式（2.86）是类似的。式（8.18）的第一项表示入射波的平均功率密度，而第二项（正比于 $|\Gamma|^2$）则代表反射波的平均功率密度。因此

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}_1} = \boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}^{\mathrm{i}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}^{\mathrm{r}}, \tag{8.19a}$$

其中

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}^{\mathrm{i}} = \hat{\boldsymbol{z}}\frac{|E_0^{\mathrm{i}}|^2}{2\eta_1}, \tag{8.19b}$$

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}^{\mathrm{r}} = -\hat{\boldsymbol{z}}|\Gamma|^2\frac{|E_0^{\mathrm{i}}|^2}{2\eta_1} = -|\Gamma|^2\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}^{\mathrm{i}} \tag{8.19c}$$

尽管在两种媒介都为无耗电介质的情况下，Γ 是纯实数，但我们仍将其当复数处理。这样一来，当媒介 2 为导电媒介时，式（8.19c）给出的表达式也照样成立。

在媒介 2 中，透射波的平均功率密度为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}_{\mathrm{av}_2}(z) &= \frac{1}{2}\Re e[\widetilde{\boldsymbol{E}}_2(z)\times\widetilde{\boldsymbol{H}}_2^*(z)] \\ &= \frac{1}{2}\Re e\left[\hat{\boldsymbol{x}}\tau E_0^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2z}\times\hat{\boldsymbol{y}}\tau^*\frac{E_0^{\mathrm{i}*}}{\eta_2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_2z}\right] = \hat{\boldsymbol{z}}|\tau|^2\frac{|E_0^{\mathrm{i}}|^2}{2\eta_2} \end{aligned} \tag{8.20}$$

对于两种媒介同为无损媒介的情况，以及媒介 1 为导电媒介、媒介 2 为无损媒介的情况，上式都成立。

对于无损媒介（其 Γ、τ 为实数），利用式（8.8a）和式（8.8b），很容易证明以下关系

$$\frac{\tau^2}{\eta_2} = \frac{1-\Gamma^2}{\eta_1} \quad （无损媒介）, \tag{8.21}$$

由此可得

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}_1} = \boldsymbol{S}_{\mathrm{av}_2}$$

这一结果正是功率守恒所预期的。

例 8-1 雷达天线罩的设计

一个 10GHz 的飞机雷达，其所采用的窄束扫描天线，安装在一个电介质天线罩后的万向架上，如图 8-5 所示。尽管天线罩在形状根本不是平面，但对于雷达束的窄小范围而言，可以将其近似看成平面的。如果天线罩的材料是无耗电介质，其 $\mu_r=1, \varepsilon_r=9$，试确定其厚度 d，以使天线罩对雷达波束而言为透明的（机械强度上要求 d 大于 2.3cm）。

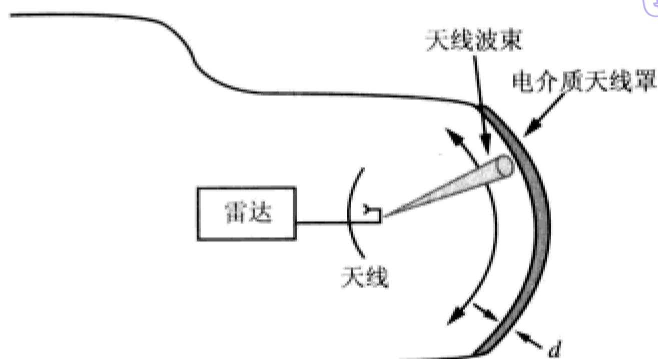


图 8-5 通过厚度为 d 的飞机天线罩往外“看”的天线波束（例 8-1）

解答：图 8-6a 以放大的比例，画出了波传播的情况。入射波近似为平面波，在本征阻抗为 η_0 的媒介 1（空气）中传播；媒介 2 为天线罩，厚度为 d，本征阻抗为 η_r；媒介 3 为半无穷大区域，本征阻抗为 η_0。图 8-6b 为等效的传输线模型，选择其 $z=0$ 处同天线罩的外表面一致，负载阻抗为 $Z_L=\eta_0$，代表半无穷大媒介的输入阻抗。 299

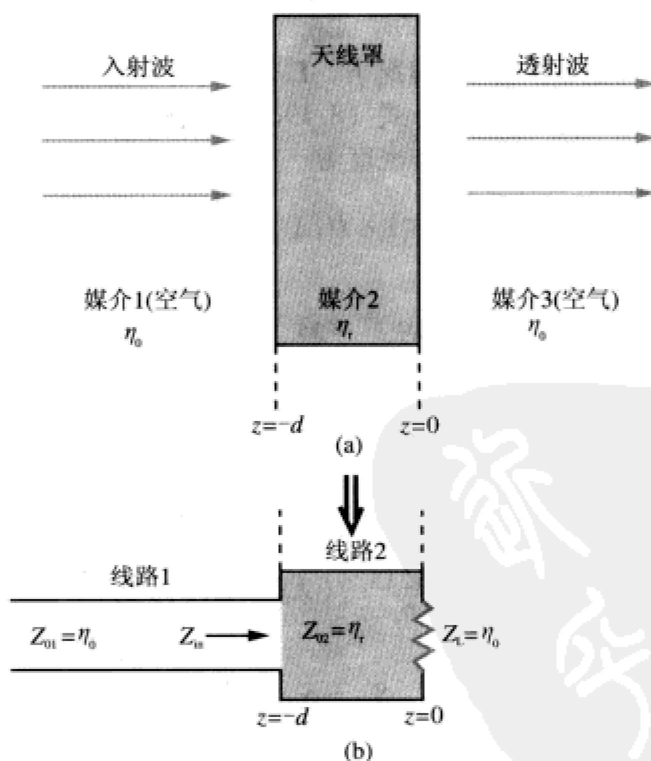


图 8-6

（a）图 8-5 中天线罩的平面片断的放大图；（b）对应的传输线等效模型（例 8-1）

对于给定的入射波，要求天线罩“表现”透明，这就是说：在 $z=-d$ 处，反射系数必须为零，因而可以将全部的入射功率透射到媒介 3 中。在图 8-6b 中，由于 $Z_L=\eta_0$，因此，若在 $z=-d$ 处让 $Z_{in}=\eta_0$，则不会发生反射。这一点可以通过选取

$d=n\lambda_2/2$来实现（见 2.7.4 节），其中 λ_2是媒介 2 中的波长，n 是一个正整数。在 10GHz 时，空气中的波长为 $\lambda_0=c/f=3\text{cm}$，在天线罩材料中

$$\lambda_2=\frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}=\frac{3\text{cm}}{3}=1(\text{cm})$$

因此，如果选取 $d=5\lambda_2/2=2.5\text{cm}$，则可以同时满足无反射以及机械强度的要求。■

例 8-2 黄光入射到玻璃表面

波长为 0.6μm 的一束黄光，入射到空气中的玻璃表面。如果表面位于 $z=0$ 的平面上，且玻璃的相对介电常数为 2.25，试确定：

（a）媒介 1（空气）中电场最大点的位置；

（b）驻波比；

（c）入射功率中，透射到玻璃中的比例。

解答：（a）先确定 η_1、η_2、Γ 的数值：

$$\eta_1=\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\approx 120\pi(\Omega),$$

$$\eta_2=\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}\approx\frac{120\pi}{\sqrt{2.25}}=80\pi(\Omega),$$

$$\Gamma=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}=\frac{80\pi-120\pi}{80\pi+120\pi}=-0.2$$

因此，$|\Gamma|=0.2$，$\theta_r=\pi$。根据式（8.16），电场幅值最大点的位置为

$$l_{\max}=\frac{\theta_r\lambda_1}{4\pi}+n\frac{\lambda_1}{2}=\frac{\lambda_1}{4}+n\frac{\lambda_1}{2}\quad(n=0,1,2,\ldots)$$

其中 $\lambda_1=0.6\mu\text{m}$。

（b）
$$S=\frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}=\frac{1+0.2}{1-0.2}=1.5$$

（c）入射功率中透射到玻璃中的部分的比例，等于透射功率密度同入射功率密度的比值，即等于式（8.20）给定的数值与 $S^{\text{i}}_{\text{av}}=|E^{\text{i}}_0|^2/2\eta_1$ 的比值 300

$$\frac{S_{\text{av}_2}}{S^{\text{i}}_{\text{av}}}=\tau^2\frac{|E^{\text{i}}_0|^2}{2\eta_2}\bigg/\left[\frac{|E^{\text{i}}_0|^2}{2\eta_1}\right]=\tau^2\frac{\eta_1}{\eta_2}$$

考虑到式（8.21），有

$$\frac{S_{\text{av}_2}}{S^{\text{i}}_{\text{av}}}=1-|\Gamma|^2=1-(0.2)^2=0.96,\text{或 }96\%。$$ ■

 M8.4

8.2.4 有损媒介的交界

在 8.2.1 节中，分析了平面波由一种无损媒介垂直入射到另外一种无损媒介的交界平面上的情况。下面将所得的表达式推广到有损媒介的情况。对于构造参数为(ε,μ,σ)的媒介，人们感兴趣的传播参数是传播常数 $\gamma=\alpha+\text{j}\beta$ 和复本征阻抗 η_c。其

中，α、β 和 η_c 的通式分别为式（7.66a）、式（7.66b）和式（7.70）；对于低耗媒介的情况，以及良导体媒介的特殊情况，它们的近似表达式则在表7-1中给出。如果媒介1具有($\varepsilon_1,\mu_1,\sigma_1$)，媒介2具有($\varepsilon_2,\mu_2,\sigma_2$)，如图8-7所示，则通过对表8-1中列出的式（8.11a）到式（8.14a）进行改造，将jk换成γ，将η换成η_c，即可得到媒介1和媒介2中的电场和磁场表达式。因此有

媒介1

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_1(z)=\hat{\boldsymbol{x}}E_0^{\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{-\gamma_1 z}+\Gamma\mathrm{e}^{\gamma_1 z}),\tag{8.22a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}_1(z)=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{E_0^{\mathrm{i}}}{\eta_{c_1}}(\mathrm{e}^{-\gamma_1 z}-\Gamma\mathrm{e}^{\gamma_1 z}),\tag{8.22b}$$

媒介2

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_2(z)=\hat{\boldsymbol{x}}\,\tau E_0^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\gamma_2 z},\tag{8.23a}$$

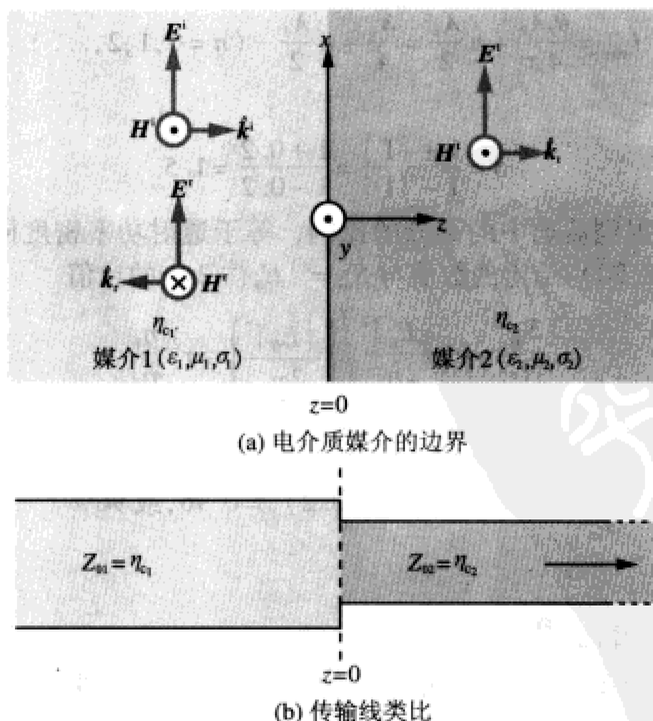
$$\widetilde{\boldsymbol{H}}_2(z)=\hat{\boldsymbol{y}}\,\tau\frac{E_0^{\mathrm{i}}}{\eta_{c_2}}\mathrm{e}^{-\gamma_2 z},\tag{8.23b}$$

其中，$\gamma_1=\alpha_1+\mathrm{j}\beta_1,\gamma_2=\alpha_2+\mathrm{j}\beta_2$，

$$\Gamma=\frac{\eta_{c_2}-\eta_{c_1}}{\eta_{c_2}+\eta_{c_1}},\tag{8.24a}$$

$$\tau=1+\Gamma=\frac{2\eta_{c_2}}{\eta_{c_2}+\eta_{c_1}}\tag{8.24b}$$

因为 η_{c_1} 和 η_{c_2} 通常是复数，所以 Γ 和 τ 也可能是复数。



(a) 电介质媒介的边界

(b) 传输线类比

图8-7　两有损媒介平面交界面上的垂直入射

例 8-3 金属表面上的垂直入射

301

一个 1GHz 的 x 极化 TEM 波，在空气中沿 $+z$ 轴方向行进，入射到位于 $z=0$ 处的 x-y 平面上的金属表面。如果入射波的电场幅值为 12mV/m，金属面由 $\mu_r=1$，$\varepsilon_r=1$，$\sigma=5.8\times10^7\text{S/m}$ 的铜构成，求空气中瞬态电场和磁场的表达式。假定金属面的厚度有好几个趋肤深度厚。

解答：在媒介 1（空气）中，$\alpha=0$，

$$\beta=k_1=\frac{\omega}{c}=\frac{2\pi\times10^9}{3\times10^8}=\frac{20\pi}{3}\quad(\text{rad/m}),$$

$$\eta_1=\eta_0=377(\Omega),\quad \lambda=\frac{2\pi}{k_1}=0.3\text{m}$$

当 $f=1\text{GHz}$ 时，铜为优质导体，因为

$$\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}=\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_r\varepsilon_0}=\frac{5.8\times10^7}{2\pi\times10^9\times(10^{-9}/36\pi)}=1\times10^9\gg1$$

由式（7.77c）可得：

$$\eta_{c_2}=(1+\text{j})\sqrt{\frac{\pi f\mu}{\sigma}}=(1+\text{j})\left[\frac{\pi\times10^9\times4\pi\times10^{-7}}{5.8\times10^7}\right]^{1/2}=8.25(1+\text{j})\quad(\text{m}\Omega)$$

相对空气的 $\eta_0=377(\Omega)$ 而言，η_{c_2} 很小，因此铜表面实际上等效于短路。所以

$$\Gamma=\frac{\eta_{c_2}-\eta_0}{\eta_{c_2}+\eta_0}\approx-1$$

对于表 8-1 中的式（8.11a）和式（8.12a），令 $\Gamma=-1$ 可得

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_1(z)=\hat{\boldsymbol{x}}E_0^{\text{i}}(\text{e}^{-\text{j}k_1z}-\text{e}^{\text{j}k_1z})=-\hat{\boldsymbol{x}}\,\text{j}2E_0^{\text{i}}\sin k_1z,\tag{8.25a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}_1(z)=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{E_0^{\text{i}}}{\eta_1}(\text{e}^{-\text{j}k_1z}+\text{e}^{\text{j}k_1z})=\hat{\boldsymbol{y}}\,2\frac{E_0^{\text{i}}}{\eta_1}\cos k_1z\tag{8.25b}$$

因为 $E_0^{\text{i}}=12\text{mV/m}$，所以，对应以上相量的瞬态场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_1(z,t)&=\mathfrak{Re}[\widetilde{\boldsymbol{E}}_1(z)\text{e}^{\text{j}\omega t}]\\&=\hat{\boldsymbol{x}}\,2E_0^{\text{i}}\sin k_1z\sin\omega t\\&=\hat{\boldsymbol{x}}\,24\sin(20\pi z/3)\sin(2\pi\times10^9t)\quad(\text{mV/m}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_1(z,t)&=\mathfrak{Re}[\widetilde{\boldsymbol{H}}_1(z)\text{e}^{\text{j}\omega t}]\\&=\hat{\boldsymbol{y}}\,2\frac{E_0^{\text{i}}}{\eta_1}\cos k_1z\cos\omega t\\&=\hat{\boldsymbol{y}}\,64\cos(20\pi z/3)\cos(2\pi\times10^9t)\quad(\mu\text{A/m})\end{aligned}$$

图 8-8 给出了在不同的 ωt 值处，$\boldsymbol{E}_1(z,t)$ 和 $\boldsymbol{E}_1(z,t)$ 的幅值在 $-z$ 轴上的图形。驻波图展现的重复周期为 $\lambda/2$，E 和 H 无论在时间上还是空间上都是正交的（相移 90°）。这种性质同短路传输线的电压、电流的驻波图完全相同。■

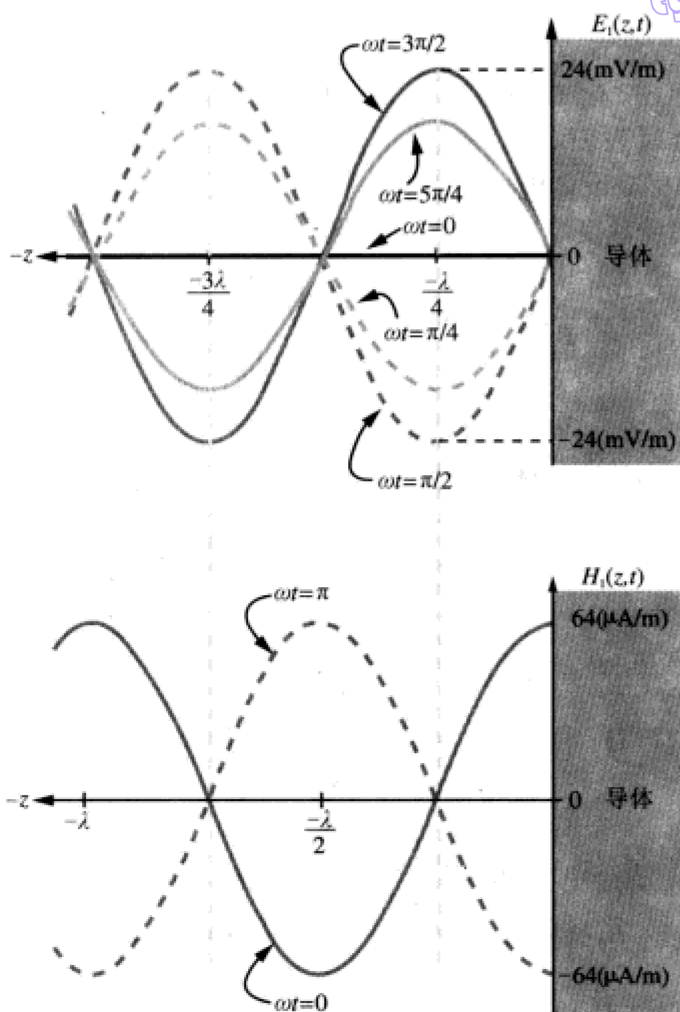


图 8-8 例 8-3 中场 $\boldsymbol{E}_1(z,t)$ 和 $\boldsymbol{H}_1(z,t)$ 的驻波图

复习题

Q8.1 在推导 Γ 和 τ 的表达式时，使用什么边界条件？

Q8.2 在例 8-1 的雷达天线罩设计中，媒介 1 中的所有入射功率最终都透射到了媒介 3，反之亦然。这是否意味着在媒介 2 中不发生反射？说明理由。

Q8.3 以边界条件为基础，说明在电介质与理想导体的交界上，必须有 Γ = −1。

练习 8.1 为了消除波反射，一个厚度为 d、相对介电常数为 ε_{r_2} 的电介质厚板，被插入到相对介电常数分别为 $\varepsilon_{r_1}=1$ 和 $\varepsilon_{r_3}=16$ 的两个半无穷大媒介之间。试利用四分之一波变换器技术，针对 3GHz 的垂直入射波，选择 d 和 ε_{r_2}。

302

答案：$\varepsilon_{r_2}=4$，$d=(1.25+2.5n)$(cm)，其中 $n=1,2,\cdots$。(参见◉)

练习 8.2 在两种非磁性导电媒介交界上，利用两媒介的复介电常数，表示垂直入射波的反射系数。

答案：对于从媒介 1$(\varepsilon_1,\mu_1,\sigma_1)$入射到媒介 2$(\varepsilon_2,\mu_2,\sigma_2)$的情况，有

$$\Gamma = \frac{\sqrt{\varepsilon_{c_1}} - \sqrt{\varepsilon_{c_2}}}{\sqrt{\varepsilon_{c_1}} + \sqrt{\varepsilon_{c_2}}},$$

其中 $\varepsilon_{c_1} = (\varepsilon_1 - j\sigma_1/\omega)$，$\varepsilon_{c_2} = (\varepsilon_2 - j\sigma_2/\omega)$。（参见❀）

练习 8.3 对于由式（8.22a）到式（8.23b）描述的场，求媒介 1 和 2 中的平均功率密度表达式。假定媒介 1 轻微有耗，η_{c_1} 近似为实数。

答案：（参见❀）

$$S_{av_1} = \hat{z}\frac{|E_0^i|^2}{2\eta_{c_1}}(e^{-2\alpha_1 z} - |\Gamma|^2 e^{2\alpha_1 z}),$$

$$S_{av_2} = \hat{z}|\tau|^2 \frac{|E_0^i|^2}{2} e^{-2\alpha_2 z}\Re e\left(\frac{1}{\eta_{c_2}^*}\right)。$$

8.3 斯涅耳定律

前一节分析了平面波垂直入射到两种不同媒介交界平面上时的反射和透射特性。现在来研究图 8-9 所示的斜入射情况。媒介 1 的参数为(ε_1, μ_1)，媒介 2 的参数为(ε_2, μ_2)，平面 $z=0$ 是两媒介的交界面。方向为 $\hat{k}_i$ 的两直线，代表垂直入射波波前而画的光线，同样，沿着 $\hat{k}_r$ 和 $\hat{k}_t$ 方向的直线，则分别代表反射波和透射波的光线。以交界的法向（z 轴）为基准，**入射角**（angle of incidence）、**反射角**（angle of reflection）及**透射角**（angle of transmission，或称**折射角**（angle of refraction）分别为 θ_i、θ_r和 θ_t。这三个角是由**斯涅耳定律**（Snell's law）相互联系的，这种联系将通过分析三个波前的传播来推导。入射波交交界于点 O 和点 O'。如图 8-9 所示，入射波的等相波前为 A_iO，而反射波和透射波的等相波前分别为 A_rO'和 A_tO'。入射波和反射波都在媒介 1 中传播，具有相同的相速度 $u_{p_1} = 1/\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}$；而反射波在媒介 2 中传播，相速度为 $u_{p_2} = 1/\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$。入射波从点 A_i行进到点 O'的时间，等于反射波从点 O 行进到点 A_r的时间，也等于透射波从点 O 行进到点 A_t的时间。由于时间等于距离除以速度，因此 303

$$\frac{\overline{A_iO'}}{u_{p_1}} = \frac{\overline{OA_r}}{u_{p_1}} = \frac{\overline{OA_t}}{u_{p_2}} \tag{8.26}$$

根据图 8-9 中三个直角三角形的几何关系，可得：

$$\overline{A_iO'} = \overline{OO'}\sin\theta_i, \tag{8.27a}$$

$$\overline{OA_r} = \overline{OO'}\sin\theta_r, \tag{8.27b}$$

$$\overline{OA_t} = \overline{OO'}\sin\theta_t \tag{8.27c}$$

将这些表达式代入式（8.26）可得：

$$\theta_i = \theta_r \quad \text{（斯涅耳反射定律）}, \tag{8.28a}$$

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{u_{p_2}}{u_{p_1}} = \sqrt{\frac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu_2\varepsilon_2}} \quad \text{（斯涅耳折射定律）} \tag{8.28b}$$

斯涅耳反射定律（Snell's law of reflection）指出，反射角等于入射角；而**斯涅耳折射定律**（Snell's law of refraction）则用相速度的比值，表示了 $\sin\theta_t$和 $\sin\theta_i$之间的关系。

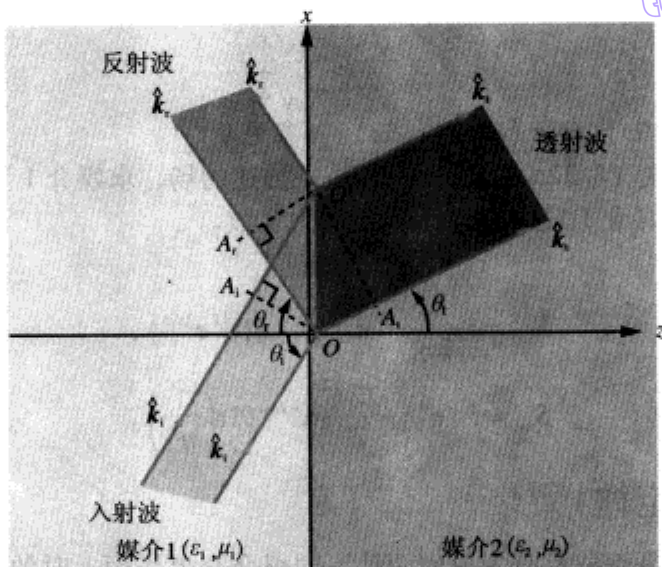


图 8-9 在不同媒介的平面交界面上波的反射与折射

媒介的折射率（index of refraction）用 n 表示，定义为自由空间的相速度（即光速 c）与媒介中的相速度之比。即

$$n=\frac{c}{u_p}=\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}}=\sqrt{\mu_r\varepsilon_r} \tag{8.29}$$

考虑到式（8.29），公式（8.28b）可以重写为

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i}=\frac{n_1}{n_2}=\sqrt{\frac{\mu_{r_1}\varepsilon_{r_1}}{\mu_{r_2}\varepsilon_{r_2}}} \tag{8.30}$$

对于非磁性材料，$\mu_{r_1}=\mu_{r_2}=1$，这种情况下有

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i}=\frac{n_1}{n_2}=\sqrt{\frac{\varepsilon_{r_1}}{\varepsilon_{r_2}}}=\frac{\eta_2}{\eta_1}\quad(\text{对于 }\mu_1=\mu_2\text{ 的情况})\,, \tag{8.31}$$

其中 $\eta=\sqrt{\mu/\varepsilon}$是电介质媒介的本征阻抗。通常，材料密度越高，介电常数也就越大。对于空气，$\mu_r=\varepsilon_r=1$，其折射率 $n_0=1$。由于非磁性材料的折射率 $n=\sqrt{\varepsilon_r}$，所以，如果某种材料的折射率比另一种大，则常说该材料比另外那种材料更致密。

304

在垂直入射的情况下（$\theta_i=0$），由式（8.31）可得 $\theta_t=0$，这与预期一致；而在斜入射的情况下，当 $n_2>n_1$时，$\theta_t<\theta_i$，当 $n_2<n_1$时，$\theta_t>\theta_i$。这就是说，如果媒介1中的波入射到较致密的媒介上，则透射波往靠近 z 轴的方向折射，如图 8-10a 所示；如果波是入射到较稀疏的媒介上，则情况正好相反，如图 8-10b 所示。一种特别有意思的情况，发生在 $\theta_t=\pi/2$ 时，如图 8-10c 所示。此时，此时折射波沿着交界表面流动，没有功率透射到媒介2。对应 $\theta_t=\pi/2$ 的入射角 θ_i的数值，称为临界角（critical angle），用 θ_c表示，由式（8.30）求得为

$$\sin\theta_c=\frac{n_2}{n_1}\sin\theta_t\bigg|_{\theta_t=\pi/2}=\frac{n_2}{n_1} \tag{8.32a}$$

$$=\sqrt{\frac{\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1}}}\quad (当\ \mu_1=\mu_2\ 时) \tag{8.32b}$$

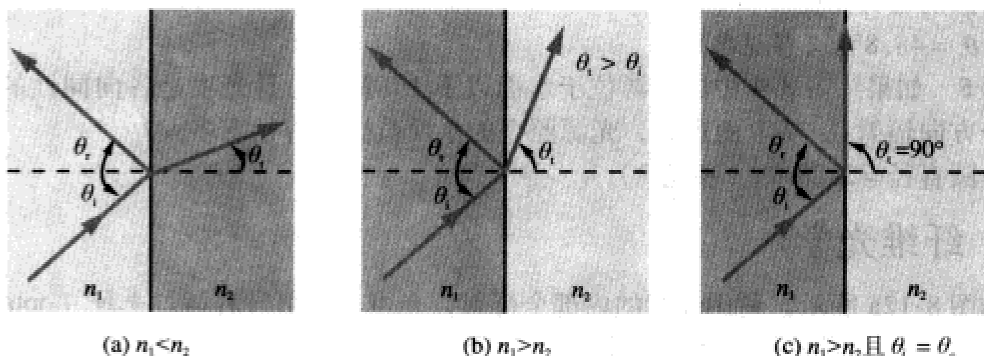


图 8-10 斯涅耳定律指出，$\theta_r=\theta_i$，$\sin\theta_t=(n_1/n_2)\sin\theta_i$。如果 $n_1<n_2$，则朝里折射，如图 a 所示；如果 $n_1>n_2$，则朝外折射，如图 b 所示；在 $n_1>n_2$，且 θ_i 等于或大于临界角 $\theta_c=\sin^{-1}(n_2/n_1)$ 时，折射角为 90°，如图 c 所示

例 8-4 经过厚板的光束

一折射率为 n_2 的电介质厚板，放在折射率为 n_1 的媒介中，如图 8-11 所示。如果 $\theta_i<\theta_c$，证明：穿过厚板的出射光线平行于入射光线。

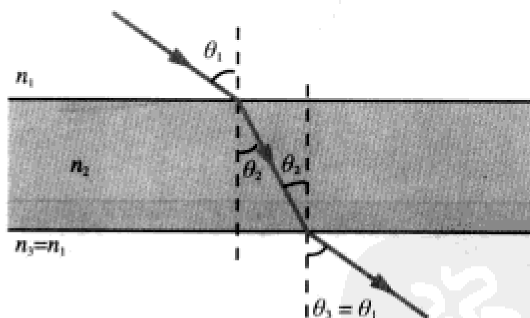


图 8-11 如果厚板具有平行的边界，且两侧环绕的媒介具有相同的折射率，则出射角 θ_3 等于入射角 θ_1（例 8-4）

解答：在厚板的上表面，由斯涅耳定律有

$$\sin\theta_2=\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 \tag{8.33}$$

同样，在厚板的下表面有

$$\sin\theta_3=\frac{n_2}{n_3}\sin\theta_2=\frac{n_2}{n_1}\sin\theta_2 \tag{8.34}$$

将式（8.33）代入式（8.34）可得

$$\sin\theta_3=\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\sin\theta_1=\sin\theta_1$$

因此，$\theta_3=\theta_1$。厚板移动了光束的位置，但光束的方向不变。■

练习 8.4　对于电磁频谱的可见部分，水的折射率为1.33。水下光源产生的光波，其透出水面的临界角是多少？

答案：$\theta_c=48.8°$。（参见◉）

练习 8.5　如果练习8.4中的光源位于水面以下1m深处，且光束是各向同性的（即沿各个方向辐射）。从上面观察，光源照亮的水面范围的直径有多大？

答案：圆直径=2.28m。（参见◉）

8.4　纤维光学

如图8-12a所示，利用连续的内部全反射，光可以被引导着通过光纤（optical fiber）——一种由玻璃或透明塑料制成的电介质细棒。由于光被限制在细棒中行进，所以功率损耗的原因只有两个，一是光纤发送端、接收端的反射，二是光纤材料的吸收（因为材料不是理想的电介质）。纤维光学极其有用，可用于宽带信号传输，广泛用于成像场合。

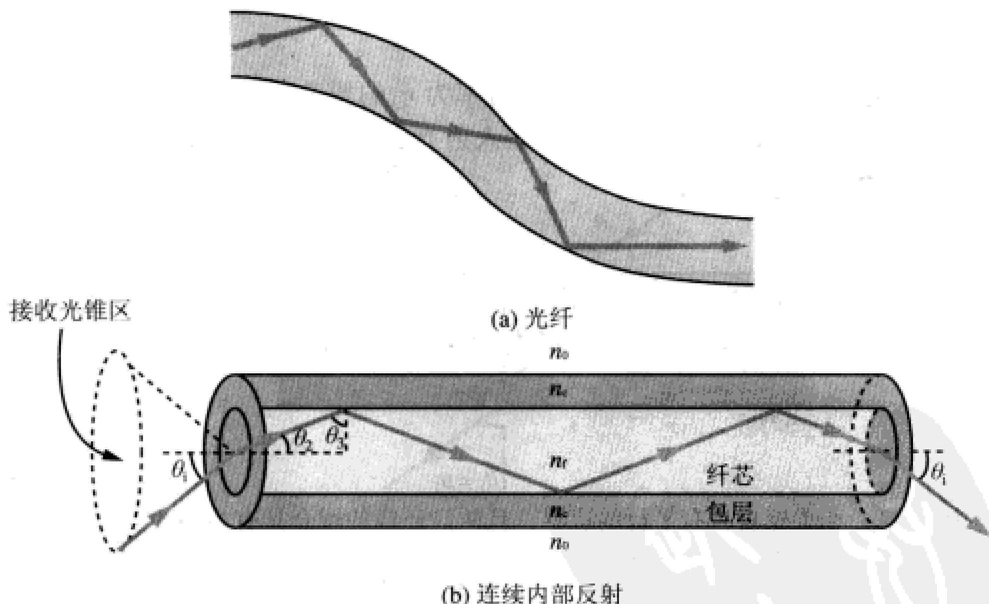


图8-12　只要反射角超过内部全反射的临界角，电磁波就可以沿着光纤导向行进

光纤通常由一根折射率为n_f的圆柱形纤芯（fiber core），外裹较低折射率n_c的圆柱形包层（cladding）构成，如图8-12b所示。包层的作用在于，当大量光纤打包安装、彼此紧挨时，使光纤之间在光学上相互隔离，防止光线从一根光纤泄漏到另一根光纤。为了满足全反射的条件，当光波从n_f的光纤媒介入射到n_c的包层媒介时，纤芯中的入射角θ_3必须等于或大于临界角θ_c。根据式（8.32a）有

$$\sin\theta_c=\frac{n_c}{n_f} \tag{8.35}$$

为了满足全反射的要求$\theta_3\geqslant\theta_c$，就要求$\sin\theta_3\geqslant n_c/n_f$。$\theta_2$是$\theta_3$的补角，即$\cos\theta_2=\sin\theta_3$。

所以，必要条件可以写为

$$\cos\theta_2 \geq \frac{n_c}{n_f} \tag{8.36}$$

此外，根据斯涅耳定律，θ_2同入射到光纤表面的入射角θ_i具有以下关系

$$\sin\theta_2 = \frac{n_0}{n_f}\sin\theta_i, \tag{8.37}$$

其中n_0是光纤周围介质的折射率（对于空气，$n_0=1$；对于水，$n_0=1.33$）。上式可以改写成

$$\cos\theta_2 = \left[1-\left(\frac{n_0}{n_f}\right)^2\sin^2\theta_i\right]^{1/2} \tag{8.38}$$

将式（8.38）代入式（8.36）的左端，求解$\sin\theta_i$可得

$$\sin\theta_i \leq \frac{1}{n_0}(n_f^2-n_c^2)^{1/2} \tag{8.39}$$

将内部全反射条件能够满足的最大θ_i值，称为**接收角**（acceptance angle），即

$$\sin\theta_a = \frac{1}{n_0}(n_f^2-n_c^2)^{1/2} \tag{8.40}$$

306

θ_a等于光纤的接收光锥区域角度的一半。任何入射到纤芯端面的光线，只要其入射角落在接收光锥区域中，就可以沿着纤芯传播下去。这就意味着，存在许多光线路径，都可以沿着光纤传输光能，人们把每个这种路径被称作一个**模式**（mode）。角度较大的光线，与沿着轴向传播的光线相比，行进的路径更长，如图8-13所示的三种模式。因此，不同模式在光线两端间传输的时间不同。光纤的这一特性称为**模式色散**（modal dispersion），它将使被传输的脉冲发生不希望的变形，不利于数字数据的传输。当矩形脉冲的光波入射到光纤端面时，分离成许多模式，不同模式无法同时达到光纤的另外一端，脉冲的形状和长度都将发生畸变。在图8-13的例子中，在光纤输入侧的窄矩形脉冲宽度为τ_i，重复间隔为T。通过纤芯以后，模式色散导致脉冲看起来更像展开宽度为τ的展开正弦波。如果输出脉冲过度展开，以致$\tau>T$，则输出的脉冲将因拖尾而相互涂抹，导致传输的信息无法辨识。因此，为了保证传输的脉冲在光纤的输出侧仍然清晰可辨，必须使τ小于T。出于安全裕量的考虑，实际上往往要求$T\geq2\tau$。

307

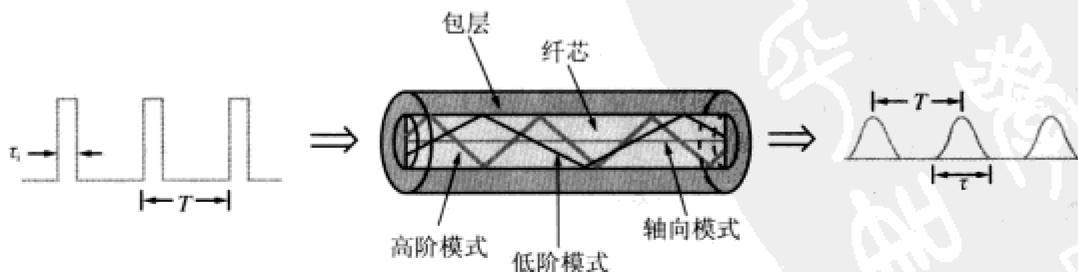


图8-13 光纤中由于模式色散而引起的矩形波畸变

展开宽度τ等于最慢光线同最快光线二者到达输出端的时间差（即延时）Δt。

最慢光线行进的距离最长，其入射到光纤输入端面的入射角为 θ_a。根据图8-12b的几何关系以及式（8.36），该光线对应于 $\cos\theta_2 = n_c/n_f$。对于长度为 l 的光纤，该光线行进的路径长度为

$$l_{max} = \frac{l}{\cos\theta_2} = l\frac{n_f}{n_c}, \tag{8.41}$$

其在光纤中以速度 $u_p = c/n_f$ 行进所用的时间为

$$t_{max} = \frac{l_{max}}{u_p} = \frac{ln_f^2}{cn_c} \tag{8.42}$$

沿轴向行进的光线所用时间最短，为

$$t_{min} = \frac{l}{u_p} = \frac{l}{c}n_f \tag{8.43}$$

总的时间延迟为

$$\tau = \Delta t = t_{max} - t_{min} = \frac{ln_f}{c}\left(\frac{n_f}{n_c} - 1\right) \quad (\mathrm{s}) \tag{8.44}$$

如前所述，为了从传输的信号中提取所需要的信息，建议输入的脉冲序列的脉冲间周期 T 不小于 2τ。这就意味着，光纤所能传输的数据速率（bit/s）或等效每秒钟的脉冲数，最高不得超过以下数值

$$f_p = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\tau} = \frac{cn_c}{2ln_f(n_f - n_c)} \quad (\mathrm{bit/s}) \tag{8.45}$$

例8-5 光纤传输的数据速率

空气中1km长的光纤，其纤芯的折射率为1.52，包层的折射率为1.49。试确定

（a）接收角度 θ_a；

（b）光纤所能传输的最大可用数据速率。

解答：（a）根据式（8.40）有

$$\sin\theta_a = \frac{1}{n_0}(n_f^2 - n_c^2)^{1/2} = [(1.52)^2 - (1.49)^2]^{1/2} = 0.3,$$

对应于 $\theta_a = 17.5°$。

（b）根据式（8.45）有

$$f_p = \frac{cn_c}{2ln_f(n_f - n_c)} = \frac{3\times10^8 \times 1.49}{2\times10^3 \times 1.52(1.52 - 1.49)} = 4.9(\mathrm{Mbit/s})$$ ■

练习8.6 如果例8-5中包层材料的折射率提高到1.50，新的最大可用数据速率是多少？

答案：7.4(Mbit/s)。（参见◆）

8.5 斜入射波的反射与透射

对于垂直入射的情况，两不同媒介交界面上的反射系数 Γ 和透射系数 τ，都独立于入射波的极化状态，因为垂直入射的平面波的电场和磁场总是同交界面相切的，而与波的极化无关。对于 $\theta_i \neq 0$ 的斜入射情况，结果则不是这样的。任何极化状态的电磁波，都可以用两个正交极化波的叠加来表示，其中一个的电场平行于入射

平面，称平行极化（parallel polarization），另外一个的电场垂直于入射平面，称垂直极化（perpendicular polarization）。所谓入射平面（plane of incidence），是指包含交界面的法向以及入射波的传播方向的平面。这两种极化配置如图 8-14 所示，其中的入射平面与 x-z 平面重合。电场 $\boldsymbol{E}$ 垂直于入射平面的极化，也称横电（transverse electric，TE）极化，因为其 $\boldsymbol{E}$ 垂直于入射平面；而 $\boldsymbol{E}$ 平行于入射平面的极化，则称为横磁（transverse magnetic，TM）极化，因为这种情况下的磁场垂直于入射平面。

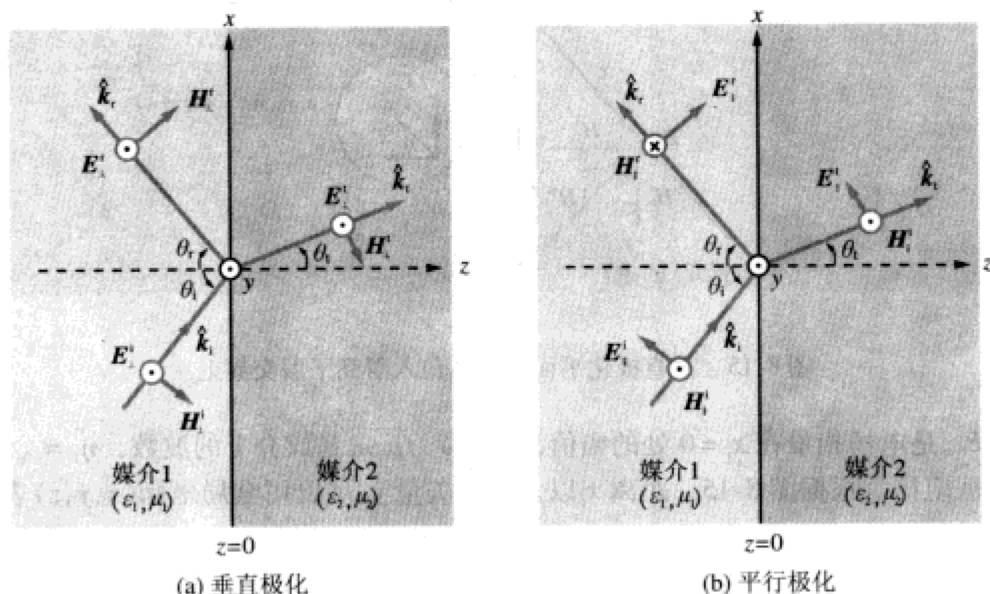


图 8-14 入射平面就是包含波的行进方向 $\hat{\boldsymbol{k}}$ 以及交界面的法向的平面，本图中即纸面所在平面。当 $\boldsymbol{E}$ 垂直于入射平面时，相应的波为垂直极化的，如图 a 所示；当 $\boldsymbol{E}$ 位于入射平面中时，相应的波是平行极化的，如图 b 所示

对于具有任意极化状态电磁波的一般情况，实际上往往不直接求解其反射和透射问题，而是先将入射波$(\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}},\boldsymbol{H}^{\mathrm{i}})$分解为一个垂直极化分量$(\boldsymbol{E}_{\perp}^{\mathrm{i}},\boldsymbol{H}_{\perp}^{\mathrm{i}})$和一个平行极化分量$(\boldsymbol{E}_{\parallel}^{\mathrm{i}},\boldsymbol{H}_{\parallel}^{\mathrm{i}})$，然后确定这两个入射分量各自的反射波$(\boldsymbol{E}_{\perp}^{\mathrm{r}},\boldsymbol{H}_{\perp}^{\mathrm{r}})$和$(\boldsymbol{E}_{\parallel}^{\mathrm{r}},\boldsymbol{H}_{\parallel}^{\mathrm{r}})$，两个反射波相加可以得到原始入射波的总反射波。透射波的处理方法类似。

8.5.1 垂直极化

在图 8-15 中，画出了一个垂直极化的平面入射波，沿着 x_{i} 方向在媒介 1 中传播。其电场相量 $\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\perp}^{\mathrm{i}}$ 指向 y 方向，相应的磁场相量 $\widetilde{\boldsymbol{H}}_{\perp}^{\mathrm{i}}$ 则沿着 y_{i} 方向。$\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\perp}^{\mathrm{i}}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{H}}_{\perp}^{\mathrm{i}}$ 的方向满足条件：$\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\perp}^{\mathrm{i}}\times\widetilde{\boldsymbol{H}}_{\perp}^{\mathrm{i}}$ 指向传播方向 $\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{i}}$。这种形式的平面波的表达式为 [309]

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\perp}^{\mathrm{i}}=\hat{\boldsymbol{y}}\,E_{\perp0}^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1x_{\mathrm{i}}},\tag{8.46a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}_{\perp}^{\mathrm{i}}=\hat{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{i}}\frac{E_{\perp0}^{\mathrm{i}}}{\eta_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1x_{\mathrm{i}}},\tag{8.46b}$$

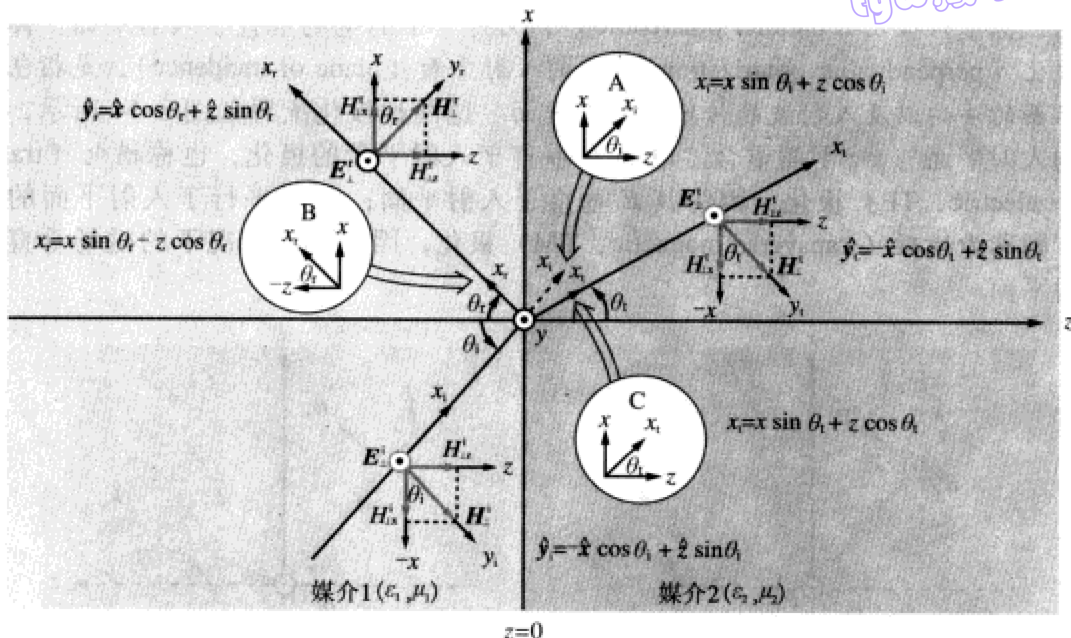


图 8-15　垂直极化平面波以 θ_i 角入射到平面交界上

其中，$E^i_{\perp 0}$ 是电场相量在 $x_i=0$ 处的幅值，$k_1=\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}$ 是媒介 1 的波数，$\eta_1=\sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}$ 则是本征阻抗。根据图 8-15，距离 x_i 以及单位矢量 $\hat{y}_i$ 可以用全局坐标(x,y,z)表示为

$$x_i=x\sin\theta_i+z\cos\theta_i, \tag{8.47a}$$

$$\hat{y}_i=-\hat{x}\cos\theta_i+\hat{z}\sin\theta_i \tag{8.47b}$$

将式（8.47a）和式（8.47b）代入式（8.46a）和式（8.46b）可得

入射波

$$\widetilde{E}^i_\perp=\hat{y}E^i_{\perp 0}e^{-jk_1(x\sin\theta_i+z\cos\theta_i)}, \tag{8.48a}$$

$$\widetilde{H}^i_\perp=(-\hat{x}\cos\theta_i+\hat{z}\sin\theta_i)\times\frac{E^i_{\perp 0}}{\eta_1}e^{-jk_1(x\sin\theta_i+z\cos\theta_i)} \tag{8.48b}$$

310 借助图 8-15 给出的反射波与透射波的方向关系，可得场量为

反射波

$$\widetilde{E}^r_\perp=\hat{y}E^r_{\perp 0}e^{-jk_1x_r}=\hat{y}E^r_{\perp 0}e^{-jk_1(x\sin\theta_r-z\cos\theta_r)}, \tag{8.49a}$$

$$\widetilde{H}^r_\perp=\hat{y}_r\frac{E^r_{\perp 0}}{\eta_1}e^{-jk_1x_r}=(\hat{x}\cos\theta_r+\hat{z}\sin\theta_r)\times\frac{E^r_{\perp 0}}{\eta_1}e^{-jk_1(x\sin\theta_r-z\cos\theta_r)}, \tag{8.49b}$$

透射波

$$\widetilde{E}^t_\perp=\hat{y}E^t_{\perp 0}e^{-jk_2x_t}=\hat{y}E^t_{\perp 0}e^{-jk_2(x\sin\theta_t+z\cos\theta_t)}, \tag{8.49c}$$

$$\widetilde{H}^t_\perp=\hat{y}_t\frac{E^t_{\perp 0}}{\eta_2}e^{-jk_2x_t}=(-\hat{x}\cos\theta_t+\hat{z}\sin\theta_t)\times\frac{E^t_{\perp 0}}{\eta_2}e^{-jk_2(x\sin\theta_t+z\cos\theta_t)} \tag{8.49d}$$

其中 θ_r 和 θ_t 是图 8-15 所示的反射角和透射角，k_2 和 η_2 是媒介 2 中的波数和本征阻抗。此处的目的是用入射波的参数，包括入射角 θ_i 和幅值 $E^i_{\perp 0}$，来描述反射波和透射波的

场。式（8.49a）~式(8.49d）的四个表达式包含4个未知量：$E^{r}_{\perp 0}$，$E^{t}_{\perp 0}$，θ_r和θ_t。角度θ_r和θ_t可以应用斯涅耳定律的式（8.28a）和式（8.28b）来表示为θ_i的函数，但此处暂时让它们保持为未知量，因为我们的目的是想证明，斯涅耳定律也可以应用$z=0$处场的边界条件来推导。媒介1中的总电场等于入射电场与反射电场之和：$\widetilde{\boldsymbol{E}}^{1}_{\perp}=\widetilde{\boldsymbol{E}}^{i}_{\perp}+\widetilde{\boldsymbol{E}}^{r}_{\perp}$；媒介1中的总磁场也是如此：$\widetilde{\boldsymbol{H}}^{1}_{\perp}=\widetilde{\boldsymbol{H}}^{i}_{\perp}+\widetilde{\boldsymbol{H}}^{r}_{\perp}$。边界条件指出，$\widetilde{\boldsymbol{E}}$和$\widetilde{\boldsymbol{H}}$的切向分量各自都必须在两媒介的交界面上连续。同交界相切的场分量是沿着$\hat{\boldsymbol{x}}$和$\hat{\boldsymbol{y}}$方向的分量。因为媒介1和媒介2的电场仅有$\hat{\boldsymbol{y}}$分量，所以$\widetilde{\boldsymbol{E}}$的边界条件为

$$(\widetilde{\boldsymbol{E}}^{i}_{\perp y}+\widetilde{\boldsymbol{E}}^{r}_{\perp y})\big|_{z=0}=\widetilde{\boldsymbol{E}}^{t}_{\perp y}\big|_{z=0} \tag{8.50}$$

将式（8.48a），式（8.49a）和式（8.49c）应用到式（8.50）中，并令$z=0$，可得

$$E^{i}_{\perp 0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x\sin\theta_i}+E^{r}_{\perp 0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x\sin\theta_r}=E^{t}_{\perp 0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2 x\sin\theta_t} \tag{8.51}$$

磁场切向分量（即x分量）的边界条件为

$$(\widetilde{\boldsymbol{H}}^{i}_{\perp x}+\widetilde{\boldsymbol{H}}^{r}_{\perp x})\big|_{z=0}=\widetilde{\boldsymbol{H}}^{t}_{\perp x}\big|_{z=0}, \tag{8.52}$$

即

$$-\frac{E^{i}_{\perp 0}}{\eta_1}\cos\theta_i\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x\sin\theta_i}+\frac{E^{r}_{\perp 0}}{\eta_1}\cos\theta_r\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x\sin\theta_r}=-\frac{E^{t}_{\perp 0}}{\eta_2}\cos\theta_t\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2 x\sin\theta_t} \tag{8.53}$$

为了使所有可能的x取值（沿着交界）都满足式（8.51）和式（8.53），三个指数的参数必须都相等，即

$$k_1\sin\theta_i=k_1\sin\theta_r=k_2\sin\theta_t, \tag{8.54}$$

这就是所谓的相位匹配条件（phase-matching condition）。由式（8.54）中的第一个等式可得

$$\theta_r=\theta_i \quad \text{（斯涅耳反射定律）}, \tag{8.55}$$

由第二个等式可得

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i}=\frac{k_1}{k_2}=\frac{\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}}{\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}}=\frac{n_1}{n_2} \quad \text{（斯涅耳折射定律）} \tag{8.56}$$

式（8.55）和式（8.56）给出的表达式，同前面8.2节中通过考虑入射波波前、反射波波前以及透射波波前所横断的光线路径的几何关系而推得的结果完全相同。

311

考虑到式（8.54），则边界条件式（8.51）和式（8.53）可以简化为

$$E^{i}_{\perp 0}+E^{r}_{\perp 0}=E^{t}_{\perp 0}, \tag{8.57a}$$

$$\frac{\cos\theta_i}{\eta_1}(-E^{i}_{\perp 0}+E^{r}_{\perp 0})=-\frac{\cos\theta_t}{\eta_2}E^{t}_{\perp 0} \tag{8.57b}$$

联立求解以上两式，可以得到垂直极化情况下的反射系数和透射系数的表达式

$$\Gamma_{\perp}=\frac{E^{r}_{\perp 0}}{E^{i}_{\perp 0}}=\frac{\eta_2\cos\theta_i-\eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i+\eta_1\cos\theta_t}, \tag{8.58a}$$

$$\tau_{\perp}=\frac{E^{t}_{\perp 0}}{E^{i}_{\perp 0}}=\frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i+\eta_1\cos\theta_t} \tag{8.58b}$$

这两个系数的正式名称分别是垂直极化的菲涅耳反射系数和透射系数（Fresnel reflection and transmission coefficients for perpendicular polarization），二者的关系为

$$\tau_{\perp} = 1 + \Gamma_{\perp} \tag{8.59}$$

如果媒介2是理想导体（$\eta_2 = 0$），则式（8.58a）和式（8.58b）分别简化为$\Gamma_{\perp} = -1$和$\tau_{\perp} = 0$，这意味着入射波被导电媒介完全反射。

对于$\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$，即非磁性电介质的情况，根据式（8.56），$\Gamma_{\perp}$的表达式可以写为

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\cos\theta_i - \sqrt{(\varepsilon_2/\varepsilon_1) - \sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i + \sqrt{(\varepsilon_2/\varepsilon_1) - \sin^2\theta_i}} \quad (\text{当}\ \mu_1 = \mu_2\ \text{时}) \tag{8.60}$$

因为$(\varepsilon_2/\varepsilon_1) = (n_2/n_1)^2$，所以上述表达式也可以用折射率$n_1$和$n_2$表示。

例 8-6 斜入射到土壤表面的电磁波

在图8-15的坐标系中，远方天线辐射的平面波，在$z = 0$处，从空气中入射到平坦的土壤表面。入射波的电场为

$$\boldsymbol{E}^i = \hat{\boldsymbol{y}}\, 100 \cos(\omega t - \pi x - 1.73\pi z) \quad (\text{V/m}), \tag{8.61}$$

土壤媒介可以看成无耗电介质，其相对介电常数为4。

（a）确定k_1、k_2以及入射角θ_i；

（b）求空气中以及土壤媒介中总电场的表达式；

（c）求土壤媒介中行进的电磁波所携带的平均功率密度。

解答：（a）先将式（8.61）转换成相量形式，结果类似式（8.46a）的表达式

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}^i = \hat{\boldsymbol{y}}\, 100 e^{-j\pi x - j1.73\pi z} = \hat{\boldsymbol{y}}\, 100 e^{-jk_1 x_i} \quad (\text{V/m}), \tag{8.62}$$

其中x_i是波行进的轴线，且有

$$k_1 x_i = \pi x + 1.73\pi z \tag{8.63}$$

利用式（8.47a）可得：

$$k_1 x_i = k_1 x \sin\theta_i + k_1 z \cos\theta_i \tag{8.64}$$

因此，

$$k_1 \sin\theta_i = \pi$$
$$k_1 \cos\theta_i = 1.73\pi,$$

联立求解得

$$k_1 = \sqrt{\pi^2 + (1.73\pi)^2} = 2\pi \quad (\text{rad/m}),$$

312

$$\theta_i = \tan^{-1}\left(\frac{\pi}{1.73\pi}\right) = 30°$$

媒介1（空气）中的波长为

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{k_1} = 1(\text{m}),$$

媒介2（土壤）中的波长为

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\varepsilon_{r_2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = 0.5(\text{m})$$

媒介2中对应的波数为

$$k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = 4\pi \quad (\text{rad/m})$$

因为 $\tilde{\boldsymbol{E}}^i$ 沿着 $\hat{\boldsymbol{y}}$ 方向，所以是垂直极化的（$\hat{\boldsymbol{y}}$ 垂直于包含交界面法向矢量 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 及传播方向矢量 $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ 的入射平面）。

（b）当 $\theta_i = 30°$ 时，相应的透射角 θ_t 可由式（8.56）获得

$$\sin\theta_t = \frac{k_1}{k_2}\sin\theta_i = \frac{2\pi}{4\pi}\sin 30° = 0.25$$

即

$$\theta_t = 14.5°$$

在 $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ 以及 $\varepsilon_2 = \varepsilon_{r_2}\varepsilon_0 = 4\varepsilon_0$ 的情况下，垂直极化波的反射系数和透射系数由式（8.59）和式（8.60）确定为

$$\Gamma_\perp = \frac{\cos\theta_i - \sqrt{(\varepsilon_2/\varepsilon_1) - \sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i + \sqrt{(\varepsilon_2/\varepsilon_1) - \sin^2\theta_i}} = -0.38,$$

$$\tau_\perp = 1 + \Gamma_\perp = 0.62.$$

将 $E^i_{\perp 0} = 100\text{V/m}$，$\theta_i = \theta_r$ 代入式（8.48a）和式（8.49a），可得媒介 1 中的总电场为

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{E}}^1_\perp &= \tilde{\boldsymbol{E}}^i_\perp + \tilde{\boldsymbol{E}}^r_\perp = \hat{\boldsymbol{y}}E^i_{\perp 0}e^{-jk_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} + \hat{\boldsymbol{y}}\Gamma E^i_{\perp 0}e^{-jk_1(x\sin\theta_i - z\cos\theta_i)} \\ &= \hat{\boldsymbol{y}}\,100e^{-j(\pi x + 1.73\pi z)} - \hat{\boldsymbol{y}}\,38e^{-j(\pi x - 1.73\pi z)},\end{aligned}$$

媒介 1 中对应的瞬态电场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}^1_\perp(x,z,t) &= \Re\mathfrak{e}[\tilde{\boldsymbol{E}}^1_\perp e^{j\omega t}] \\ &= \hat{\boldsymbol{y}}[100\cos(\omega t - \pi x - 1.73\pi z) - 38\cos(\omega t - \pi x + 1.73\pi z)] \quad (\text{V/m})\end{aligned}$$

在媒介 2 中，将 $E^t_{\perp 0} = \tau_\perp E^i_{\perp 0}$ 代入式（8.49c）可得：

$$\tilde{\boldsymbol{E}}^t_\perp = \hat{\boldsymbol{y}}\,\tau E^i_{\perp 0}e^{-jk_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)} = \hat{\boldsymbol{y}}\,62e^{-j(\pi x + 3.87\pi z)}$$

与此相对应，有

$$\boldsymbol{E}^t_\perp(x,z,t) = \Re\mathfrak{e}[\tilde{\boldsymbol{E}}^t_\perp e^{j\omega t}] = \hat{\boldsymbol{y}}\,62\cos(\omega t - \pi x - 3.87\pi z) \quad (\text{V/m})$$

（c）在媒介 2 中，$\eta_2 = \eta_0/\sqrt{\varepsilon_{r_2}} \approx 120\pi/\sqrt{4} = 60\pi(\Omega)$，电磁波所携带的平均功率密度为

$$S^t_{av} = \frac{|E^t_{\perp 0}|^2}{2\eta_2} = \frac{(62)^2}{2\times 60\pi} = 10.2 \quad (\text{W/m}^2)$$ ■

8.5.2 平行极化

如果将垂直极化情况下的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 进行对调，但仍保证 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 的方向同入射波、反射波以及透射波的传播方向间关系的原有要求，则可以获得图 8-16 所示的平行极化几何配置。此时，电场落在入射平面上，相应的磁场则垂直于入射平面。相对图 8-16 所标示的方向，入射波、反射波以及透射波的场分别为

入射波

$$\tilde{\boldsymbol{E}}^i_\parallel = \hat{\boldsymbol{y}}_i E^i_{\parallel 0}e^{-jk_1x_i} = (\hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta_i - \hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta_i)E^i_{\parallel 0}e^{-jk_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}, \tag{8.65a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}_{\parallel}^{\mathrm{i}} = \hat{\boldsymbol{y}}\frac{E_{\parallel 0}^{\mathrm{i}}}{\eta_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1x_i} = \hat{\boldsymbol{y}}\frac{E_{\parallel 0}^{\mathrm{i}}}{\eta_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}, \tag{8.65b}$$

反射波

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\parallel}^{\mathrm{r}} = \hat{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{r}}E_{\parallel 0}^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1x_r} = (\hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta_r + \hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta_r)E_{\parallel 0}^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}, \tag{8.65c}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}_{\parallel}^{\mathrm{r}} = -\hat{\boldsymbol{y}}\frac{E_{\parallel 0}^{\mathrm{r}}}{\eta_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1x_r} = -\hat{\boldsymbol{y}}\frac{E_{\parallel 0}^{\mathrm{r}}}{\eta_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}, \tag{8.65d}$$

透射波

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\parallel}^{\mathrm{t}} = \hat{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{t}}E_{\parallel 0}^{\mathrm{t}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2x_t} = (\hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta_t - \hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta_t)E_{\parallel 0}^{\mathrm{t}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)}, \tag{8.65e}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}_{\parallel}^{\mathrm{t}} = \hat{\boldsymbol{y}}\frac{E_{\parallel 0}^{\mathrm{t}}}{\eta_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2x_t} = \hat{\boldsymbol{y}}\frac{E_{\parallel 0}^{\mathrm{t}}}{\eta_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)} \tag{8.65f}$$

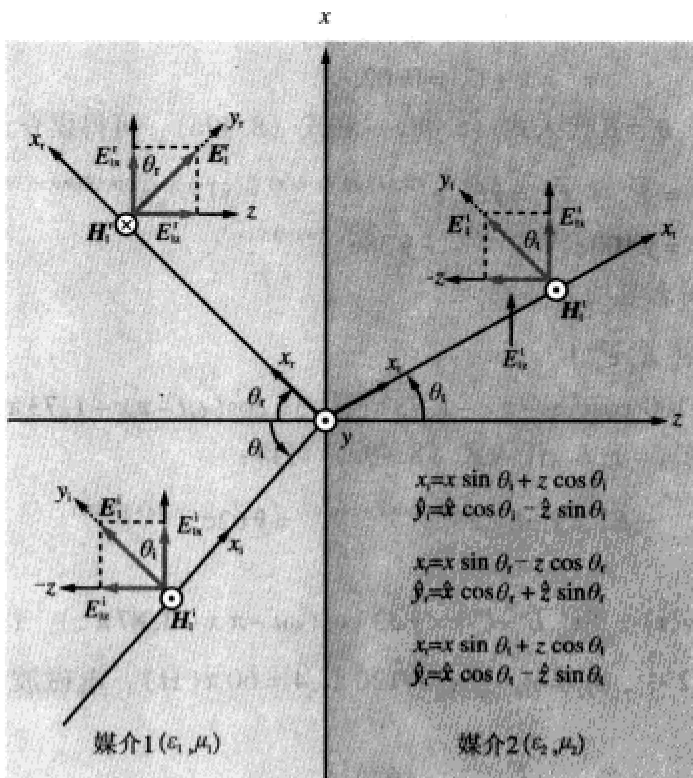


图 8-16　以 θ_i 角入射到平面边界上的平行极化平面波

在 $z=0$ 处，对边界两侧媒介中的 $\widetilde{\boldsymbol{E}}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{H}}$ 的切向分量分别进行配对，如同在垂直极化情况下所做的那样，同样可以得到斯涅耳定律的关系式，以及下述平行极化的菲涅耳反射系数和透射系数（Fresnel reflection and transmission coefficients for parallel polarization）

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{E_{\parallel 0}^{\mathrm{r}}}{E_{\parallel 0}^{\mathrm{i}}} = \frac{\eta_2\cos\theta_t - \eta_1\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t + \eta_1\cos\theta_i}, \tag{8.66a}$$

$$\tau_{\parallel} = \frac{E^{t}_{\parallel 0}}{E^{i}_{\parallel 0}} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i} \tag{8.66b}$$

可以证明，以上表达式满足以下关系

$$\tau_{\parallel} = (1 + \Gamma_{\parallel})\frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_t} \tag{8.67}$$

在早前的垂直极化情况分析时，大家已经注意到，当第 2 种媒介为理想导体时（$\eta_2 = 0$），入射波完全被边界所反射。平行极化的情况也是如此，在式（8.66a）和式（8.66b）中令 $\eta_2 = 0$ 可得 $\Gamma_{\parallel} = -1$ 以及 $\tau_{\parallel} = 0$。

对于非磁性材料，式（8.66a）成为

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{-(\varepsilon_2/\varepsilon_1)\cos\theta_i + \sqrt{(\varepsilon_2/\varepsilon_1) - \sin^2\theta_i}}{(\varepsilon_2/\varepsilon_1)\cos\theta_i + \sqrt{(\varepsilon_2/\varepsilon_1) - \sin^2\theta_i}} \quad (\text{当}\ \mu_1 = \mu_2\ \text{时}) \tag{8.68}$$

314

为了说明 $\Gamma_{\perp}$ 以及 $\Gamma_{\parallel}$ 的幅值随角度的变化，在图 8-17 中画出了电磁波从空气入射到以下三种不同电介质表面时的 $\Gamma_{\perp}$、$\Gamma_{\parallel}$ 曲线：干燥土壤（$\varepsilon_r = 3$），潮湿土壤（$\varepsilon_r = 25$），以及水（$\varepsilon_r = 81$）。对于以上各种表面有：（1）在垂直入射时（$\theta_i = 0$），$\Gamma_{\perp} = \Gamma_{\parallel}$，与预期相同；（2）在掠入射（grazing incidence）（$\theta_i = 90°$）时，$|\Gamma_{\perp}| = |\Gamma_{\parallel}| = 1$；（3）在图 8-17 中标记为布儒斯特角（Brewster angle）的位置，$\Gamma_{\parallel}$ 为零。对于非磁性材料，仅仅在平行极化的情况下，才存在布儒斯特角，其值取决于比值（$\varepsilon_2/\varepsilon_1$），后面马上将有证明。在布儒斯特角位置，入射波的平行极化分量将完全透入到媒介 2 中。

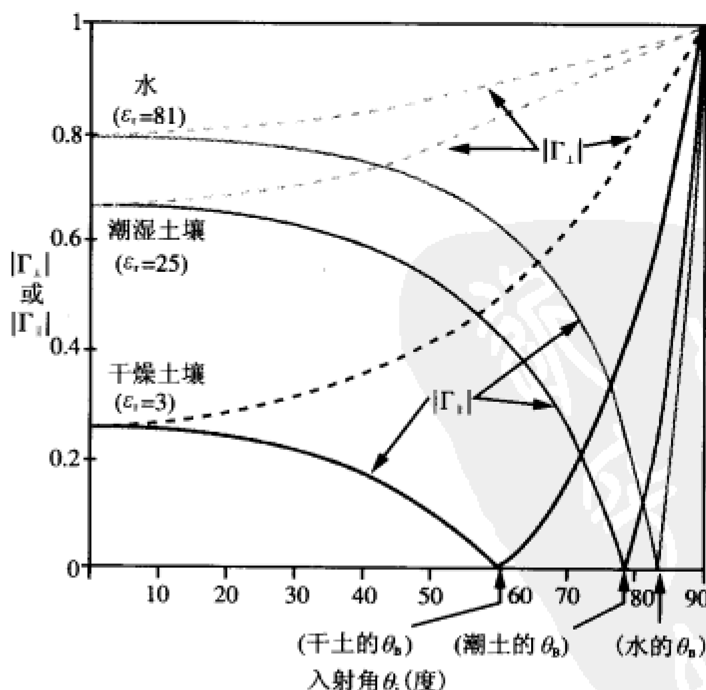


图 8-17 在干燥土壤表面、潮湿土壤表面以及水面等三种情况下，$|\Gamma_{\perp}|$和$|\Gamma_{\parallel}|$随 θ_i变化的曲线。对于每种情况，在布儒斯特角时$|\Gamma_{\parallel}| = 0$

8.5.3 布儒斯特角

布儒斯特角 θ_B 定义为当菲涅耳反射系数 $\Gamma=0$ 时的入射角 θ_i。

垂直极化

对于垂直极化的情况，令式（8.58a）给定的 $\Gamma_\perp$ 表达式的分子为零，可推导出布儒斯特角 $\theta_{B\perp}$，即

$$\eta_2 \cos\theta_i = \eta_1 \cos\theta_t \tag{8.69}$$

先对上式两端取平方，然后利用式（8.53），再求解 θ_i，最后将 θ_i 记为 $\theta_{B\perp}$，于是得到

$$\sin\theta_{B\perp} = \sqrt{\frac{1-(\mu_1\varepsilon_2/\mu_2\varepsilon_1)}{1-(\mu_1/\mu_2)^2}} \tag{8.70}$$

因为式（8.70）的分母在 $\mu_1=\mu_2$ 时变成零，所以非磁性材料不存在 $\theta_{B\perp}$。

平行极化

在 $\Gamma_\parallel=0$ 时的 θ_i 值记为 $\theta_{B\parallel}$，可以通过令式（8.66a）中的分子等于零来得到。结果同式（8.70）相同，但 μ 和 ε 互换了位置。即

$$\sin\theta_{B\parallel} = \sqrt{\frac{1-(\varepsilon_1\mu_2/\varepsilon_2\mu_1)}{1-(\varepsilon_1/\varepsilon_2)^2}} \tag{8.71}$$

对于非磁性材料

$$\theta_{B\parallel} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{1}{1+(\varepsilon_1/\varepsilon_2)}} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \quad (\text{当}\ \mu_1=\mu_2\ \text{时}) \tag{8.72}$$

布儒斯特将也称为极化角（polarizing angle）。这是因为，当一个由垂直极化分量和平行极化分量组成的电磁波，以布儒斯特角 $\theta_{B\parallel}$ 入射到非磁性材料表面时，平行极化 315 的分量全部透射到第二种媒介，仅有垂直极化的分量被表面反射。自然光，包括阳光、大多数人工光源产生的光，都被看成是非极化的，因为在垂直传播方向的平面上，光波的电场方向随角度任意变化。所以，平均来讲，自然光强度的一半是垂直极化的，另外一半则是平行极化的。当一个未极化的光波以布儒斯特角入射到媒介表面时，反射波是严格垂直极化的。此时，反射过程充当了极化器的角色。

复习题

Q8.4 当 $n_2>n_1$ 时，电磁波从折射率为 n_1 的媒介1，入射到折射率为 n_2 的媒介2上，能够发生全反射吗？

Q8.5 对于8.2.1节中垂直入射的情况，以及8.5.1节中垂直极化时斜入射的情况，二者的边界条件有什么差别？

Q8.6 为什么也将布儒斯特角称为极化角？

Q8.7 在边界上，入射与反射电场的切向分量之和，必须等于透射电场的切向分量。对于 $\varepsilon_{r_1}=1$ 和 $\varepsilon_{r_2}=16$ 的情况，求布儒斯特角，并按比例画出在布儒斯特角情况下，三个电场的切向分量的草图，以验证前述结论。

练习 8.7 空气中一个电磁波，以 $\theta_i=50°$ 入射到 $\varepsilon_r=4$、$\mu_r=1$ 的土壤媒介的平坦边界，确定 $\Gamma_\perp$、$\tau_\perp$、$\Gamma_\parallel$ 以及 $\tau_\parallel$。

答案：$\Gamma_\perp=-0.48$，$\tau_\perp=0.52$，$\Gamma_\parallel=-0.16$，$\tau_\parallel=0.58$。（参见◉）

练习 8.8 确定练习 8.7 中边界的布儒斯特角。

答案：$\theta_B = 63.4°$。（参见）

练习 8.9 证明由式（8.65a）～式(8.65f）给出的入射、反射、透射电场与磁场，沿 x 方向都具有相同的复指数函数。

答案：利用式（8.55）和式（8.56），可以证明所有 6 个场都按 $e^{-jk_1 x\sin\theta_i}$ 的规律变化。（参见）

 **D8.4-8.6**

8.6 反射率与透射率

反射系数与透射系数分别表示反射波以及透射波的电场幅值与入射波的电场幅值之比。现在来分析功率比值，先从垂直极化的情况开始讨论。在图 8-18 中，一个圆形光束的电磁能入射到两无耗、邻接媒介的交界上。光束照亮区域的面积为 A，入射、反射、透射光束的电场幅值分别为 $E^i_{\perp 0}$、$E^r_{\perp 0}$和 $E^t_{\perp 0}$。由入射、反射以及透射光束所携带的平均功率密度分别为

$$S^i_{\perp} = \frac{|E^i_{\perp 0}|^2}{2\eta_1}, \tag{8.73a}$$

$$S^r_{\perp} = \frac{|E^r_{\perp 0}|^2}{2\eta_1}, \tag{8.73b}$$

$$S^t_{\perp} = \frac{|E^t_{\perp 0}|^2}{2\eta_2}, \tag{8.73c}$$

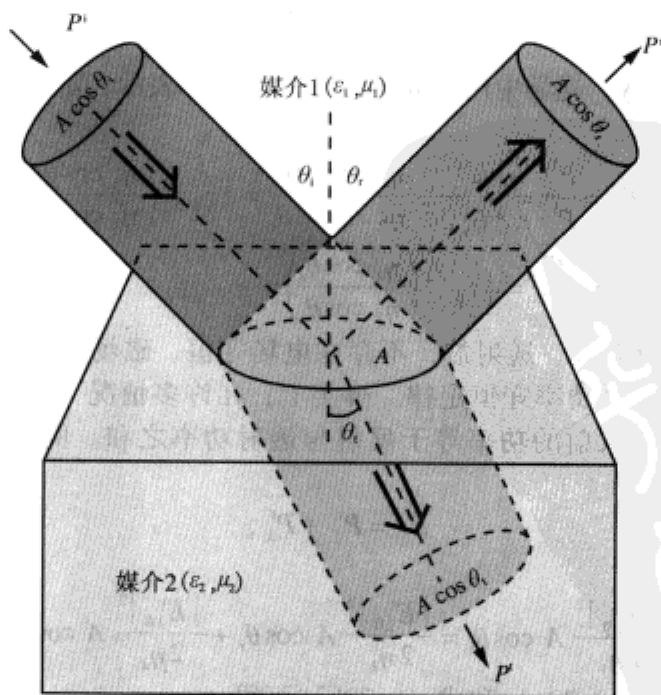


图 8-18 在交界上照亮的区域面积为 A 的圆形入射光束的反射与透射

316

其中，η_1、η_2分别是媒介 1 和媒介 2 的本征阻抗。入射、反射以及透射光束的横截面积分别为

$$A_i = A\cos\theta_i, \tag{8.74a}$$

$$A_r = A\cos\theta_r, \tag{8.74b}$$

$$A_t = A\cos\theta_t, \tag{8.74c}$$

与此相对应，由光束携带的平均功率密度为

$$P_\perp^i = S_\perp^i A_i = \frac{|E_{\perp 0}^i|^2}{2\eta_1} A\cos\theta_i, \tag{8.75a}$$

$$P_\perp^r = S_\perp^r A_r = \frac{|E_{\perp 0}^r|^2}{2\eta_1} A\cos\theta_r, \tag{8.75b}$$

$$P_\perp^t = S_\perp^t A_t = \frac{|E_{\perp 0}^t|^2}{2\eta_2} A\cos\theta_t, \tag{8.75c}$$

反射率（reflectivity，光学中用 reflectance），用 R 表示，定义为反射功率与入射功率的比值。因此，垂直极化时的反射率为

$$R_\perp = \frac{P_\perp^r}{P_\perp^i} = \frac{|E_{\perp 0}^r|^2 \cos\theta_r}{|E_{\perp 0}^i|^2 \cos\theta_i} = \left|\frac{E_{\perp 0}^r}{E_{\perp 0}^i}\right|^2 \tag{8.76}$$

其中利用了斯涅耳反射定律，即 $\theta_r = \theta_i$。由于反射波电场幅值对入射波电场幅值的比值$|E_{\perp 0}^r/E_{\perp 0}^i|$，就等于反射系数 $\Gamma_\perp$ 的绝对值，因此

$$R_\perp = |\Gamma_\perp|^2, \tag{8.77}$$

同样，对于平行极化有

$$R_\parallel = \frac{P_\parallel^r}{P_\parallel^i} = |\Gamma_\parallel|^2 \tag{8.78}$$

透射率（transmissivity，光学中用 transmittance），用 T 表示，定义为透射功率对入射功率的比值，即

$$T_\perp = \frac{P_\perp^t}{P_\perp^i} = \frac{|E_{\perp 0}^t|^2}{|E_{\perp 0}^i|^2}\frac{\eta_1}{\eta_2}\frac{A\cos\theta_t}{A\cos\theta_i} = |\tau_\perp|^2\left(\frac{\eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i}\right), \tag{8.79a}$$

$$T_\parallel = \frac{P_\parallel^t}{P_\parallel^i} = |\tau_\parallel|^2\left(\frac{\eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i}\right) \tag{8.79b}$$

对于入射波、反射波、透射波，不存在电场守恒、磁场守恒、功率密度守恒的问题，但它们必须遵循功率守恒定律。事实上，在许多情况下，透射电场比入射电场大。功率守恒要求入射的功率等于反射与透射功率之和。例如，对于垂直极化，就有

317

$$P_\perp^i = P_\perp^r + P_\perp^t, \tag{8.80}$$

即

$$\frac{|E_{\perp 0}^i|^2}{2\eta_1} A\cos\theta_i = \frac{|E_{\perp 0}^r|^2}{2\eta_1} A\cos\theta_r + \frac{|E_{\perp 0}^t|^2}{2\eta_2} A\cos\theta_t \tag{8.81}$$

利用式（8.76）、式（8.79a）和式（8.79b）可得

$$R_\perp + T_\perp = 1, \tag{8.82a}$$

$$R_{\parallel}+T_{\parallel}=1, \tag{8.82b}$$

即

$$|\Gamma_{\perp}|^2+|\tau_{\perp}|^2\left(\frac{\eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i}\right)=1, \tag{8.83a}$$

$$|\Gamma_{\parallel}|^2+|\tau_{\parallel}|^2\left(\frac{\eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i}\right)=1 \tag{8.83b}$$

图 8-19 绘出了在空气－玻璃交界面情况下，$(R_{\parallel},T_{\parallel})$ 随 θ_i 变化的曲线。可见，$R_{\parallel}$、$T_{\parallel}$ 之和总是 1，这是式（8.82b）所要求的。也可以看到，在布儒斯特角 θ_B 处，$R_{\parallel}=0$，$T_{\parallel}=1$。

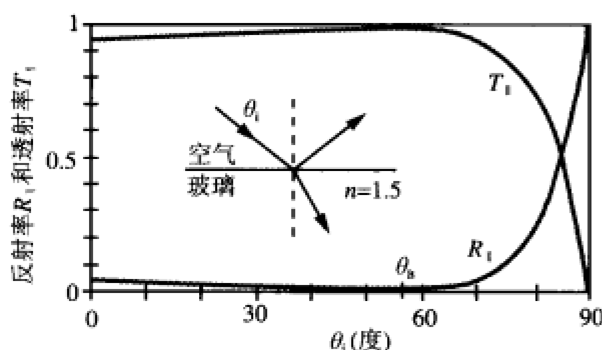


图 8-19　在空气－玻璃交界面上，$(R_{\parallel},T_{\parallel})$ 随角度变化的曲线

表 8-2 对垂直入射、斜入射两种情况下的 Γ、τ、R、T 的一般化表达式进行了总结。 318

表 8-2　电磁波从本征阻抗为 η_1 的媒介入射到本征阻抗为 η_2 的媒介时，Γ、τ、R、T 的表达式。其中 θ_i、θ_t 分别是入射角和透射角

特性指标	垂直入射 $\theta_i=\theta_t=0$	垂直极化	平行极化
反射系数	$\Gamma=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}$	$\Gamma_{\perp}=\frac{\eta_2\cos\theta_i-\eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i+\eta_1\cos\theta_t}$	$\Gamma_{\parallel}=\frac{\eta_2\cos\theta_t-\eta_1\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t+\eta_1\cos\theta_i}$
透射系数	$\tau=\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}$	$\tau_{\perp}=\frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i+\eta_1\cos\theta_t}$	$\tau_{\parallel}=\frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t+\eta_1\cos\theta_i}$
Γ 与 τ 的关系	$\tau=1+\Gamma$	$\tau_{\perp}=1+\Gamma_{\perp}$	$\tau_{\parallel}=(1+\Gamma_{\parallel})\frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_t}$
反射率	$R=\lvert\Gamma\rvert^2$	$R_{\perp}=\lvert\Gamma_{\perp}\rvert^2$	$R_{\parallel}=\lvert\Gamma_{\parallel}\rvert^2$
透射率	$T=\lvert\tau\rvert^2\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)$	$T_{\perp}=\lvert\tau_{\perp}\rvert^2\frac{\eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i}$	$T_{\parallel}=\lvert\tau_{\parallel}\rvert^2\frac{\eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i}$
R 与 T 的关系	$T=1-R$	$T_{\perp}=1-R_{\perp}$	$T_{\parallel}=1-R_{\parallel}$

注：(1) $\sin\theta_t=\sqrt{\mu_1\varepsilon_1/\mu_2\varepsilon_2}\sin\theta_i$；(2) $\eta_1=\sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}$；(3) $\eta_2=\sqrt{\mu_2/\varepsilon_2}$；(4) 对于非磁性媒介，$\eta_2/\eta_1=n_1/n_2$。

例 8-7　光束

具有圆形横截面功率为 5W 的光束，从空气入射到折射率为 5 的电介质媒介的平面边界上。如果入射角度为 60°，入射波为平行极化，试确定透射角以及反射光束与

透射光束所获得的功率。

解答：根据式（8.56）有

$$\sin\theta_t = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i = \frac{1}{5}\sin 60° = 0.17$$

即

$$\theta_t = 10°$$

因为 $\varepsilon_2/\varepsilon_1 = n_2^2/n_1^2 = (5)^2 = 25$，平行极化时的反射系数可以利用式（8.68）计算如下

$$\Gamma_\parallel = \frac{-(\varepsilon_2/\varepsilon_1)\cos\theta_i + \sqrt{(\varepsilon_2/\varepsilon_1) - \sin^2\theta_i}}{(\varepsilon_2/\varepsilon_1)\cos\theta_i + \sqrt{(\varepsilon_2/\varepsilon_1) - \sin^2\theta_i}} = \frac{-25\cos 60° + \sqrt{25 - \sin^2 60°}}{25\cos 60° + \sqrt{25 - \sin^2 60°}} = -0.435$$

因此，反射与透射的功率为

$$P_\parallel^r = P_\parallel^i\,|\Gamma_\parallel|^2 = 5(0.435)^2 = 0.95\text{W}$$

$$P_\parallel^t = P_\parallel^i - P_\parallel^r = 5 - 0.95 = 4.05\text{W}$$ ■

8.7 几何光学

在前面的分析里，探讨了均匀平面电磁波入射到不同材料的平面边界上时，所表现的反射和折射行为。实际上，在波与物质的相互作用中，有可能牵涉到既非均匀，也非平面的波。此外，与波相互作用的物体，也可以具有任何的形状和尺寸怎样去利用前面几节中得出的结论去处理实际问题呢？答案在很大程度上取决于物体的尺寸以及其表面相对入射波波长的弯曲程度。有两种基本方法可以用来描述波与物质间的相互作用，即物理光学的方法和几何光学的方法。*物理光学*（physical optics）也称*波动光学*（wave optics），其中，波是用各种属性，如振幅、相位系数、极化矢量等从数学上进行描述的。相反，*几何光学*（geometric optics）则常称为*射线光学*（ray optics），其中，波用光线来表示，光线代表波能量行进的方向。在几何光学中，没有明确论及波的相位、极化等属性。因此，几何光学可以看成是物理光学的一种光线近似。尽管物理光学在数学上更加高级，其公式可以追溯到麦克斯韦方程组，但同几何光学相比，它的应用在数学上较为复杂，因此，只有当几何光学不可用时，或所要求的精度为几何光学所难以达到时，才使用物理光学。*通常，当电磁波所照射的物体的尺寸远大于波长 λ 时，几何光学方法可以提供相当精确的结果。*另外一个要求就是，物体表面的曲率相对 λ 应该比较光滑。

319

由于几何光学将波看成具有能量的射线，因而无法计算到达空间同一点的多个波之间的相对相位。因此，由于同相相加和反相相减而引起的*干涉效应*（interference effect），在几何光学中是无法预测出来的。几何光学所忽略的另外一个波动现象是衍射（diffraction），它是一种同几何光学的直线表示法是相背离的波动现象。衍射说明波在物体的边角处发生了“弯曲”。为了说明衍射到底指什么，考虑图8-20所示的三种情况。在图8-20a中，平面波入射到一个不透光的屏障，上面开有直径为 d 的圆形小孔，但 d 远大于波长 λ。除一些小的边缘效应外，从开口出来的波继续沿着直线传播。这种情况符合几何光学的条件，即反射边界的尺度（透明媒介时）或不透明

边界上开口的尺度，应该远大于 λ。图 8-20b、图 8-20c 分别对应开口直径同 λ 不相上下的情况，以及远小于 λ 的情况。在这两种情况下，入射波都受到了开口的衍射，结果导致出来的波不再是平面波。为了解释波的干涉和衍射，必须使用电磁波的物理光学表示法。应该注意的是，在"几何光学"、"物理光学"中，采用"光学"这个术语是历史的原因，这并不表示相应的方法只能用于光学系统，事实上这些方法适用于整个电磁频谱。

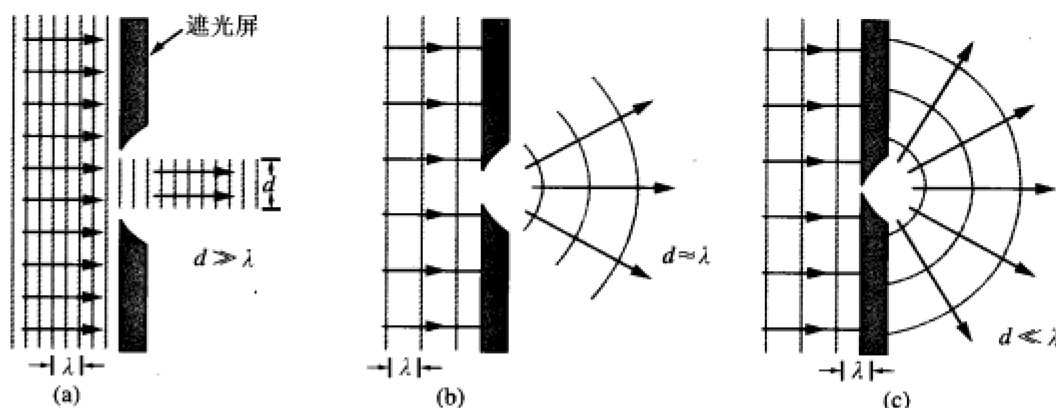


图 8-20　波长为 λ 的平面波，入射到开小孔（直径为 d）的遮光屏上。从开口出来的波，在 $d \gg \lambda$ 的情况下，将保持原来的方向，如图 a 所示；在 $d \approx \lambda$ 的情况下，将发生衍射，如图 b 所示；在 $d \ll \lambda$ 的情况下，将如同从一个点源发射出来的球面波，如图 c 所示

接下来的两个小节，意在提供几何光学的一个全貌，其重点将放在如何将反射镜、透镜用于成像设备中。

8.8　反射镜成像

反射镜普遍使用在整个电磁频谱中，包括 X 射线、紫外线、可见光、红外线以及无线电区间。反射镜通常是在电介质底层（如玻璃）上，覆上一个薄层的银或铝而制成。理想的反射镜是反射率为 1 的理想导电表面，类似于传输线的端口短路的情况。在本节中，将分析平面反射镜和球面反射镜的成像原理。

320

8.8.1　平面反射镜成像

在图 8-21 中，点源在平面镜前方 s 远处的 O 点，其中 s 称为物距（object distance）。点源辐射球面波，既可以用图 8-21a 的波前表示，也可以等效地用图8-21b的光线表示。对于位于图中位置的观测者，反射光线似乎来自反射镜后面距离为 s' 的点 I 处，其中 s' 称为像距（image distance）。如果反射的光线真实通过成像点，则所成的像称为实像（real image）；如果光线实际上没有通过成像点，而是表现为从成像点离开，则所成的像称为虚像（virtual image）。这里讨论的平面反射镜所成的像为虚像。

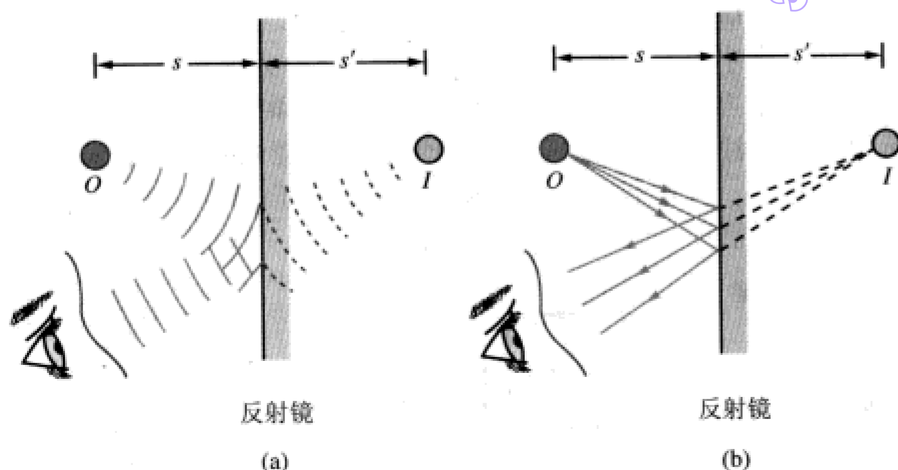


图 8-21　平面反射镜反射的成像过程可以用球面波前来描述，如图 a 所示，也可以用位于点 O 的光源发射的光线来说明，如图 b 所示

对于一个自身发光或被外部照亮、由大量点源构成的物体，将点源成像的过程进行扩展，就可以得到该物体的像，如图 8-22 所示。为了确定成像于何处，有必要采用至少两条被镜面反射的光线。以点 P 的像点 P' 为例，它位于水平射向镜面并反射回自身的光线，以及从镜面上的 B 点斜反射的光线二者的交点上。因为三角形 PAB 和 $P'AB$ 是全等的，所以 $s=s'$，$h=h'$。

321

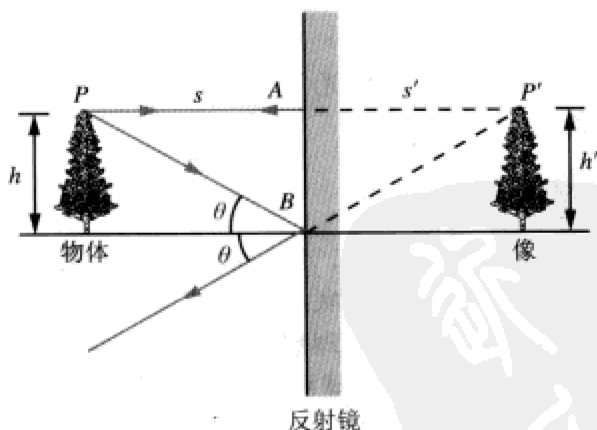


图 8-22　成像的位置以及方向取决于几何光学以及斯涅耳反射定律

8.8.2　球面反射镜成像

球面反射镜由球面的一部分，经油漆或覆盖上高反射率的材料而制成。当使用其内表面反射光线时，称为凹镜（concave mirror），如图 8-23a 所示；当采用其外表面进行反射时，称为凸镜（convex mirror），如图 8-23b 所示。球面镜的球心称为曲率中心（center of curvature），记为点 C，其半径 R 则称为曲率半径（radius of curvature）。球面镜的主轴（principal axis）是连接点 C 和点 V 的直线，其中点 V 是镜面的中心点（顶点）。在图 8-23a 中，高度为 h、物距为 s 的物体，所成的像为反向实像，

高度为 h'，像距为 s'。在夹角为 θ 的大三角形中，有 $\tan\theta = h/s$，而在夹角为 θ 的小三角形中，$\tan\theta = -h'/s'$，其中的负号表示像是反向的，因为 h' 为负。反射镜的横向放大率（lateral magnification）定义为 h' 同 h 的比值

$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{s'}{s} \tag{8.84}$$

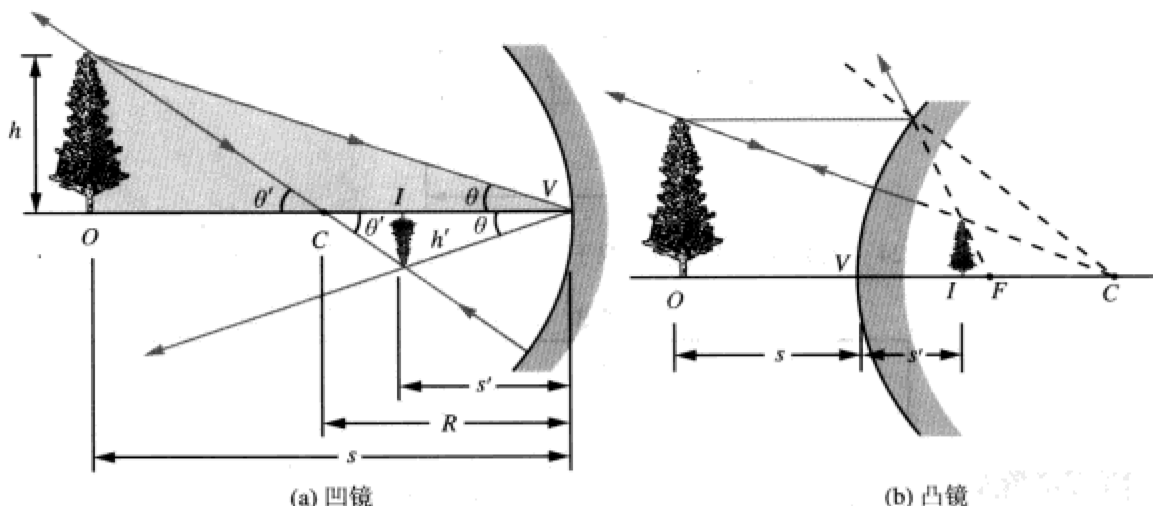


图 8-23 凹镜与凸镜的成像

在具有对角 θ' 的两个相似三角形中

$$\tan\theta' = \frac{h}{s-R} = -\frac{h'}{R-s'} \tag{8.85}$$

综合式（8.84）和式（8.85）可得反射镜方程（mirror equation）

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} \tag{8.86}$$

相对于 R，当物体远离镜面时，可以认为其位于无穷远处，此时，$1/s \approx 0$，$s' \approx R/2$。因此像点位于像点位于曲率中心点 C 和镜面中心点 V 之间的中点，如图 8-24 所示。这时的像点称为焦点（focal point），用 F 表示，相应的像距称为反射镜的焦距（focal length），用 f 表示。即

$$f = \frac{R}{2}, \tag{8.87}$$

322

反射镜方程可以重写为用 f 表达的形式

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \tag{8.88}$$

无穷远处的物体成像在焦点处，相反，位于焦点处的物体，成像在无穷远处。

只要遵从表 8-3 的符号惯例，则式（8.84）和式（8.88）既可用于凹镜，也可用于凸镜。在符号惯例中牵涉到了两个区域：（1）镜面的前侧，即光线真实存在的区域；（2）镜面的后侧，即真实物体的虚像形成的一侧。对于图 8-23a、图 8-23b 中的两个反射镜，前侧是反射镜的左侧。注意凹镜的 f 是正的，而凸镜的 f 是负的。

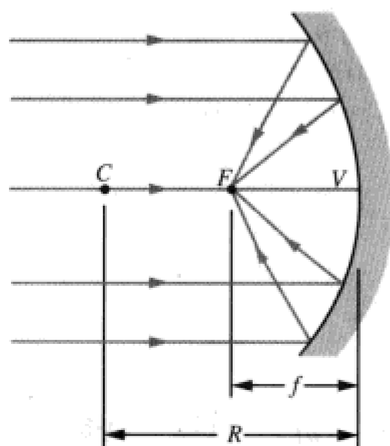


图 8-24 无穷远处的源点成像于反射镜的焦点。焦距为 $f=R/2$

表 8-3 球面反射镜的符号惯例



D8.7-8.8

物理量	符号	条件
s	+	如果物体位于镜面的前侧（真实物体）
s	−	如果物体位于镜面的后侧（虚幻物体）
s'	+	如果成像位于镜面的前侧（实像）
s'	−	如果成像位于镜面的后侧（虚像）
f 及 R	+	如果 C 位于镜面的前侧（凹镜）
f 及 R	−	如果 C 位于镜面的后侧（凸镜）

注：（1）镜面的前侧定义为光往镜面靠近的一侧，而不管镜面的形状如何；（2）在单一镜面反射中，物体不可能是虚幻物体，但如果它的成像是虚像的话，则该虚像可以作为虚幻物体，再由其他镜面进行反射成像。

成像的放大率与取向（直立或倒立），决定于反射镜的类型（凹镜或凸镜）以及物体相对镜面中心的位置。表 8-4 针对不同的物体位置，对以上属性进行了总结。

表 8-4 真实物体的球面镜成像[1]

凹镜				
物体	像			
位置	类型	位置	取向	相对尺寸
$2f<s<\infty$	实像	$2f>s'>f$	倒立	缩小
$s=2f$	实像	$s'=2f$	倒立	同尺寸
$f<s<2f$	实像	$\infty>s'>2f$	倒立	放大
$s=f$		$s'=\infty$		
$s<f$	虚像	$\|s'\|>s$	直立	放大
凸镜				
物体	像			
位置	类型	位置	取向	相对尺寸
任何位置	虚像	$\|s'\|<\|f\|$, $s>\|s'\|$	直立	缩小

1. 选自 E. Hecht 的 *Optics*（第二版），Addison-Wesley 公司，1990 年。

例 8-8 凹镜成像

凹镜的焦距为 15cm，一朵花位于镜面前方 20cm 处。确定像的位置并对其描述。

解答：将 $s=20\text{cm}$，$f=15\text{cm}$ 代入式（8.88）可得：

323

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{15}$$

因此，$s'=60\text{cm}$。根据式（8.84）可得横向放大率为

$$M=-\frac{s'}{s}=-\frac{60}{15}=-4$$

放大率 M 表示像的放大倍数为 4，负号表示像是倒立的。■

8.9 球面透镜成像

透镜成像通常用在光学仪器中，例如用在照相机、望远镜以及显微镜中，但其在非成像的场合也有应用，此外，它还被扩展应用到电磁频谱的其他许多频段上。透镜有三个特征参数：尺寸、形状和折射率。此处的讨论将仅限于图 8-25 所示的、具有球面或平面的薄透镜。对于每个透镜，其两个表面的曲率半径 R_1 和 R_2 的符号，由表 8-5 列出的符号惯例决定，稍后将对这些惯例进行讨论。凸透镜也称会聚透镜（converging lens）或正透镜（positive lens），其中心比边缘要厚。相反，凹透镜，也称发散透镜（diverging lens）或负透镜（negative lens），其中心比边缘薄。

324

D8.9-8.10

表 8-5 球折射面以及薄透镜的符号惯例

物理量	符号	条件
s	+	如果物体位于表面的前侧（真实物体）
s	−	如果物体位于表面的后侧（虚幻物体）
s'	+	如果成像位于表面的后侧（实像）
s'	−	如果成像位于表面的前侧（虚像）
R	+	如果 C 位于表面的背侧
R	−	如果 C 位于表面的前侧
f	+	凸透镜
f	−	凹透镜

注：（1）表面的前侧定义为光线往表面靠近的一侧；（2）在单一表面折射的情况下，一个物体不可能是虚幻的，但如果其成像为虚像的话，则该虚像可以作为虚幻物体，被另外一个表面折射。

透镜的成像过程牵涉到其两个表面的折射。作为理解这个过程的第一步，先考虑图 8-26 所示折射率为 n_1 和 n_2 的两媒介之间的球形边界的折射问题。位于点 O 的点源，其辐射出的球面波，用从源中发射出来的径向射线表示，这些射线沿着能量流的方向。当一根射线到达球面边界上某一点时，就如同该边界面是过该点同球面相切的平面的一部分那样，根据斯涅耳定律，将发射反射和折射。在到达点 I 的所有能量中，大部分源自入射到透镜中央区域的射线。从源发出、在球面中央区域的点上发生折射的光线，称为傍轴光线（paraxial ray）。这些光线在单个点上形成了源的像，叫作像点。成像过程可以通过考虑任何一条傍轴光线来进行说明。以图 8-27 中同水

325

平轴成 ϕ 角的傍轴光线为例，在点 A，由斯涅耳折射定律可得

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 , \tag{8.89}$$

凸透镜	R_1 R_2 $R_1 > 0$ $R_2 < 0$ 双凸透镜	$R_1 = \infty$ $R_2 < 0$ 平凸透镜	$R_1 > 0$ $R_2 > 0$ $R_1 < R_2$ 新月形凸透镜
凹透镜	$R_1 < 0$ $R_2 > 0$ 双凹透镜	$R_1 = \infty$ $R_2 > 0$ 平凹透镜	$R_1 > 0$ $R_2 > 0$ $R_1 > R_2$ 新月形凹透镜

图 8-25 不同形状的凸透镜和凹透镜。图中标示的曲率半径，是针对光从透镜左侧照射而定的。凸透镜具有正的焦距，而凹透镜则具有负的焦距

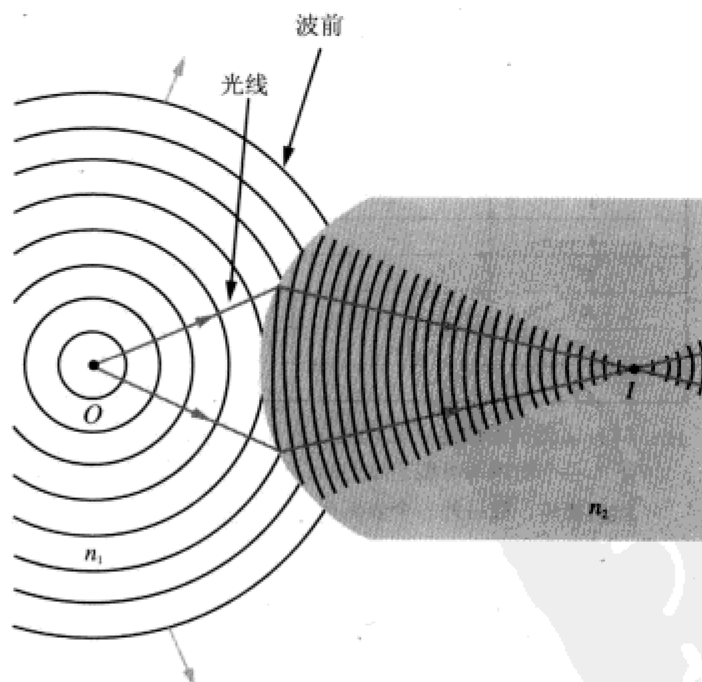


图 8-26 位于点 O 的光源所辐射的球面波，被媒介 2 的球面边界所折射（$n_2 > n_1$）

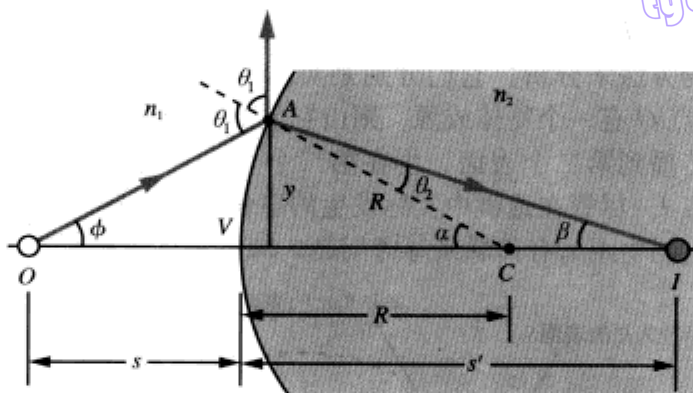


图 8-27 球面边界上的光线折射

其中 θ_1 为球面上点 A 处由球面曲率中心点 C 往外的法向与 $\overline{OA}$ 之间的夹角。在球面的中心区域，角 θ_1 和 θ_2 很小，完全可以应用近似 $\sin\theta_1 \approx \theta_1$ 以及 $\sin\theta_2 \approx \theta_2$。因此，式（8.89）可以重写为

$$n_1\theta_1 \approx n_2\theta_2 \tag{8.90}$$

利用三角形 OAC 和 AIC 的几何关系，可知外角 θ_1 等于角 ϕ 与 α 之和，同样，α 等于 θ_2 和 β 之和。因此，

$$\theta_1 = \phi + \alpha, \tag{8.91a}$$

$$\alpha = \theta_2 + \beta \tag{8.91b}$$

利用这些关系代替式（8.90）中的 θ_1、θ_2，可得

$$n_1\phi + n_2\beta = (n_2 - n_1)\alpha \tag{8.92}$$

基于早先已经注意到的傍轴近似，可以针对角度 ϕ、α 和 β 应用近似公式 $\tan\theta \approx \theta$，即，

$$\phi \approx \tan\phi = \frac{y}{s}, \tag{8.93a}$$

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{y}{R}, \tag{8.93b}$$

$$\beta \approx \tan\beta = \frac{y}{s'}, \tag{8.93c}$$

其中 s 和 s' 分别是物距和像距，R 则是球面的曲率半径。将以上关系代入式（8.92）并将每项除以 y，可得

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad \text{（单个球面边界的情况）} \tag{8.94}$$

由于当源距 s 固定时，像距 s' 独立于光线与轴线间的夹角 ϕ，因此所有的傍轴光线都聚焦于像点 I。

反射镜所产生的实像与实物在同一侧，与此相反，折射面所产生的实像，则位于光源的相反侧。球面折射表面的符号惯例如表 8-5 所示，后面将要介绍的薄透镜也采用这一惯例。

现在将上述结果，推广到包含两个球面的透镜，如图 8-28 所示，其中两球面的

曲率半径分别为 R_1 和 R_2。设透镜的折射率为 n_1，周围媒介的折射率为 n_m。成像过程可以用两种不同的方法来分析，它们分别是实际成像过程法和等效成像过程法。如果在图 8-28 中的点 O 有一个物体或源，则由它发出的光线，将在透镜的第一个表面发生折射，然后传播到第二个表面，再在第二个表面上发生折射，所有的傍轴光线最终都将交于像点 I。尽管在透镜中实际发生的事情就是这样简单，但光线为什么会交于点 I，像距 s'_2 同物距 s_1 有何联系等等问题，却不是显而易见的。

326

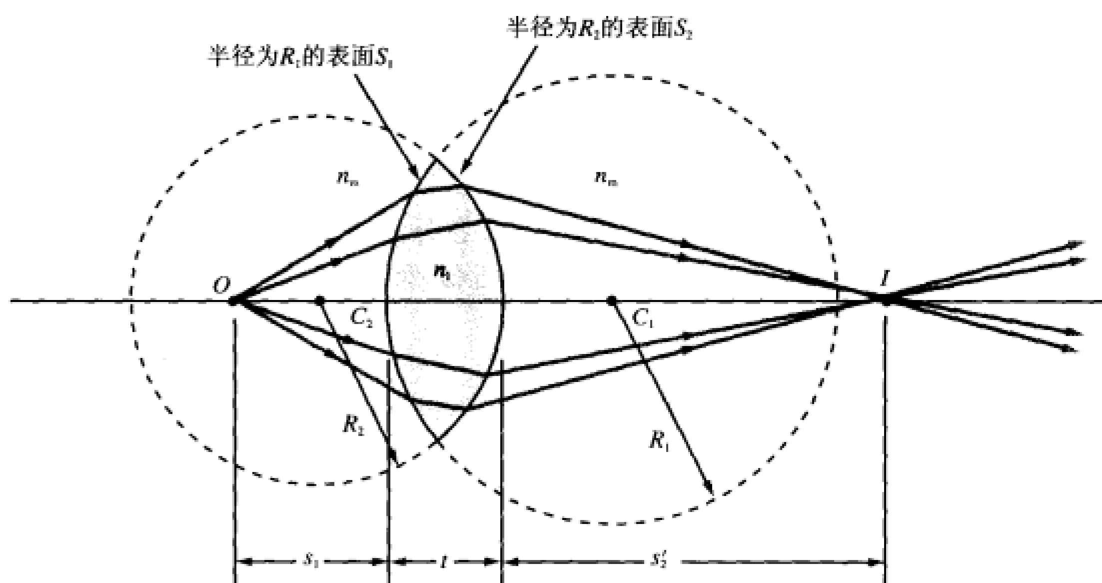


图 8-28　薄透镜的成像

上述问题，可以用等效成像过程来分析，即把透镜两个表面的折射效应，分解为两个连续的步骤。先单独考虑第一个表面，将它看成是物体所在媒介与扩大了的透镜媒介（折射率为 n_1）的交界面，这同前面图 8-27 所处理的交界面情况相同。在图 8-29 中，位于点 O 的物体，产生像点 I_1，其到表面 S_1 的距离为 s'_1。对于图 8-29 中选定的物体位置，像 I_1 是虚像。在式（8.94）中，用 n_m 替代 n_1，用 n_1 替代 n_2，可以得到距离 s_1 和 s'_1 之间的关系如下：

$$\frac{n_m}{s_1}+\frac{n_1}{s'_1}=\frac{n_1-n_m}{R_1}, \tag{8.95}$$

其中 R_1 是表面 S_1 的曲率半径。接下来，再将像 I_1 看成虚拟物体（其到面 S_2 的距离为 s_2），针对透镜面 S_2 重复上述过程。此时，应将 S_2 看成是折射率为 n_1 的左侧媒介（包含物体 I_1）和折射率为 n_m 的右侧媒介的交界面。这种情况下，在应用式（8.94）时，应该将 n_1 和 n_m 对调。所以，对于透镜面 S_2，最终的像 I_2 的像距 s'_2 同 s_2 的关系为

327

$$\frac{n_1}{s_2}+\frac{n_m}{s'_2}=\frac{n_m-n_1}{R_2} \tag{8.96}$$

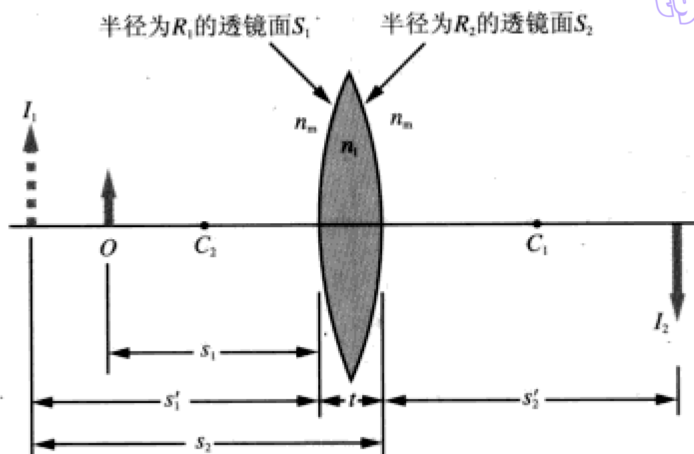


图 8-29 物体 O 的像 I_2，可以这样获得：先确定透镜面 S_1 的成像 I_1，再将 I_1 作为透镜面 S_2 的物体进行成像

对透镜面 S_2 而言，其物体 I_1 位于它的前侧（来自 I_1 的光线所在的一侧）。因此根据符号惯例，距离 s_2 必须为正，即 $s_2 = |s_2|$。当对透镜面 S_1 的像距 s'_1 应用符号惯例时，可以看到，由于像与物体 O 在同一侧，因此 s'_1 必须为负，即 $s'_1 = -|s'_1|$。根据图 8-29 有

$$|s_2| = |s'_1| + t, \tag{8.97}$$

其中 t 是透镜的厚度。因为 s'_1 为负、s_2 为正，所以

$$s_2 = -s'_1 + t \tag{8.98}$$

将式（8.98）代入式（8.96），再将式（8.95）和式（8.96）加到一起可得

$$\frac{n_m}{s_1} + \frac{n_m}{s'_2} = (n_l - n_m)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{n_l t}{s'_1(s'_1 - t)} \tag{8.99}$$

对于厚度 t 足够小的薄透镜，可以忽略最后一项，于是得到下述薄透镜方程（thin-lens equation）

$$\frac{n_m}{s_1} + \frac{n_m}{s'_2} = (n_l - n_m)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{8.100}$$

可见，根据符号惯例，对于图 8-29 中的双凸透镜，其 $R_1 > 0$、$R_2 < 0$。凹面、凸面及平面等各种曲率半径的表面，可以组合出多种透镜，如图 8-25 所示。

如果周围媒介是空气的话（$n_m = 1$），则式（8.100）将简化为镜匠公式（lensmaker's formula）

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \quad (\text{对薄透镜}), \tag{8.101}$$

其中把式（8.100）中使用的 s_1、s'_2 和 n_l 的下标省略了。由于 t 很小，可以忽略，因此直接将 s 和 s' 分别当作物距和像距，大小则从透镜的中心开始度量，如图 8-30 所示。

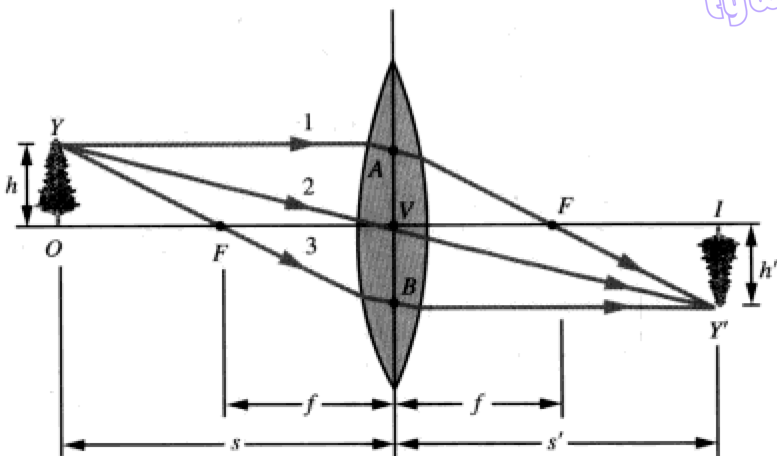


图8-30　在薄透镜情况下，物体与像之间的旋转关系

在8.8.2节中，定义了反射镜的焦距f，它等于当物体移动到无穷远处时的像距。针对透镜，采用同样的定义，可以得到

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right), \tag{8.102}$$

因此，式（8.103）可以重写为

328

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f}\quad（高斯透镜公式） \tag{8.103}$$

这就是著名的高斯透镜公式（Gaussian lens formula），它同反射镜的式（8.88）在形式上完全相同。薄透镜采用的符号惯例，与球面折射的完全相同（表8-5）。凸透镜具有正的焦距，凹透镜具有负的焦距。根据高斯透镜式（8.103），如果物体位于无穷远处（$s=\infty$），则$s'=f$。这意味着，来自无穷远处的光线（平行于光轴），经透镜折射之后，将会聚于焦点F。如果是凸透镜，则焦距为正，如图8-31a，如果是凹透镜，则焦距为负，如图8-31b所示。凸透镜是聚光镜，而凹透镜则为散光镜。

高斯透镜公式（8.103）还表明，如果物体位于焦点处（$s=f$），则$s'=\infty$。对应的光线表示法如图8-31c、图8-31d所示。薄透镜的这两个性质，对于确定物体成像的位置以及像的相对大小，极其有用。例如，在图8-30中，位于O处的物体，高度为h，其尖端用Y标记。像位于I处，是倒立的，高度为h'（此处为负值），其尖端位于点Y'（点Y'是光线1、2和3的交汇点）。光线1沿着平行于光轴的方向到达透镜，然后经由透镜的折射，然后在经过焦点F的方向上出射（在发散透镜的情况下，光线1看起来好像是来自透镜左侧的焦点）。光线3从点Y出发，经过透镜左侧的焦点到达透镜，经透镜折射后，出现在平行于光轴的方向上。薄透镜的第三个极其有用的性质，跟通过透镜中心的光线有关。通过透镜中心的这种光线，譬如图8-30中光线2，它们通过透镜而不会发生偏折，这就意味着，点Y和Y'是由通过透镜中心点的一条直线相连的。

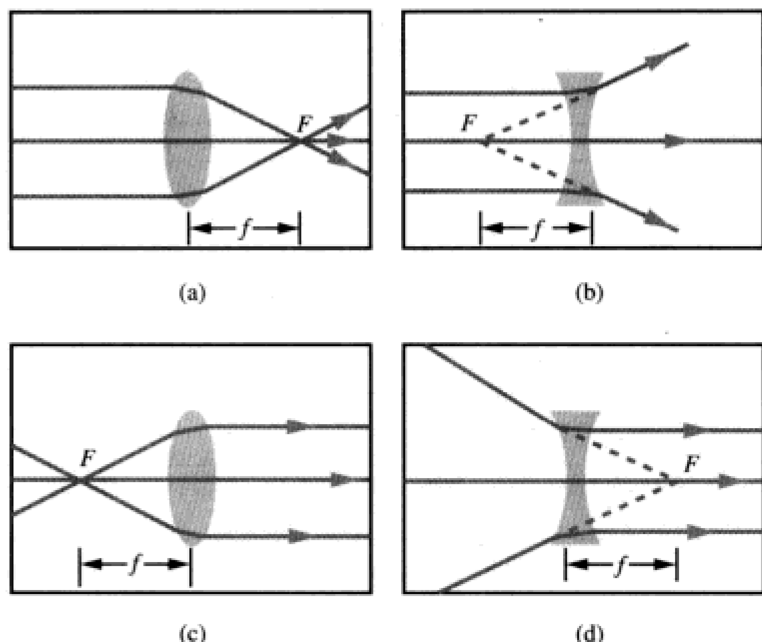


图 8-31 如图 a、b 所示，无穷远处的物体，成像于焦点处；若物体在焦点处，则成像于无穷远处，如图 c、d 所示

对于透镜左侧物体发出的光线，薄透镜的光线性质可以概括如下：

（1）对于聚光透镜，沿着平行于光轴方向到达透镜的光线，譬如图 8-30 中的光线 1，将受到透镜的折射，出来的光线将经过透镜右侧的焦点 F。在发散透镜的情况下，折射后的光线将好像是来自透镜的左侧焦点，如图 8-31b 所示。

（2）无论聚光透镜还是发散透镜，射向透镜中心的光线，譬如图 8-30 中的光线 2，当其从透镜出来时，不会发生方向的偏折。

（3）对于聚光透镜，经过透镜左侧焦点而来的光线，譬如图 8-30 中的光线 3，被透镜折射之后，将与光轴平行。对于发散透镜，沿着右侧焦点方向行进的光线，例如图 8-31d 中的光线，在被透镜折射之后，将变成平行于光轴的方向，就好像它们是沿着平行光轴的方向从透镜的左侧来的一样。

薄透镜的横向放大率定义为像高 h' 同实物高 h 的比值。根据图 8-30 有，

329

$$M=\frac{h'}{h}=-\frac{s'}{s}. \tag{8.104}$$

对于图 8-30 所示的例子，由于 h' 为负值，因此 M 也是负的。根据符号惯例，此时的 s 和 s' 都是正的。可见，为了获得正的 M（对应直立的像），s' 必须为负（假定成像的目标是实在的，s 为正），这对应于一个虚像。因此，透镜可以在其右侧产生一个倒立的实像，或者在其左侧产生一个直立的虚像。凸透镜和凹透镜的成像特性全部列在表 8-6 中。

表 8-6　实体的薄透镜成像[1]

凸透镜				
物体	像			
位置	类型	位置	方向	相对尺寸
$2f<s<\infty$	实像	$2f>s'>f$	倒立	缩小
$s=2f$	实像	$s'=2f$	倒立	相同大小
$f<s<2f$	实像	$\infty>s'>2f$	倒立	放大
$s=f$		$s'=\infty$		
$s<f$	虚像	$\lvert s'\rvert>s$	直立	放大
凹透镜				
物体	像			
位置	类型	位置	取向	相对尺寸
任何位置	虚像	$\lvert s'\rvert<\lvert f\rvert$, $s>\lvert s'\rvert$	直立	缩小

1. 节选自 E. Hecht 的 *Optics*（第二版），Addison-Wesley 公司，1990 年。

D8.9-8.10

上述的成像过程可以扩展到由多个透镜组成的成像系统。例如，在两透镜系统中，第一个透镜所成的像，被用作第二个透镜的成像物体。

例 8-9　双凸透镜的成像

一支 5cm 高的铅笔，放置在曲率半径分别为 50cm 和 12.5cm 的双凸透镜的前方 25cm 处。如果透镜的折射率为 1.5，试确定成像位置以及像的性质。

解答：双凸透镜具有正的焦距 f，对应的半径 $R_1>0$、$R_2<0$（见图 8-25）。可以取 $R_1=50\text{cm}$, $R_2=-12.5\text{cm}$，或取 $R_1=12.5\text{cm}$，$R_2=-50\text{cm}$。当应用式（8.102）时，两种取法获得的 f 相同。由第一种取法可得

$$\frac{1}{f}=(1.5-1)\left(\frac{1}{0.5}-\frac{1}{-0.125}\right),$$

由此可得 $f=0.2\text{m}$。根据式（8.103）有

330

$$\frac{1}{0.25}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{0.2},$$

由此可得 $s'=1\text{m}$。

横向放大系数为

$$M=\frac{h'}{h}=-\frac{s'}{s}=-\frac{1}{0.25}=-4$$

因此，铅笔的像是倒立的（M 为负），其高度为 $h'=-4\times5\text{cm}=-20\text{cm}$。■

复习题

Q8.8　几何光学应用的条件是什么？

Q8.9　什么是傍轴光线？对于这种光线可以做哪些近似？

Q8.10　什么是薄透镜近似？

练习 8.10　证明：对于平面折射面，式（8.94）退化为 $s'=-(n_2/n_1)s$。（参见●）

练习 8.11　对于曲率半径为 10cm、折射率为 1.5 的平凹透镜，计算其焦距。

答案：$f=-20\text{cm}$。（参见❀）

本章要点

- 在两种媒介的交界面上，描述平面电磁波的反射、透射行为的各种关系式，都是满足边界上的 **E**、**H** 切向分量连续性条件的必然结果。
- 斯涅耳定律指出，$\theta_i=\theta_r$和 $\sin\theta_t=(n_1/n_2)\sin\theta_i$。对于 $n_2<n_1$的两种媒介，当$\theta_i\geq\theta_c$时，入射波被完全反射，这里 θ_c是临界角，$\theta_c=\sin^{-1}(n_2/n_1)$。
- 利用连续多次反射的机理，可以利用光纤来对光进行引导。光纤所能传输的数字脉冲的最大数据率，是由模式色散决定的。
- 对于给定的极化状态，在布儒斯特角时，入射波的透射部分将全部沿着交界。对于非磁性材料，仅仅在平等极化状态下才存在布儒斯特角。
- 任何入射到平面交界上的平面波，都可以看成是一个垂直极化波和一个平行极化波的之和的合成。
- 传输线等效模型可用于描述媒介交界上波的传播、反射以及透射。
- 在几何光学中，波用沿着直线行进的光线表示。几何光学可用于反射镜和透镜的成像分析，只要光波所作用的物体尺寸相对光波长本身足够大，并且物体表面相对光波长 λ 足够光滑，几何光学就成立。

重要术语汇总

请说明下列术语的意义或给出定义：

光线	波前	反射系数 Γ	透射系数 τ
驻波比 S	斯涅耳定律	入射角、反射角、透射角	折射角
折射率 n	稠密媒介	表面波	临界角 θ_c
完全内反射	接收角 θ_a	模式色散	平行极化
垂直极化	入射平面	横电（TE）极化	横磁（TM）极化
相位匹配条件	布儒斯特角 θ_B	极化角	掠入射
反射率 R	透射率 T	物理光学（波动光学）	几何光学（射线光学）
干涉效应	衍射	物距和像距	实像和虚像
曲率中心和曲率半径		反射镜或透镜的主轴	横向放大系数 M
凸面和凹面	反射镜方程	反射镜或透镜的焦距，f	反射镜或透镜的焦点，F
反射镜或透镜的前侧、后侧		傍轴光线	薄透镜
镜匠方程	高斯透镜公式		

331

习题

8.2 垂直入射波的反射与透射

8.1* 空气中某平面波的电场幅值为10V/m，垂直入射到 $\varepsilon_r=25$ 的无耗非磁性媒介的表面。试确定：

(a) 反射系数和透射系数；

(b) 在空气中的驻波比；

(c) 入射波、反射波以及透射波的平均功率密度。

8.2 在 $\varepsilon_{r_1}=2.25$ 的媒介1中行进的平面波，垂直入射到 $\varepsilon_{r_2}=4$ 的媒介2上。两媒介都是非磁性、不导电的材料。如果入射波的电场为

$$\boldsymbol{E}^i=\hat{\boldsymbol{y}}4\cos(6\pi\times10^9t-30\pi x)\quad(\text{V/m})$$

(a) 求每种媒介中，电场、磁场的时域表达式；

(b) 确定入射波、反射波以及透射波的平均功率密度。

8.3 在 $\varepsilon_{r_1}=9$ 的媒介中行进的一个平面波，垂直入射到 $\varepsilon_{r_2}=4$ 的另一媒介上。两媒介都由非磁性、不导电的材料构成。如果入射波的磁场为

$$\boldsymbol{H}^i=\hat{\boldsymbol{z}}2\cos(2\pi\times10^9t-ky)\quad(\text{A/m})$$

(a) 求在每种媒介中，电场、磁场的时域表达式；

332

(b) 确定入射波、反射波以及透射波的平均功率密度。

8.4 一个200MHz的左旋圆极化平面波，电场强度的模为10V/m，在空气中垂直入射到 $\varepsilon_r=4$ 的电介质媒介（充满整个 $z\geqslant0$ 的区域）。

(a) 假定入射波的电场在 $z=0$ 处、$t=0$ 时刻有一个正最大值，写出入射波的电场相量表达式；

(b) 计算反射系数和透射系数；

(c) 写出反射波、透射波的电场相量表达式，以及 $z\leqslant0$ 区域中的总电场；

(d) 确定在入射平均功率中，被边界反射的功率百分比，以及透射到第二种媒介的功率百分比。

8.5* 将电介质媒介替换为 $\varepsilon_r=2.25$，$\mu_r=1$，$\sigma=10^{-4}$S/m 的不良导体，重做习题8.4。

8.6 一个50MHz的平面波，电场幅值为30V/m，在空气中垂直入射到 $\varepsilon_r=36$ 的半无穷大理想电介质媒介。确定：

(a) Γ；

(b) 入射波和反射波的平均功率密度；

(c) 在空气中，到边界最近的电场强度 $|\boldsymbol{E}|$ 的最小值点到边界的距离。

8.7* 在习题8.6中，在空气中总电场的最大振幅是多少？其中到边界距离最近的最大振幅点发生在何处？

8.8 将电介质媒介替换为 $\varepsilon_r=1$，$\mu_r=1$，$\sigma=2.78\times10^{-3}$S/m 的导体，重做习题8.6。

8.9 在图8-32所示的三个区域中，媒介都是理想电介质。在媒介1中，一个电磁波垂直入射到 $z=-d$ 处的边界上，问什么样的 ε_{r_2}、d 组合，才不会发生反射？并利用 ε_{r_1}、

---

* 答案见附录D。

解答见CD-ROM。

ε_{r_3}以及电磁波振荡频率f来对答案进行解释。

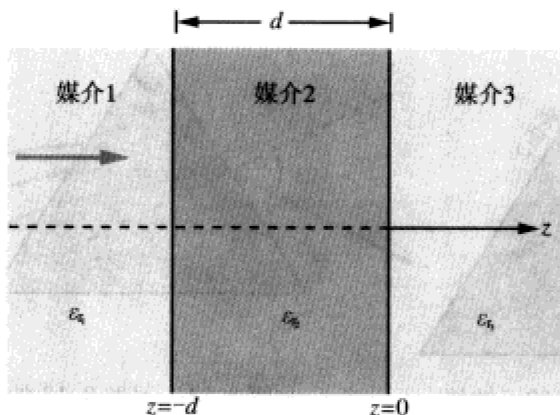


图 8-32　习题 8.9 ~ 8.11 的电介质层

8.10　对于图 8-32 的配置，如果 $\varepsilon_{r_1}=1$，$\varepsilon_{r_2}=9$，$\varepsilon_{r_3}=4$，$d=1.2\text{m}$，$f=50\text{MHz}$，使用传输线方程（或史密斯圆图）计算在 $z=-d$ 处的输入阻抗。并确定入射的平均功率密度中，被该结构反射的比例。设所有媒介都是无耗、非磁性的。

8.11* 交换 ε_{r_1} 和 ε_{r_3}，重做习题 8.10。

8.12　空气中波长为 0.61μm 的橙光，入射到 $\varepsilon_r=2.25$ 的一块玻璃上。对于镶嵌在玻璃中的传感器，光线将呈现什么颜色？已知颜色的波长范围是，紫色（0.39μm ~ 0.45μm），蓝色（0.45μm ~ 0.49μm），绿色（0.49μm ~ 0.58μm），黄色（0.58μm ~ 0.60μm），橙色（0.60μm ~ 0.62μm），红色（0.62μm ~ 0.78μm）。

333

8.13* 某未知频率的平面波，在空气中垂直入射到理想导体的表面。利用电场强度计测得，在空气中距离导体表面 2.5m 处的点上，总电场强度始终为 0，并且在更靠近导体的范围内，未再发现其他零点。入射波的频率是多少？

8.14　真空波长为 $\lambda=0.6\mu\text{m}$ 的黄光，从空气中照射到一个肥皂泡的薄膜上。如果将薄膜看成 $\varepsilon_r=1.72$ 的平面电介质薄板，两侧为空气，问当薄膜多厚时，将对垂直入射的黄光产生强烈反射？

8.15* 一个 5MHz 的平面波，电场幅值为 20V/m，从空气中垂直入射到半无穷大的导体表面，该导体材料 $\varepsilon_r=4$、$\mu_r=1$、$\sigma=100\text{S/m}$。在导体媒介具有 2mm 透入深度的情况下，求每单位横截面积的平均功率损耗。

8.16　一架飞机载着 0.5MHz 的天线，在海洋上空飞行，天线产生的电磁波的电场幅值为 3000V/m，以平面波的形式垂直入射到海水表面。海水的参数为 $\varepsilon_r=72$、$\mu_r=1$、$\sigma=4\text{S/m}$。飞机试图向水面下 d 处的潜艇传递信息。如果潜艇的接收器要求的最小信号幅值为 0.1μV/m，能够进行成功通信的最大深度 d 是多少？

8.3、8.4　斯涅耳定律以及纤维光学

8.17* 如图 8-33 所示，空气中一束光线以 θ 角度入射到一个三棱镜。光线在第一、第二表面先后发生折射。以三棱镜的顶角 ϕ 和折射率 n 为参数，确定光线能够从另外一侧出来的 ϕ 角最小值。当 $n=1.5$，$\phi=60°$时，求最小的 θ 角。

8.18　有些玻璃，其折射率随波长变化。在图 8-34 中，有一个三棱镜，用于对白光进行色散，其制造材料的折射率为

$$n = 1.71 - \frac{4}{30}\lambda_0 \quad (\lambda_0\text{的单位为 μm})$$

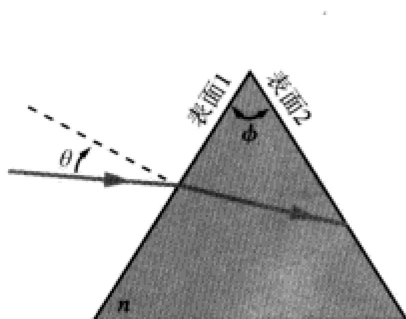


图 8-33 习题 8-17 的三棱镜

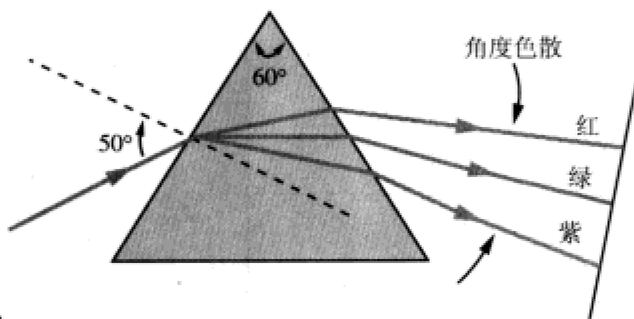


图 8-34 习题 8.18 的三棱镜

其中，λ_0是真空中的波长。已知白光以 50°的角度入射，红光的波长 λ_0 为 0.7μm，紫光的为 0.4μm。试确定色散的角度（以度计算）。

8.19* 图 8-35 中的两个三棱镜，由 $n = 1.52$ 的玻璃制成。入射到顶部三棱镜的光线所携带的功率密度中，多大比例将从底部的三棱镜出来？忽略内部的多次反射。

334

8.20 一光线以 45°角入射，通过两层电介质材料，材料的折射率、厚度如图 8-36 所示。如果光线入射到第一种电介质表面的高度为在 2cm，问光线落到屏幕上的高度是多少？

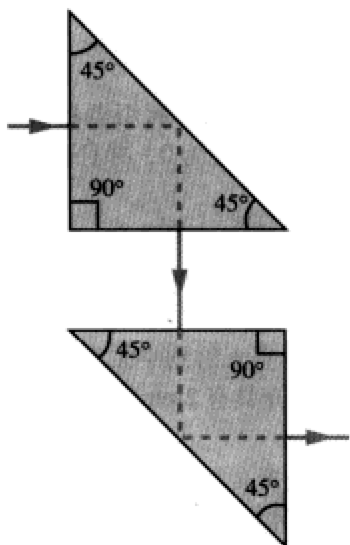


图 8-35 习题 8.19 的潜望棱镜系统

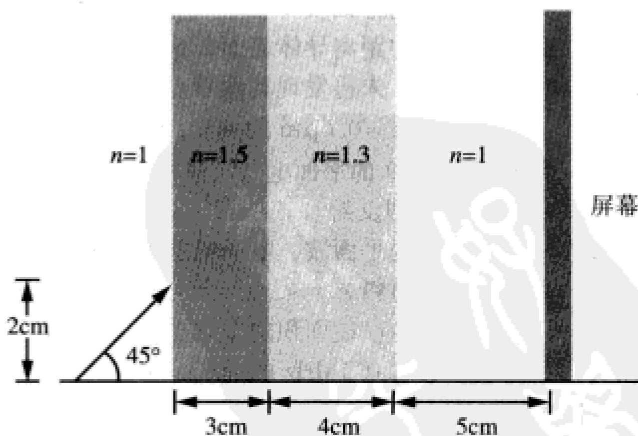


图 8-36 光线经过多层媒介后，入射到屏幕上（习题 8.20）

8.21* 图 8-37 所示大口杯中，底部为一块玻璃，玻璃之上为水。玻璃层中有一个小气泡，深度未知。当从水面以上沿 60°角度往下看时，看到的气泡深度为 6.81cm。气泡的实际深度是多少？

8.22 半块玻璃圆柱体，$n = 1.5$，其平坦面为水平面，上面有一个油滴，如图 8-38 所示。当光线沿径向直射到油滴时，如果 θ 角超过 60°，则将发生完全内反射。求油的折

射率。

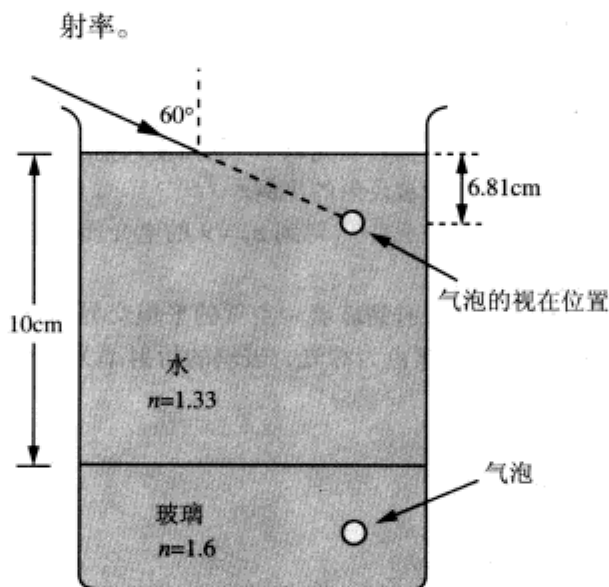


图 8-37　习题 8.21 中的气泡视在深度

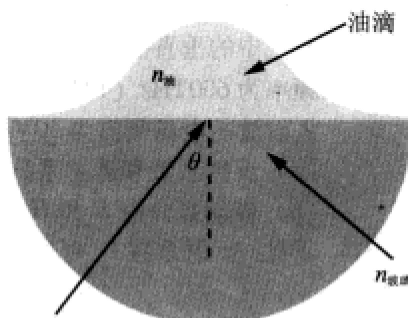


图 8-38　玻璃半圆柱平坦面上的油滴（习题 8.22）

8.23* 一个硬币，位于 30cm 深的水井底部。让一张纸浮在水面上硬币的正上方，问纸张的直径应该多大，才能使硬币完全被挡住？将硬币看成一个点，假定水的折射率为 $n = 1.33$。

8.24 假定例 8-5 中的光纤位于水下（$n = 1.33$）而不是空气中。试确定此时的 θ_a 和 f_p。

8.25* 式（8.45）是在图 8-12b 中，当入射到光纤发送端的光线可以占有整个接收光锥范围的情况下，推导出来的。现假定将入射光线限制在从垂直入射到 θ' 角的一个狭小范围里，其中 $\theta' < \theta_a$。

(a) 求以 θ' 表示的最大数据率 f_p 的表达式；

(b) 当 $\theta' = 3°$ 时，估算例 8-5 中光纤的 f_p。

8.5 ~ 8.6　斜入射波的反射与透射和反射率与折射率

8.26 空气中的平面波

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}^{i} = \hat{\boldsymbol{y}}\, 10 e^{-j(3x+4z)} \quad (\mathrm{V/m})$$

入射到一个电介质媒介的平坦表面，该电介质占据 $z \geq 0$ 的半个空间，$\varepsilon_r = 4$。试确定：

(a) 入射波的极化状态；

(b) 入射角；

(c) 反射电场、磁场的时域表达式；

(d) 透射电场、磁场的时域表达式；

(e) 电介质媒介的电磁波所携带的平均功率密度。

8.27 重做习题 8.26，条件改为：空气中的电磁波的磁场为

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}^{i} = \hat{\boldsymbol{y}}\, 2 \times 10^{-2} e^{-j(8x+6z)} \quad (\mathrm{A/m})$$

入射到 $\varepsilon_r = 9$ 的电介质媒介（$z \geq 0$）的平面边界。

8.28 自然光是随机极化的，这就是说，光能的一半沿着任意给定的方向极化（但在垂直于传播方向的平面中），剩余的一半能量，则沿着垂直于第一个极化方向的极化。因此，当处理自然光入射到平面边界的情况时，可以将其一半能量作为平行极化波处理，另外一半能量作为垂直极化波处理。当自然光以 70°的角度入射到 $n=1.5$ 的一块玻璃的平坦表面时，确定入射波功率中被反射的比例。

8.29* 一个平行极化的平面波，以布儒斯特角从空气中入射到 $\varepsilon_r=9$ 的电介质媒介，求折射角。

8.30 空气中的垂直极化波以 30°的入射角，斜入射到玻璃－空气的平坦交界面上。波的频率为 600THz（$1\text{THz}=10^{12}\text{Hz}$），对应的颜色为绿光，玻璃的折射率为 1.6。如果入射波的电场幅值为 50V/m，试确定：

(a) 反射系数和透射系数；

(b) 玻璃媒介中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的瞬时表达式。

8.31 证明：反射系数 $\Gamma_\perp$ 可以写成以下形式

336

$$\Gamma_\perp=\frac{\sin(\theta_t-\theta_i)}{\sin(\theta_t+\theta_i)}$$

8.32 证明：对于非磁性媒介，反射系数 $\Gamma_\parallel$ 可以写成以下形式

$$\Gamma_\parallel=\frac{\tan(\theta_t-\theta_i)}{\tan(\theta_t+\theta_i)}$$

8.33* 平行极化的光束，电场幅值为 20V/m，从空气中入射到 $\mu_r=1$、$\varepsilon_r=2.6$ 的聚苯乙烯上。如果在空气－聚苯乙烯交界面处的入射角为 50°，试确定：

(a) 反射率和透射率；

(b) 如果交界上由入射光束照亮的面积为 1m^2，求入射光束、反射光束、透射光束的功率。

8.7～8.9 几何光学、反射镜成像和球面透镜成像

8.34 一个 2m 高的男人，将一面镜子放在他面前距离为 d 的远处，为了使他可以看到自己的全身反射像，镜子的高度应该为多少？答案是否同 d 有关？

8.35* 如图 8-39 所示，火焰到屏幕的距离为 2m。利用一面凹反射镜，在屏幕上产生火焰的实像，并放大为 4 倍。确定 s 以及反射镜的焦距。

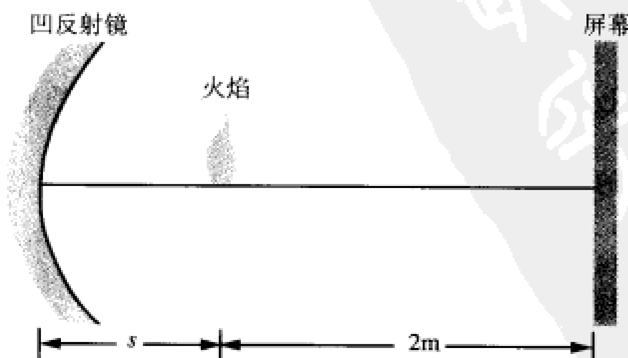


图 8-39 习题 8.35 的成像系统

8.36 一位牙医，利用一个曲率半径为 6cm 的凹反射镜，来观测牙齿中的填充情况。如果

镜子被放在离牙齿 2cm 远的地方，填充物的像将放大到多少倍？

8.37* 一朵花离凹球面镜的距离为 20cm。如果花所成的像在离镜面 80cm 的地方，试确定：

(a) 镜面的曲率半径；

(b) 横向放大系数。

8.38 空气中的蜡烛，放置在玻璃媒介的左方 25cm 处，该玻璃媒介的边界为凹球形，曲率半径为 50cm，折射率为 1.5。试确定蜡烛像的位置。

8.39* 一个薄双凸透镜，材料的折射率为 1.6，曲率半径分别为 20cm 和 30cm。一个物体放置在离透镜 20cm 的远处，试确定其像的位置、放大倍数以及方向。

8.40 重做习题 8.39，条件改为：平凹透镜，曲率半径为 15cm，物体放置在远离透镜 50cm 的地方。

8.41 一个平凸透镜，曲面的曲率半径为 3cm，材料的折射率为 1.5。试确定下述情况下透镜的焦距：

(a) 透镜的平面侧为进光侧；

(b) 透镜的凸面侧为进光侧。

8.42 一个凸透镜，当物体从很远的地方（可看成无穷远）移动到距离透镜 42cm 时，所成的像只移动了 1cm。问透镜的焦距是多少？

8.43* 式（8.102）定义了空气中薄透镜的焦距。

(a) 对于一般情况，即折射率为 n_l 的薄透镜放置在折射率为 n_m 的媒介中的情况，推导焦距 f 的表达式；

(b) 曲率半径分别为 10cm 和 15cm 的一个双凹透镜，材料的折射率为 1.5，试确定当其被放入（i）空气中；（ii）水中（折射率为 1.33）时，焦距的大小。

337

8.44 一个正透镜，用于将其前侧 50cm 远处的物体，成像到后侧 1m 远处的屏幕上。问透镜的焦距是多少？

8.45* 一个成像系统有两个正透镜，第一个的焦距为 15cm，第二个的焦距为 5cm。如果两透镜相距 50cm，有一个物体位于第一个透镜的前侧 25cm 处，试确定其像的位置（相对第二个透镜）。

8.46 两个薄透镜，焦距分别为 f_1、f_2，彼此相邻放置，如图 8-40 所示。证明系统组合的焦距 F 由下式给定

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$$

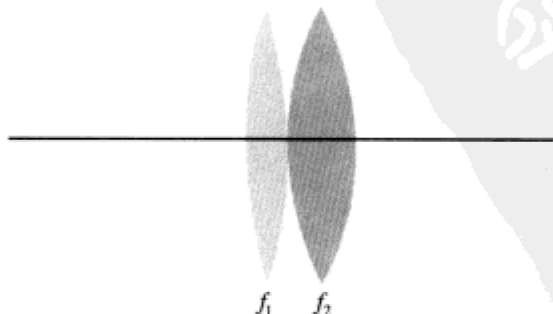


图 8-40　相接触的两透镜，透镜很薄，二者可以看成位于相同位置（习题 8.46）

8.47* 两个薄透镜的焦距分别为 $f_1 = 5\text{cm}$ 和 $f_2 = -10\text{cm}$，彼此间隔 5cm，如图 8-41 所示。试确定像[1]的位置。

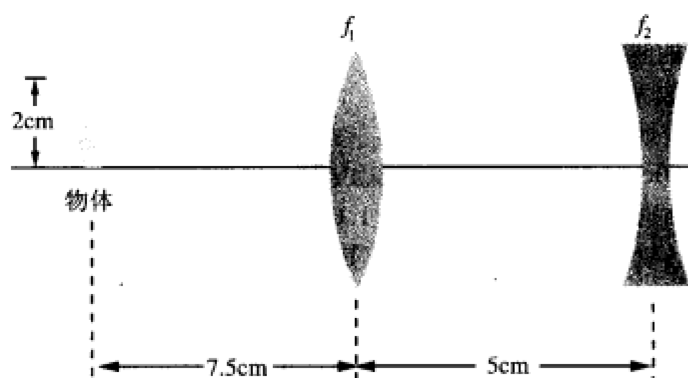


图 8-41 习题 8.47 的成像系统

338 8.48～8.53 附加习题——题目及完整解答见。

1. 原书为 object，疑有误。——译者注

第 9 章　辐射与天线

9.1　概述

天线（antenna）是一种变换器，它把传输线上传播的导行波，变换成在无界媒介（通常是自由空间）中传播的电磁波，或者进行相反的变换。图 9-1 表示了喇叭形天线发射电磁波的情况，其中的喇叭起到了在波导与自由空间之间进行转换的作用。尽管任何导电结构或电介质结构，都可以担当这种功能，但天线是为了满足专门用途的需要而设计出来的，用来发射或接收带有方向性和极化特性的电磁能量。此外，为了使传输线－天线连接处的反射尽可能小，知道天线的阻抗，并使天线同传输线两者的阻抗相匹配十分重要。

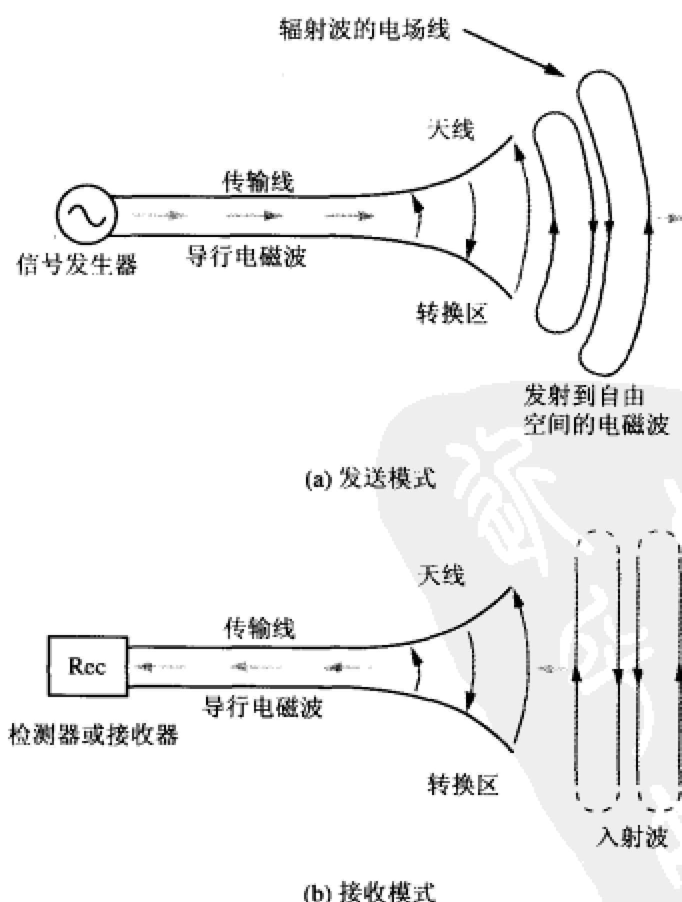


图 9-1　天线作为导行电磁波与自由空间电磁波的变换器，既可以用于发送，也可以用于接收

天线被制做成各种形状、尺寸（图9-2），广泛应用于无线电、电视的广播与接收、无线通信系统、移动电话、雷达系统、汽车防撞传感器以及许多其他的场合。天线的辐射与阻抗特性，取决于其形状、尺寸以及所用的材料。天线的尺度通常用其发送或接收的波的波长个数来度量：一个1m长的偶极子天线，工作在2m的波长下，同一个1cm长的偶极子天线，工作在$\lambda=2$cm下的特性是一样的。因此，在本章的大部分讨论中，将采用波长单位来表示天线的尺寸。

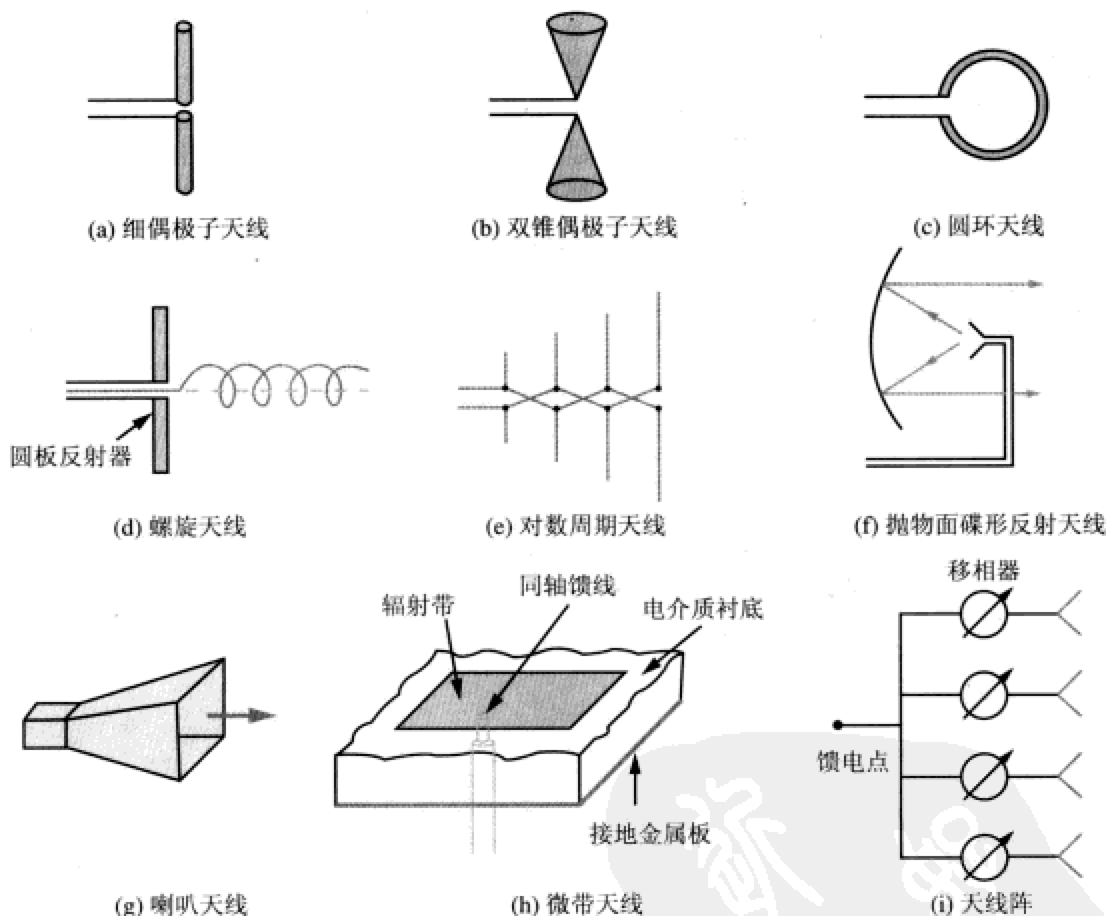


图9-2 各种类型的天线

互易性

表征天线辐射功率相对分布的方向函数，称为天线辐射波瓣图或天线波瓣图（antenna radiation pattern，或简称antenna pattern）。各向同性（isotropic）天线是一种假想天线，其沿各方向的辐射都相同；在描述实际天线的辐射特性时，它常用来作为参照辐射体。大部分天线是互易（reciprocal）设备，无论作为发射器还是接收器，都具有相同的辐射波瓣图。互易性意味着，对于一个给定的天线，当其工作在发射模式时，如果其在A方向发射的功率是B方向的100倍，则当其被用于接收模式时，其对入射的电磁波辐射的敏感性，在A方向将比B方向强100倍。图9-2中的所有天线，都遵从互易原理，但并不是所有天线都是互易设备。对于某些包含非线性半导

341

体或铁磁材料的固态天线，互易性不一定成立。这种非互易的天线不在本章的讨论范围之内，本章讨论的所有天线都是互易的。互易性给人们带来了极大的方便，它使得人们可以按照发射模式计算天线的辐射波瓣图，而不管天线是用于发送目的还是用于接收目的。

天线的性能包括两个方面：一个是其辐射特性，另一个是其阻抗。辐射特性包括表明方向的辐射波瓣图，以及当天线用于发射模式时，对应的辐射波极化状态。这种极化状态称作*天线极化*（antenna polarization）。天线作为一种互易设备，当其工作在接收模式时，仅能从入射波中提取部分分量，即电场方向平行于天线极化方向的那些分量。第二个方面，即*天线阻抗*（antenna impedance），与功率传递有关：当天线用作发射器时，是指将功率从信号发射器传递到天线的阻抗；相反，当天线用作接收器时，是指将功率从天线传递到负载的阻抗。这个方面将在9.6节中讨论。必须指出的是，贯穿本章的所有讨论，都假定天线同连接到其端子的传输线是匹配得当的，因而不存在反射以及相关的其他问题。

342

辐射源

辐射源分为两类：一类是电流，另一类是孔径场。图9-2a和图9-2c的偶极子天线和圆环天线，是电流源的例子：时变的电流流过导线，引起电磁场辐射。图9-2g的喇叭天线，则是第二类的例子，因为喇叭孔径上的电场和磁场，担当了辐射场的场源。孔径场本身是由喇叭壁面上的时变电流引起的，因此归根结底，所有辐射都源于时变电流。选择电流还是孔径作为源，依据的只是计算方便性，方便与否则取决于天线的结构。本章将对这两类源的辐射波瓣图的基本计算方法予以分析。

远端场区

由点源辐射的波是球形的，其波前往外扩展的速率等于相速度 u_p（如果媒介是自由空间，则是光速 c）。如果发射天线与接收天线间的距离 R 足够大，以致接收孔径上的波前可以看成是平面波（图9-3），则称此时的接收孔径，位于发射点源的*远端场区*（far-field region 或 far-zone）。这个区域特别重要，因为对于大多数应用，感兴趣的观测区域确实都是在天线的远端场区。远端场的这种平面波近似，使得可以应用某些数学近似，以使辐射场的计算得到简化，因而为组成恰当的天线结构，来产生所需要的远端场天线波瓣图，提供了方便的技术。

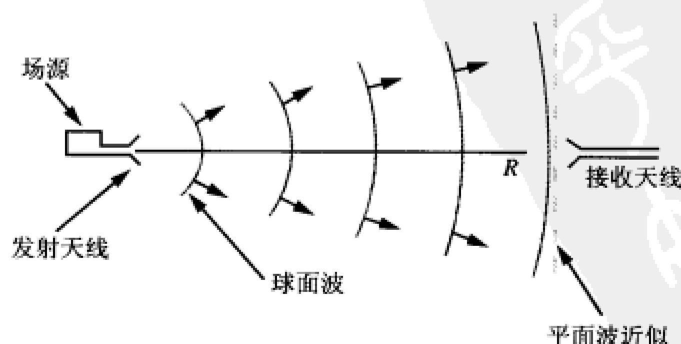


图9-3 远端场的平面波近似

天线阵

若干个天线连接在一起而得到的组合，称为天线阵（antenna array），如图9-2i所示。作为整体的天线阵，其行为就跟它是单个天线一样。通过单独控制每个天线馈电信号的幅值和相位，有可能对天线阵进行辐射波瓣图的整形，并实现波束方向的电子转向。这方面的内容将在9.10节到9.12节中进行讨论。

9.2 短偶极子天线

如果将直线天线看成是由一系列无穷短的导体单元组成的，则在每个单元中，沿长度方向的电流可以看成是均匀的，因此，只要正确处理好每一微小段天线产生的场的幅值、相位，则整个天线的场就可以通过对所有这些微小段天线的场积分而得到。这种微小段天线称作短偶极子（short dipole），下面先分析其辐射特性，然后将所得的结果，在9.4节中推广到半波偶极子辐射场的计算，后者在许多应用中普遍用作标准天线。

343

短偶极子也称赫兹偶极子或赫兹振子（Hertzian dipole），是一根很细的导体线段，其长度 l 同波长 λ 相比要小很多；为了满足均匀电流的假定，l 不得超过 $\lambda/50$。在图9-4中，导线沿着 z 轴方向，载有正弦变化的电流：

$$i(t) = I_0 \cos \omega t = \Re\mathfrak{e}[I_0 e^{j\omega t}] \quad (\mathrm{A}), \tag{9.1}$$

其中 I_0 是电流的幅值。由式（9.1）可知，电流相量为 $\tilde{I} = I_0$。尽管在偶极子的两端，电流必须为零，但我们把电流看成沿整个长度不变。

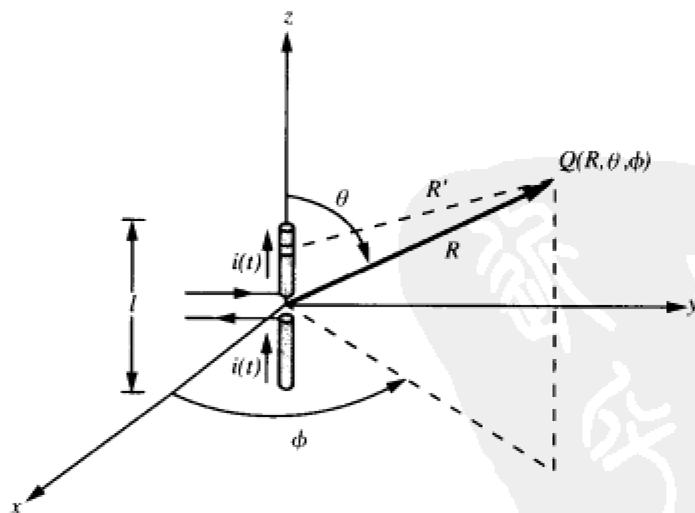


图9-4 放置在球坐标系原点的短偶极子天线

由于电流源的辐射，在图9-4中的 Q 点产生出电场和磁场，这些场的习惯求法是采用延迟矢量位 $\mathbf{A}$。根据式（6.84），体积 v' 中的电流相量分布 $\tilde{\mathbf{J}}$，在距离矢量为 $\mathbf{R}$ 处产生的延迟相矢量位 $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{R})$ 为

$$\tilde{A}(\boldsymbol{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{v'} \frac{\tilde{\boldsymbol{J}}\,\mathrm{e}^{-jkR'}}{R'}\mathrm{d}v', \tag{9.2}$$

其中μ_0是自由空间中的磁导率（因为观测点在空气中），$k=\omega/c=2\pi/\lambda$ 是波数；对于偶极子，电流密度很简单，就是 $\tilde{\boldsymbol{J}} = \hat{z}(I_0/s)$，其中 s 是偶极子导线的横截面积；$\mathrm{d}v' = s\mathrm{d}z$；积分限为从 $z=-l/2$ 到 $z=l/2$。在图 9-4 中，观测点到偶极子上给定点的距离 R'，同观测点到偶极子中心的距离 R 不是一回事，但由于所处理的是很短的偶极子，可以设 $R'\approx R$。因此

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-jkR}}{R}\int_{-l/2}^{l/2}\hat{z}\,I_0\mathrm{d}z = \hat{z}\frac{\mu_0}{4\pi}I_0 l\left(\frac{\mathrm{e}^{-jkR}}{R}\right), \tag{9.3}$$

函数（e^{-jkR}/R）称为球形传播因数（spherical propagation factor），用以考虑幅值随距离变化而按 $1/R$ 的规律衰减，以及相位按 e^{-jkR}的规律变化。$\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的方向则取决于电流流动的方向（z 方向）。

由于此处的目的，是要确定到天线的距离固定为 R 的地方，其辐射功率的方向特性，因图 9-5 所示的球坐标系的坐标变量是范围半径 R（Range）、天顶角 θ（zenith angle）和方位角 ϕ（azimuth angle），因此比较适合用来表示天线的这种方向性图。为了达到以上目的，应该将 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 写成球坐标分量的形式，这可以通过利用式(3.65c)，将 $\hat{z}$ 用球坐标系中的单位矢量表示而得以实现：

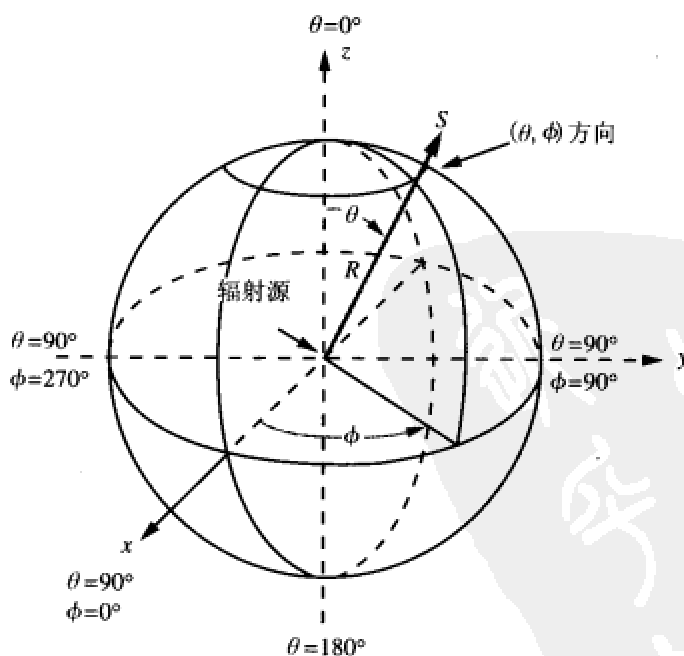


图 9-5 球坐标系

$$\hat{z} = \hat{\boldsymbol{R}}\cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta \tag{9.4}$$

将式（9.4）代入式（9.3）可得：

344

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = (\hat{\boldsymbol{R}}\cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta)\frac{\mu_0 I_0 l}{4\pi}\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right) = \hat{\boldsymbol{R}}\tilde{A}_R + \hat{\boldsymbol{\theta}}\tilde{A}_\theta + \hat{\boldsymbol{\phi}}\tilde{A}_\phi, \tag{9.5}$$

其中

$$\tilde{A}_R = \frac{\mu_0 I_0 l}{4\pi}\cos\theta\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right), \tag{9.6a}$$

$$\tilde{A}_\theta = -\frac{\mu_0 I_0 l}{4\pi}\sin\theta\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right), \tag{9.6b}$$

$$\tilde{A}_\phi = 0.$$

在 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的球坐标分量已知的情况下，接下来要做事情就很简单了：就是应用自由空间中的式（6.85）和式（6.86），即

$$\tilde{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\tilde{\boldsymbol{A}}, \tag{9.7a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\nabla\times\tilde{\boldsymbol{H}}, \tag{9.7b}$$

从而得到下述表达式

$$\tilde{H}_\phi = \frac{I_0 l k^2}{4\pi}e^{-jkR}\left[\frac{j}{kR} + \frac{1}{(kR)^2}\right]\sin\theta \tag{9.8a}$$

$$\tilde{E}_R = \frac{2I_0 l k^2}{4\pi}\eta_0 e^{-jkR}\left[\frac{1}{(kR)^2} - \frac{j}{(kR)^3}\right]\cos\theta \tag{9.8b}$$

$$\tilde{E}_\theta = \frac{I_0 l k^2}{4\pi}\eta_0 e^{-jkR}\left[\frac{j}{kR} + \frac{1}{(kR)^2} - \frac{j}{(kR)^3}\right]\sin\theta \tag{9.8c}$$

其中 $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \cong 120\pi$（Ω）是自由空间的本征阻抗。其余的分量（$\tilde{H}_R$，$\tilde{H}_\theta$，以及 $\tilde{E}_\phi$）则处处为零。图9-6绘出了短偶极子辐射波的电场线。

9.2.1　远端场近似

如前所述，在大多数天线应用中，人们感兴趣的主要是远离源点处的天线辐射波瓣图。对于电偶极子，这相当于要求距离 $R \gg \lambda$，或 $kR = 2\pi R/\lambda \gg 1$。根据这一条件，在式（9.8a）和式（9.8c）中，人们可以忽略以 $1/(kR)^2$ 和以 $1/(kR)^3$ 规律变化的项，而保留按 $1/kR$ 规律变化的项，从而得到远端场表达式：

$$\tilde{E}_\theta = \frac{jI_0 l k\eta_0}{4\pi}\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right)\sin\theta \quad (\text{V/m}), \tag{9.9a}$$

$$\tilde{H}_\phi = \frac{\tilde{E}_\theta}{\eta_0} \quad (\text{A/m}), \tag{9.9b}$$

而 $\tilde{E}_R$ 则可以忽略。经过这种处理，在图9-4中的观测点 Q，电磁波看起来就跟均匀

345

平面波相似了，其电场和磁场在时间上同相，大小通过媒介的本征阻抗 η_0 相联系，彼此垂直，并共同垂直于传播方向（$\hat{\boldsymbol{R}}$）。两个场都正比于 $\sin\theta$，而与 ϕ 无关（从对称角度考虑就应该如此）。

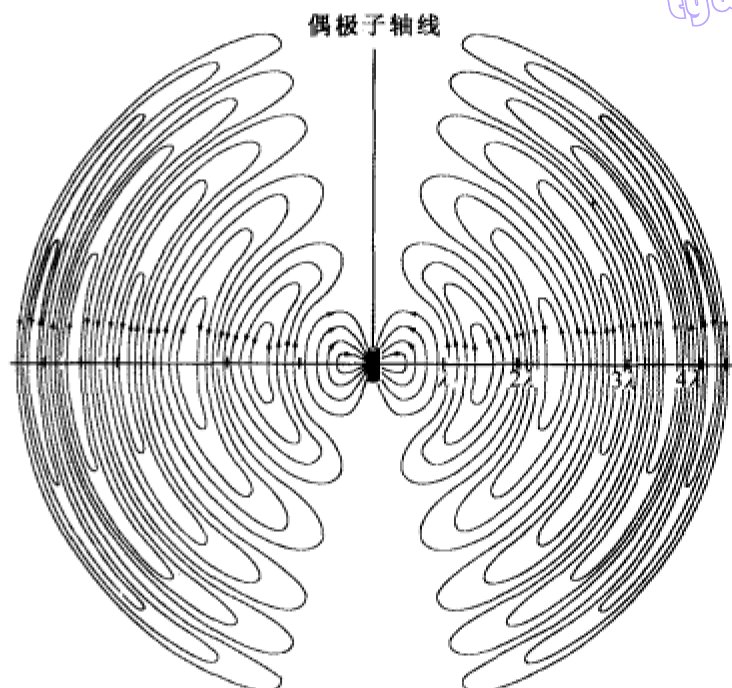


图 9-6 在某给定时刻，振荡的偶极子周围的电场线

9.2.2 功率密度

以相量形式给定 $\tilde{\boldsymbol{E}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{H}}$，则辐射波的时间平均坡印亭矢量（time-average Poynting vector），或功率密度（power density），可以应用式（7.101）得到为：

$$\boldsymbol{S}_{av} = \frac{1}{2}\Re\mathfrak{e}(\tilde{\boldsymbol{E}} \times \tilde{\boldsymbol{H}}^*) \quad (\text{W/m}^2) \tag{9.10}$$

对于短偶极子，利用式（9.9a）和（9.9b）可得：

$$\boldsymbol{S}_{av} = \hat{\boldsymbol{R}}S(R,\theta), \tag{9.11}$$

346

其中

$$S(R,\theta) = \left(\frac{\eta_0 k^2 I_0^2 l^2}{32\pi^2 R^2}\right)\sin^2\theta = S_0 \sin^2\theta \quad (\text{W/m}^2) \tag{9.12}$$

任何天线的方向性波瓣图，都用归一化的辐射密度（normalized radiation intensity）$F(\theta,\phi)$来描述，它定义为在给定的范围半径 R 上，功率密度 $S(R,\theta,\phi)$同$S(R,\theta,\phi)$的最大值 S_{max}之比，即

$$F(\theta,\phi) = \frac{S(R,\theta,\phi)}{S_{max}} \quad (\text{无量纲}) \tag{9.13}$$

对于赫兹振子，式（9.12）对 $\sin^2\theta$ 的依赖关系表明，辐射的最大值出现在 $\theta=\pi/2$ 的方向，即幅角平面上，其表达式为

$$S_{max} = S_0 = \frac{\eta_0 k^2 I_0^2 l^2}{32\pi^2 R^2} = \frac{15\pi I_0^2}{R^2}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \quad (\text{W/m}^2), \tag{9.14}$$

其中利用了关系式 $k=2\pi/\lambda$ 和 $\eta_0\approx120\pi$。可见，S_{max} 直接正比于 I_0^2 和 l^2（这里 l 是以波长来量度的），并随距离按 $1/R^2$ 的规律减小。

根据式（9.13）的归一化辐射强度定义，有

$$F(\theta,\phi)=F(\theta)=\sin^2\theta \tag{9.15}$$

图9-7绘制了 $F(\theta)$ 的在上升平面（也称 θ 平面）和幅角平面（也称 ϕ 平面）的图形。在偶极子轴线的方向上，偶极子没有辐射能量，最大的辐射（$F=1$）发生在水平面方向。因为 $F(\theta)$ 与 ϕ 无关，所以波瓣图在 $\theta-\phi$ 空间是油炸圈饼的形状。

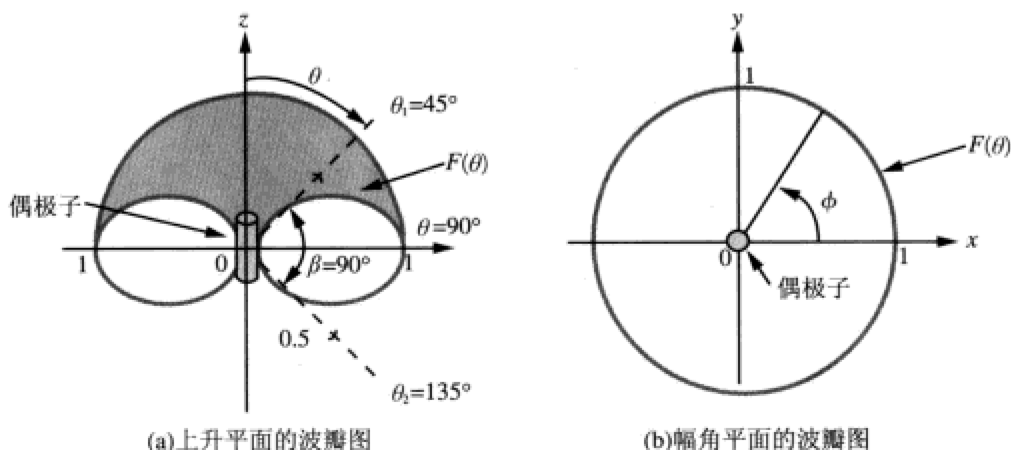


图9-7 短偶极子的辐射波瓣图

 **M9.1**

复习题

Q9.1 在什么情况下，天线是互易设备？

Q9.2 天线的远端场区域中的辐射波是什么形状？

347

Q9.3 直导线天线的长度应短到什么程度，才可以看成赫兹振子？分析赫兹振子时，对流过导线中的电流，有何潜在的假定？

Q9.4 为了将导线电流与辐射功率密度联系起来，需要哪些基本步骤。

练习9.1 一根1m长的偶极子，由幅值为5A、频率为5MHz的电流激励。在2km远处，沿着天线边射方向（即水平方向）的辐射功率密度是多少？

答案：$S_0=8.2\times10^{-8}\text{W/m}^2$。（参见◉）

9.3 天线的辐射特性

天线波瓣图用以描述在离天线固定距离的位置上，天线远端场的方向性性质。通常，天线波瓣图是三维图形，它将辐射场的强度或功率密度，显示成天顶角 θ 和方位角 ϕ 所确定的方向的函数。根据互易原理，一个接收天线，其方向性的天线波瓣图跟该天线运行于发射模式时的波瓣图相同。

考虑图9-8中放置在观测球面中心的发射天线。天线经由单元面积 dA 辐射的微

分功率为：

$$dP_{rad} = \boldsymbol{S}_{av} \cdot d\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}_{av} \cdot \hat{\boldsymbol{R}} dA = S dA \quad (\text{W}), \tag{9.16}$$

其中，S 是时变坡印亭矢量 $\boldsymbol{S}_{av}$ 的径向分量。在任何天线的远端场区域中，$\boldsymbol{S}_{av}$ 总是沿着径向的。在球坐标系中，

$$dA = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi, \tag{9.17}$$

同 dA 相关的立体角（solid angle）$d\Omega$，定义为对应的面积除以 R^2，即

$$d\Omega = \frac{dA}{R^2} = \sin\theta \, d\theta \, d\phi \quad (\text{sr}) \tag{9.18}$$

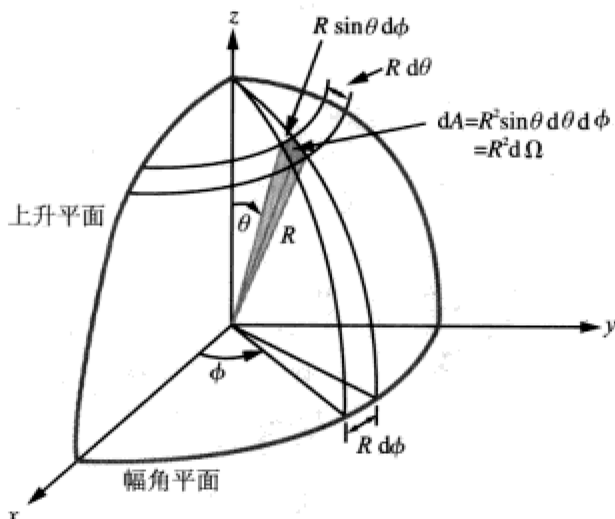


图 9-8 立体角的定义：$d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\phi$

请注意，平面角的单位是弧度，一个整圆的角度是 2π(rad)，而立体角的单位是立体弧度（steradian，简记为 sr），一个完整球面的立体角是 $\Omega = (4\pi R^2)/R^2 = 4\pi$(sr)。半球的立体角是 2π(sr)。

利用关系 $dA = R^2 d\Omega$，dP_{rad} 可以重写为：

$$dP_{rad} = R^2 S(R,\theta,\phi) \, d\Omega \tag{9.19}$$

对式（9.19）进行积分，可以得到天线通过固定距离为 R 的球面的总辐射功率为：

$$\begin{aligned} P_{rad} &= R^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} S(R,\theta,\phi) \sin\theta \, d\theta \, d\phi \\ &= R^2 S_{max} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} F(\theta,\phi) \sin\theta \, d\theta \, d\phi \\ &= R^2 S_{max} \iint_{4\pi} F(\theta,\phi) \, d\Omega \quad (\text{W}), \end{aligned} \tag{9.20}$$

348

其中 $F(\theta,\phi)$ 是归一化的辐射强度，由式（9.13）定义；积分号下面的 4π，是表示 θ 和 ϕ 的积分限的简写符号。P_{rad} 的正式名称是总辐射功率（total radiated power）。

9.3.1 天线波瓣图

在图 9-8 的球坐标系中，天顶角 θ 和方位角 ϕ 的每一个特定组合，都定义了一个

特定的方向。归一化辐射强度 $F(\theta,\phi)$ 决定了天线辐射能量的方向性波瓣图。如果以 θ 和 ϕ 为变量，绘制 $F(\theta,\phi)$ 的图形，所得到的将是一个三维图形，图 9-9 就是这种图形的一个例子。

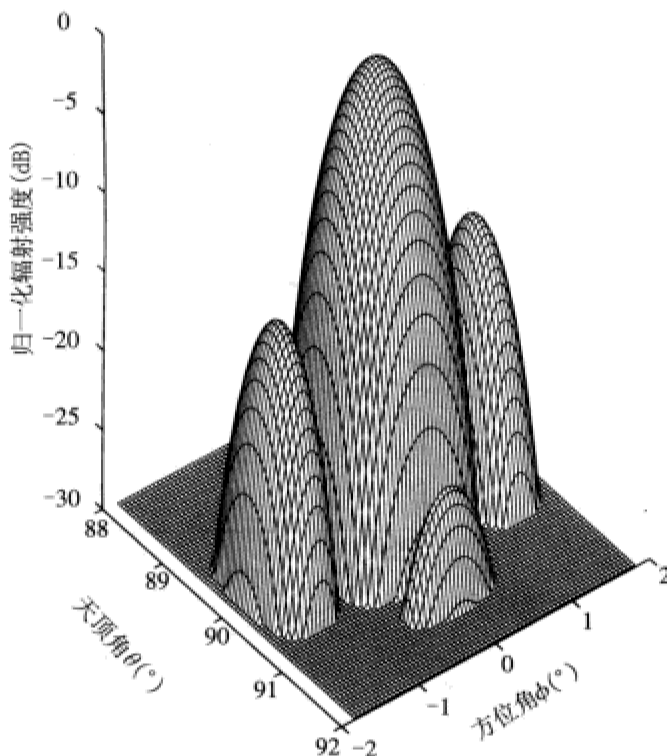


图 9-9　窄波束天线的三维波瓣图

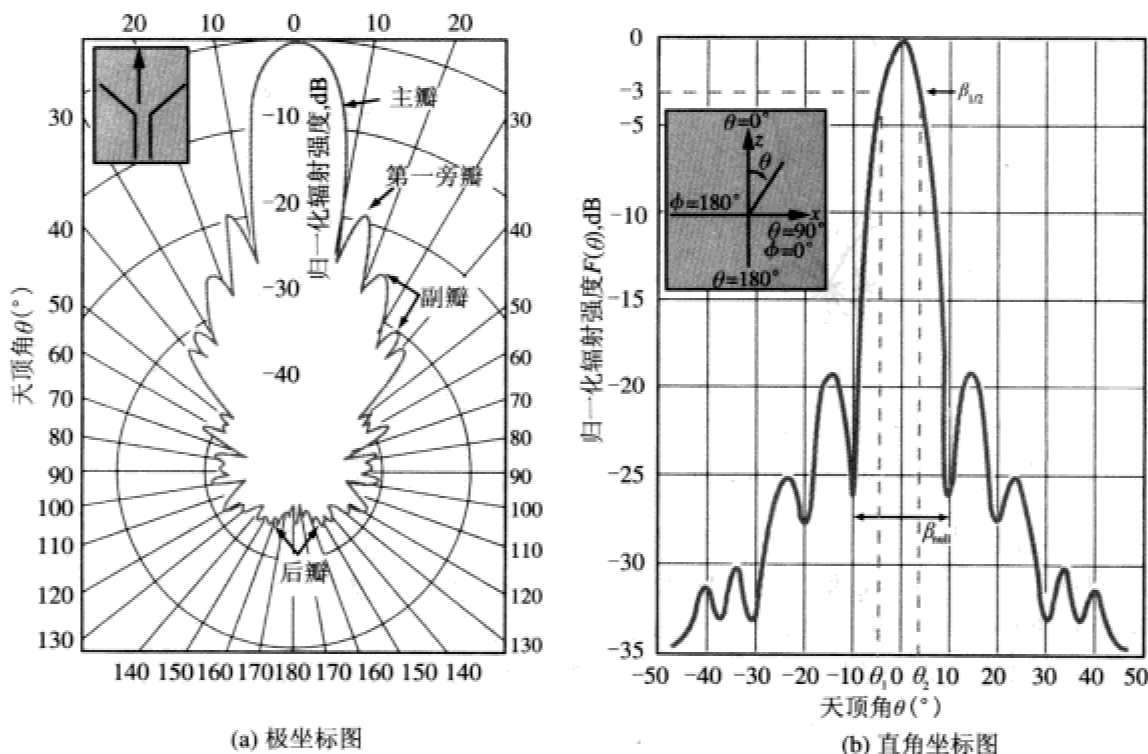
通常，人们感兴趣的是在球坐标系的特定平面上，以二维图的形式表示 $F(\theta,\phi)$ 的变化情况。其中，最常用的有两个平面，一个是上升平面，另外一个是幅角平面。**上升平面**（elevation plane）也称 θ 平面，是对应于某个恒定 ϕ 值的平面。例如 $\phi=0$ 为 x-z 平面，$\phi=90°$ 为 y-z 平面，两者都是上升平面（图 9-8）。在其中任何一个平面上，绘制 $F(\theta,\phi)$ 关于 θ 的图形，就得到上升平面上的一个两维波瓣图（方向图）。但这并不是说，上升平面波瓣图必须在所有的上升平面上都一样。**幅角平面**（azimuth plane）也称 ϕ 平面，是 $\theta=90°$ 的平面，对应于 x-y 平面。上升平面和幅角平面常称作球坐标系中的两个**主平面**（principal plane）。

有些天线的波瓣图展现出很高的方向性，具有很窄的波束，在这种情况下，将 F 表示为下面的分贝形式，以分贝为单位来绘制天线波瓣图比较方便：

$$F(\mathrm{dB})=10\log F$$

图 9-10a 的天线波瓣图，就是这样的例子。它是以 dB 为单位，绘制在极坐标上的，径向变量对应着强度。这种格式可以对**辐射波瓣**（radiation lobe）的方向性作出方便、直观的解释。另一种常用于检视窄波束天线波瓣图的格式，是图 9-10b 所示的直角坐标显示。其优点在于，通过改变水平轴的尺度，可以很容易地展开波瓣图。这些图仅仅描绘观测球的一个平面，即 $\phi=0$ 平面上的变化。除非波瓣图是关于 ϕ 对称

的，否则就需要额外的波瓣图，才能定义出 $F(\theta,\phi)$ 随 θ 和 ϕ 的变化。



(a) 极坐标图 (b) 直角坐标图

图 9-10 典型的微波天线归一化辐射波瓣图。其中图 a 为极坐标形式，图 b 为直角坐标形式

严格来讲，极角（天顶角）θ 总是正的，变化范围是从 0°（z 方向）到 180°（$-z$ 方向）。但在图 9-10b 中，θ 轴既有正值也有负值。这并不是矛盾，而是绘制天线波瓣图的一种不同方式。该图的右半部分，代表在 x-z 平面的 $\phi=0$ 部分，当 θ 顺时针增加时（参见图 9-10b 中的小图），F(dB) 随 θ 的变化；而图的左半部分，则代表在 x-z 平面的 $\phi=180°$ 部分，当 θ 逆时针增加时，F(dB) 随 θ 的变化。因此，θ 取负值只不过表示（θ，ϕ）方向是在 x-z 平面的左半部分罢了。 349

图 9-10a 所示的波瓣图表明，该天线的方向性是十分明显的，因为大多数能量是通过一个称作*主瓣*（main lobe）的狭小区域辐射的。除主瓣以外，波瓣图还有几个*旁瓣*（side lobe）和*后瓣*（back lobe）。就大多数应用而言，额外的这些瓣都是不希望存在的，因为对于发送天线，它们代表能量的浪费，对于接收天线，它们则表示潜在的干扰方向。 350

9.3.2 波束尺寸

对于单个主瓣的天线，可用*波瓣图立体角*（pattern solid angle）Ω_p 来表示其天线波瓣图主瓣的等效宽度，如图 9-11 所示。从定义来看，波瓣图立体角等于归一化的辐射强度 $F(\theta,\phi)$ 沿一个球面的积分，即：

$$\Omega_p = \iint_{4\pi} F(\theta,\phi)\,d\Omega \quad (\text{sr}) \tag{9.21}$$

对于各向同性天线，由于在所有方向上都有 $F(\theta,\phi)=1$，因此 $\Omega_p=4\pi(\mathrm{sr})$。

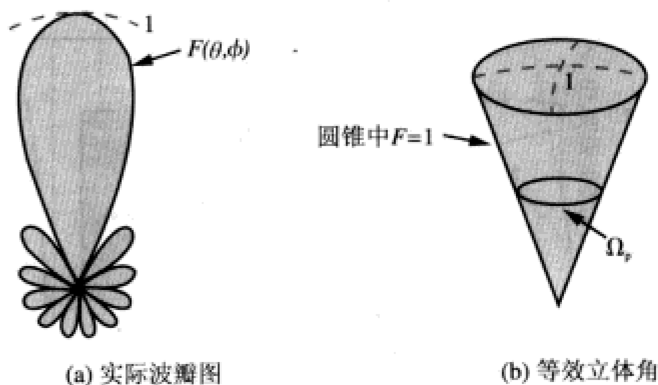


图 9-11　波瓣图立体角 Ω_p 定义了一个等效圆锥，其中积聚了实际天线的全部辐射，圆锥内的等效强度处处均匀，等于实际波瓣图的最大强度

波瓣图立体角表征了三维辐射波瓣图的方向特性。而为了描述主瓣在给定平面中的宽度，又引入波束宽度（beamwidth）的概念。半功率波束宽度（half-power beamwidth）简称波束宽度，用 β 表示，定义为当 $F(\theta,\phi)$ 的幅值等于主瓣峰值一半（或分贝尺度上的 -3dB）时，主瓣上两侧对应位置之间的角宽度。例如，对于图 9-10b所示的波瓣图，β 为

$$\beta=\theta_2-\theta_1, \tag{9.22}$$

其中 θ_1 和 θ_2 是半功率角度（half-power angle），相应的 $F(\theta,0)=0.5$（其中 θ_2 表示较大的角度，θ_1 表示较小的角度，如图所示）。如果波瓣图是对称的，且 $F(\theta,\phi)$ 的最大值发生在 $\theta=0$ 处，则 $\beta=2\theta_2$。对于图 9-7a 所示的短偶极子波瓣图，$F(\theta)$ 的最大值发生在 $\theta=90°$ 处，θ_2 位于 135°处，θ_1 位于 45°处，因此其 $\beta=135°-45°=90°$。波束宽度 β 也称为 3dB 波束宽度（3dB beamwidth）。除了半功率波束宽度，对于有些应用，也可能选用其他的波束尺度，如零点波束宽度（null beamwidth）β_{null}，它是峰值两侧第一个零点之间的间隔宽度（图 9-10b）。

9.3.3　天线的方向性

天线的方向性（directivity）D，定义为归一化辐射强度 $F(\theta,\phi)$ 的最大值 F_{max}（根据定义其值为 1），同 $F(\theta,\phi)$ 在 4π 立体角空间上的平均值之比：

$$D=\frac{F_{max}}{F_{av}}=\frac{1}{\frac{1}{4\pi}\iint_{4\pi}F(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega}=\frac{4\pi}{\Omega_p}\quad（无量纲）, \tag{9.23}$$

其中 Ω_p 是式（9.21）定义的波瓣图立体角。因此，天线波瓣图的 Ω_p 越窄，天线的方向性就越大。对于各向同性天线，由于 $\Omega_p=4\pi$，因此其方向性 $D_{iso}=1$。

351

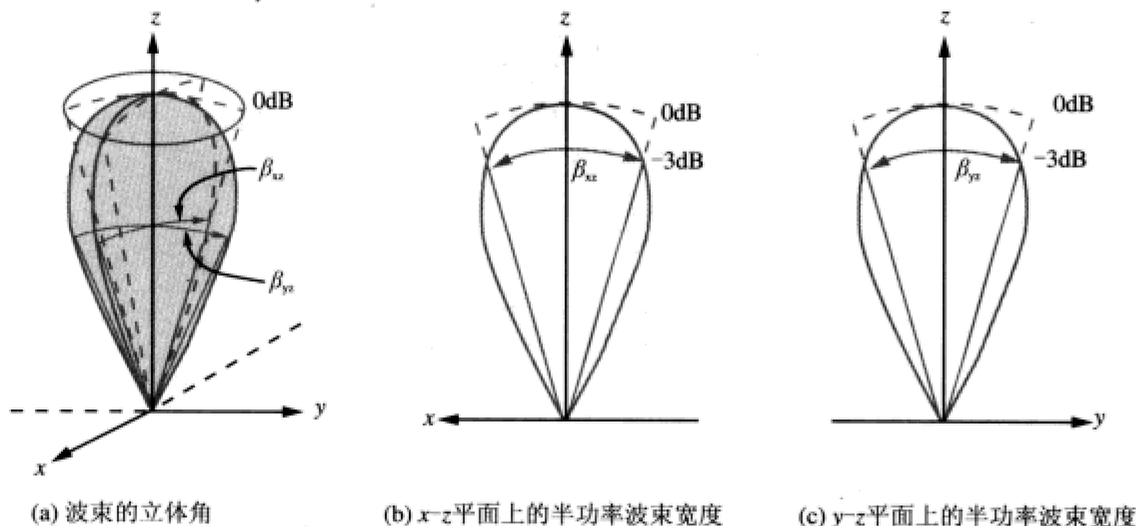
将式（9.20）代入式（9.23）中，可以将 D 表示为：

$$D=\frac{4\pi R^2S_{max}}{P_{rad}}=\frac{S_{max}}{S_{av}}, \tag{9.24}$$

其中 $S_{av}=P_{rad}/(4\pi R^2)$，是辐射功率密度的平均值，它等于天线辐射的总功率 P_{rad} 除

以半径为 R 的球的表面积。由于 $S_{av}=S_{iso}$，其中 S_{iso} 为各向同性天线辐射的功率密度，因此，D 表示在同样的范围半径 R 和同样的输入功率激励下，天线的辐射功率密度最大值与各向同性天线的辐射功率密度之比。通常，D 用分贝表示[1]：$D(\text{dB})=10\log D$。

对于图 9-12 所示仅有一个主瓣、且指向 z 方向的天线，Ω_p 可以近似表示为半功率波束宽度 β_{xz} 和 β_{yz}（单位为弧度）之积：



(a) 波束的立体角　(b) x-z 平面上的半功率波束宽度　(c) y-z 平面上的半功率波束宽度

图 9-12　单向辐射波瓣图的立体角，近似等于两个主平面上半功率波束宽度的乘积，即 $\Omega_p\approx\beta_{xz}\beta_{yz}$

$$\Omega_p\approx\beta_{xz}\beta_{yz}, \tag{9.25}$$

因此

$$D=\frac{4\pi}{\Omega_p}\approx\frac{4\pi}{\beta_{xz}\beta_{yz}} \tag{9.26}$$

352

虽然只是近似，但这个关系却提供了一个极其有用的方法，即只需测量相交于主瓣轴线的两个正交平面上的波束宽度，就可以估算天线的方向性。

例 9-1　天线的辐射特性

一个仅向上半球辐射的天线，其归一化辐射强度为 $F(\theta,\phi)=\cos^2\theta$。试确定：（a）最大辐射方向；（b）波瓣图立体角；（c）方向性；（d）y-z 平面上的半功率波束宽度。

解答：从数学上看，“天线仅向上半球辐射”可描述为：

$$F(\theta,\phi)=F(\theta)=\begin{cases}\cos^2\theta, & (0\leqslant\theta\leqslant\pi/2 \text{ 且 } 0\leqslant\phi\leqslant 2\pi)\\ 0 & (\text{其他})\end{cases}$$

（a）函数 $F(\theta)=\cos^2\theta$ 与 ϕ 无关，最大值发生在 $\theta=0°$ 处。图 9-13 所示为 $F(\theta)$ 的极

1. 注意，虽然有些无量纲的物理量常用 dB 表示，但在本章的关系式中应用这些物理量时，都应该先把它们从 dB 值转换成自然值。

坐标图。

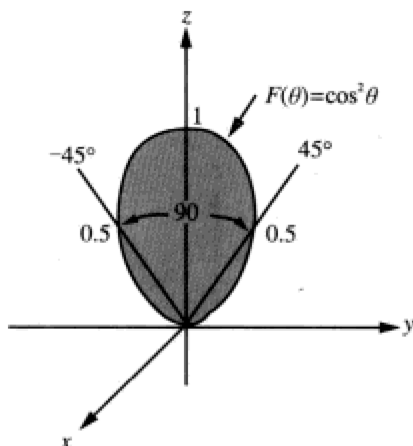


图9-13　$F(\theta)=\cos^2\theta$ 的极坐标图

（b）根据式（9.21），波瓣图立体角 Ω_p 为

$$\Omega_p = \iint_{4\pi} F(\theta,\phi)\mathrm{d}\Omega = \int_{\phi=0}^{2\pi}\left[\int_{\theta=0}^{\pi/2}\cos^2\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}\phi$$

$$= \int_{\phi=0}^{2\pi}\left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2}\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\mathrm{d}\phi = \frac{2\pi}{3}\quad(\mathrm{sr})$$

（c）应用式（9.23）可得：

$$D=\frac{4\pi}{\Omega_p}=4\pi\left(\frac{3}{2\pi}\right)=6$$

这对应于 $D(\mathrm{dB})=10\log 6=7.78\mathrm{dB}$。

（d）令 $F(\theta)=0.5$，可得半功率波束宽度 β 为

$$F(\theta)=\cos^2\theta=0.5$$

由此得半功率角 $\theta_1=-45°$，$\theta_2=45°$。因此，

$$\beta=\theta_2-\theta_1=90°$$

■

例9-2　赫兹振子的方向性

请计算赫兹振子的方向性。

解答：根据式（9.15），有 $F(\theta)=\sin^2\theta$，将其代入式（9.23）可得

$$D=\frac{4\pi}{\iint_{4\pi}F(\theta,\phi)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi}=\frac{4\pi}{\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi}=\frac{4\pi}{8\pi/3}=1.5$$

353　即1.76dB。

■

9.3.4　天线增益

在供给天线的总功率 P_t（发射器功率）中，大小为 P_{rad} 的部分被辐射到空间，剩余的部分 P_{loss} 则以热损耗的形式，耗散在天线结构中。辐射效率 ξ 定义为 P_{rad} 对 P_t 的

比值：

$$\xi = \frac{P_{rad}}{P_t} \quad (无量纲) \tag{9.27}$$

天线的增益定义为

$$G = \frac{4\pi R^2 S_{max}}{P_t}, \tag{9.28}$$

天线增益的表达式形式，类似天线方向性 D 的表达式（9.24），只不过它所参照的是天线的输入功率 P_t，而不是辐射功率 P_{rad}。考虑到式（9.29），有

$$G = \xi D \quad (无量纲) \tag{9.29}$$

天线增益考虑了天线材料中的欧姆损耗，而天线方向性则没有。无损天线的 $\xi = 1$。

9.3.5 辐射电阻

从连接到天线端子的传输线角度来看，天线仅仅是一个阻抗。如果传输线同天线阻抗相匹配，则信号发生器供给的功率 P_t 中，一部分辐射到空间，其余则以热的形式耗散在天线中。天线阻抗中的电阻分量，可以划分为辐射电阻（radiation resistance）R_{rad} 和损耗电阻（loss resistance）R_{loss} 两部分。相应的时间平均辐射功率 P_{rad} 和耗散功率 P_{loss} 分别为：

$$P_{rad} = \frac{1}{2} I_0^2 R_{rad}, \tag{9.30a}$$

$$P_{loss} = \frac{1}{2} I_0^2 R_{loss}, \tag{9.30b}$$

其中 I_0 是天线中的正弦波激励电流的幅值。根据前面的定义，辐射效率等于 P_{rad} 对 P_t 的比值，

$$\xi = \frac{P_{rad}}{P_t} = \frac{P_{rad}}{P_{rad} + P_{loss}} = \frac{R_{rad}}{R_{rad} + R_{loss}} \tag{9.31}$$

可以这样来计算辐射电阻 R_{rad}，即先沿球面对远端场的功率密度进行积分，求得 P_{rad}，然后令其等于式（9.30a），即可得到 R_{rad}。

例 9-3　赫兹振子的辐射电阻与效率

一个 4cm 长、中心馈电的偶极子，用作 75MHz 的天线。天线的导线由铜制成，导线半径为 $a = 0.4$mm。根据式（7.92a）和（7.94），长度为 l 的圆导线，其损耗电阻为

$$R_{loss} = \frac{1}{2\pi a}\sqrt{\frac{\pi f \mu_c}{\sigma_c}}, \tag{9.32}$$

其中 μ_c、σ_c 分别是导线的磁导率和电导率。请计算该偶极子天线的辐射电阻和辐射效率。

解答：在 75MHz 时

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{7.5 \times 10^7} = 4(\text{m})$$

长度与波长的比值为 l/λ = 4cm/4m = 10^{-2}。因此，它是一个短偶极子。根据式

(9.24)，P_{rad}为

354

$$P_{rad}=\frac{4\pi R^2}{D}S_{max} \tag{9.33}$$

对于赫兹振子，S_{max}由式（9.14）给定，此外，在例9-2中，确定了$D=1.5$，因此，

$$P_{rad}=\frac{4\pi R^2}{1.5}\times\frac{15\pi I_0^2}{R^2}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2=40\pi^2 I_0^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \tag{9.34}$$

令这一结果等于式（9.30a），可求的辐射电阻R_{rad}为：

$$R_{rad}=80\pi^2(l/\lambda)^2\quad(\Omega) \tag{9.35}$$

对于$l/\lambda=10^{-2}$，有$R_{rad}=0.08\Omega$。

接下来求损耗电阻R_{loss}。对于铜，由附录B可得$\mu_c\approx\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ H/m，$\sigma_c=5.8\times10^7$S/m。因此，

$$R_{loss}=\frac{1}{2\pi a}\sqrt{\frac{\pi f\mu_c}{\sigma_c}}=\frac{4\times10^{-2}}{2\pi\times4\times10^{-4}}\left[\frac{\pi\times75\times10^6\times4\pi\times10^{-7}}{5.8\times10^7}\right]^{1/2}=0.036\Omega,$$

所以辐射效率为

$$\xi=\frac{R_{rad}}{R_{rad}+R_{loss}}=\frac{0.08}{0.08+0.036}=0.69,$$

或69%的效率。 ■

复习题

Q9.5 波瓣立体角代表什么？

Q9.6 各向同性天线的方向性的幅值是多少？

Q9.7 对于固定长度的赫兹振子，哪些物理和材料特性影响其辐射效率？

练习9.2 一根天线，具有圆锥形的辐射波瓣图，当θ在0°～45°之间时，归一化辐射强度$F(\theta)=1$，当θ在45°～180°之间时，归一化辐射强度为零。已知波瓣图同方位角ϕ无关。试求：(a) 波瓣图立体角；(b) 方向性。

答案：(a) $\Omega_p=1.84$sr；(b) $D=6.83$，相当于8.3dB。（参见❁）

练习9.3 一根短偶极子天线，在距离为1km的远处，所辐射的功率密度最大值为60(n W/m²)。如果$I_0=10$A，求辐射电阻。

答案：$R_{rad}=10$mW。（参见❁）

9.4 半波振子天线

在9.2节中，推导了长度远小于λ的短偶极子所辐射的电场和磁场的表达式。下面以这些表达式为基础，求取半波振子天线辐射场的表达式。半波振子（或半波偶极子）天线的名称，源于其长度$l=\lambda/2$。如图9-14所示，半波振子由一根细导线构成，在其中心带有馈电端子，经传输线使信号发生器连接到天线终端。流经导线的电流分布，是关于偶极子的中心对称的，并且电流在端部必须为零。从数学上看，$i(t)$的表达式为：

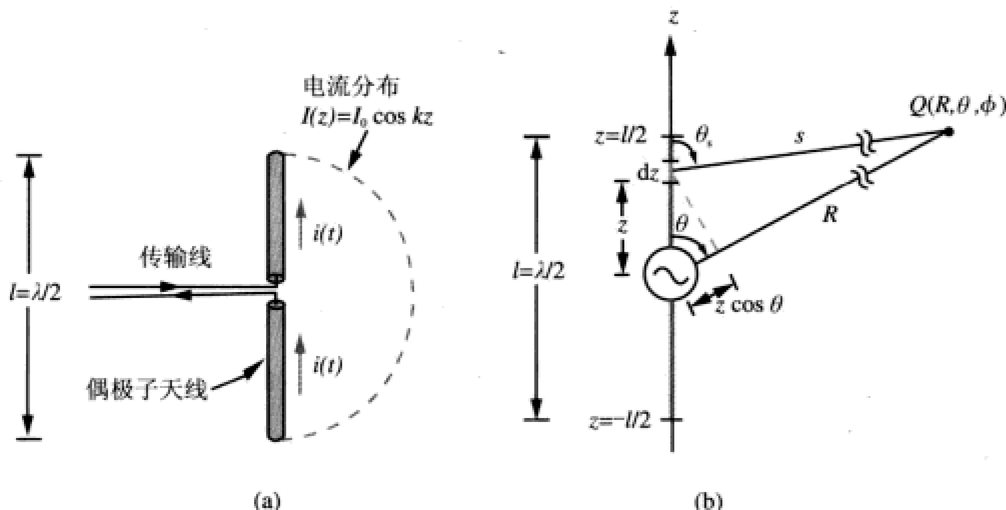
$$i(t)=I_0\cos\omega t\cos kz=\Re\mathfrak{e}[I_0\cos kz\,e^{j\omega t}], \tag{9.36}$$

其电流相量为

$$\tilde{I}(z)=I_0\cos kz,\quad \frac{-\lambda}{4}\leqslant z\leqslant\frac{\lambda}{4} \tag{9.37}$$

其中 $k=2\pi/\lambda$。式（9.9a）给出了在激励电流 I_0作用下，长度为 l 的短偶极子辐射的远端场（在 R 远处）的表达式 $\tilde{E}_\theta$。将该式应用到长度为 dz、激励电流为 $\tilde{I}(z)$、到观测点距离为 s 的一段无穷小偶极子(图 9-14b)，可得

355



(a) (b)

图 9-14 中心馈电的半波振子

$$\mathrm{d}\tilde{E}_\theta(z)=\frac{\mathrm{j}k\eta_0}{4\pi}\tilde{I}(z)\mathrm{d}z\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}ks}}{s}\right)\sin\theta_s, \tag{9.38a}$$

相应的磁场为

$$\mathrm{d}\tilde{H}_\phi(z)=\frac{\mathrm{d}\tilde{E}_\theta(z)}{\eta_0} \tag{9.38b}$$

由整个天线辐射的远端场，可以通过对构成天线的所有赫兹振子场的积分得到：

$$\tilde{E}_\theta=\int_{z=-\lambda/4}^{\lambda/4}\mathrm{d}\tilde{E}_\theta \tag{9.39}$$

在计算以上积分之前，先作两个近似。第一个近似牵涉到球面传播系数 $1/s$ 的幅值部分。在图 9-14b 中，电流单元与观测点 Q 之间的距离 s，比起偶极子的长度来要大很多，因此在考虑对 $1/s$ 的影响时，s 和 R 的差别可以忽略。所以可以令 $1/s\approx1/R$，同样的道理，可以令 $\theta_s\approx\theta$。当观测点沿着 z 轴时，s 和 R 之间的误差 Δ 最大，大小等于 $\lambda/4$（对应于天线长度的一半）。如果 $R\gg\lambda$，这一误差对 $1/s$ 的影响可以忽略。对于相位常数 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}ks}$，距离误差 Δ 对应的相位误差为 $k\Delta=(2\pi/\lambda)(\lambda/4)=\pi/2$。根据经验，大于$\pi/8$ 的相位误差被认为是不可接受的，因为在计算场 $\tilde{E}_\theta$ 时，这可能导致显著误差。所以，就相位常数而言，$s\approx R$ 的近似过于粗糙，无法使用。一个可以接受的选择是使用下面的平行光线近似：

$$s\approx R-z\cos\theta, \tag{9.40}$$

如图 9-14b 所示。

把式（9.38a）的相位常数 e^{-jks}中的 s 用式（9.40）替换，在其他地方则用 R 替换 s，用 θ 替换 θ_s，可得：

$$d\tilde{E}_\theta = \frac{jk\eta_0}{4\pi}\tilde{I}(z)dz\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right)\sin\theta e^{jkz\cos\theta} \tag{9.41}$$

356

经过：（1）将式（9.41）代入式（9.39）；（2）应用式（9.37）给定的 $\tilde{I}(z)$表达式；（3）进行积分，等几个步骤，可以得到以下的表达式：

$$\tilde{E}_\theta = j\,60I_0\left[\frac{\cos[(\pi/2)\cos\theta]}{\sin\theta}\right]\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right), \tag{9.42a}$$

$$\tilde{H}_\phi = \frac{\tilde{E}_\theta}{\eta_0}, \tag{9.42b}$$

对应的时间平均功率密度为

$$\begin{aligned} S(R,\theta) &= \frac{|\tilde{E}_\theta|^2}{2\eta_0} = \frac{15I_0^2}{\pi R^2}\left[\frac{\cos^2[(\pi/2)\cos\theta]}{\sin^2\theta}\right], \\ &= S_0\left[\frac{\cos^2[(\pi/2)\cos\theta]}{\sin^2\theta}\right] \quad (\mathrm{W/m^2}) \end{aligned} \tag{9.43}$$

检视式（9.43）可以发现，$S(R,\theta)$的最大值发生在 $\theta=\pi/2$ 处，其值为

$$S_{\max} = S_0 = \frac{15I_0^2}{(\pi R^2)}$$

所以，归一化辐射强度为

$$F(\theta) = \frac{S(R,\theta)}{S_0} = \left[\frac{\cos[(\pi/2)\cos\theta]}{\sin\theta}\right]^2 \tag{9.44}$$

半波振子的辐射波瓣图，跟图 9-7 所示的短偶极子的波瓣图大致相同，都是油炸圈饼的形状。其方向性稍微大些（为 1.64，而短偶极子只有 1.5），但其辐射电阻高达 73Ω（在 9.4.2 节中将予以证明），比短偶极子的大好几个数量级。

9.4.1 半波振子的方向性

为了估算半波振子的方向性 D 和辐射电阻 R_{rad}，需先应用式（9.20）计算总辐射功率 P_{rad}：

$$P_{rad} = R^2\iint_{4\pi} S(R,\theta)d\Omega = \frac{15I_0^2}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{\cos[(\pi/2)\cos\theta]}{\sin\theta}\right]^2\sin\theta d\theta d\phi \tag{9.45}$$

沿 ϕ 的积分等于 2π，沿 θ 的积分采用数值方法，结果是 1.22，因此，

$$P_{rad} = 36.6I_0^2 \quad (\mathrm{W}) \tag{9.46}$$

利用式（9.43），可知 $S_{\max} = 15I_0^2/(\pi R^2)$。将其应用到式（9.24），可得到半波振子的方向性 D 为：

$$D=\frac{4\pi R^2 S_{max}}{P_{rad}}=\frac{4\pi R^2}{36.6I_0^2}\left(\frac{15I_0^2}{\pi R^2}\right)=1.64 \tag{9.47}$$

这对应于2.15dB。

9.4.2 半波振子的辐射电阻

利用式（9.30a）把辐射电阻 R_{rad} 同总辐射功率 P_{rad} 联系起来，可得：

$$R_{rad}=\frac{2P_{rad}}{I_0^2}=\frac{2\times36.6I_0^2}{I_0^2}\approx73(\Omega) \tag{9.48}$$

正如早先在例9-3中看到的，由于短偶极子的辐射电阻 R_{rad} 与损耗电阻 R_{loss} 大小相当，因此辐射效率 ξ 相当低下。对于例9-3中4cm长的偶极子，在75MHz下，$R_{rad}=0.08\Omega$，$R_{loss}=0.036\Omega$。如果保持频率不变，将偶极子的长度增大到2m（$f=75$MHz时的 $\lambda=4$m），则 R_{rad} 变成73Ω，R_{loss} 增加到1.8Ω。辐射效率则从短偶极子的69%增加到半波振子的98%。更重要的是，要使传输线与电阻只有0.1Ω数量级的天线相匹配，在实际上几乎不可能，而当 $R_{rad}=73\Omega$ 时却很容易做到。 357

半波振子的另外一个令人感兴趣的特性是电抗。从传输线的角度来看，天线可以看成是在天线端子处，连接到传输线上的一个**输入阻抗**（input impedance）。输入阻抗 Z_{in} 包括一个实部 R_{in} 和一个虚部 X_{in}：

$$Z_{in}=R_{in}+jX_{in}, \tag{9.49}$$

其中，R_{in} 等于辐射电阻 R_{rad} 和损耗电阻 R_{loss} 之和，

$$R_{in}=R_{rad}+R_{loss} \tag{9.50}$$

对于半波振子，R_{loss} 比 R_{rad} 小得多，可以忽略。因此，

$$Z_{in}\cong R_{rad}+jX_{in} \tag{9.51}$$

半波振子的 X_{in} 表达式推导相当复杂，超出了本书的范围。然而，特别重要、需要注意的是，X_{in} 是严重依赖 l/λ 的函数，当 $l/\lambda=0.5$ 时，$X_{in}=42\Omega$，而当 $l/\lambda=0.48$ 时，X_{in} 则减小到0，但 R_{rad} 却基本保持不变。因此，将半波振子的长度减小4%，Z_{in} 将变成纯实数，等于73Ω，这就有可能使偶极子天线与75Ω的传输线相匹配，而无需使用匹配网络。

9.4.3 λ/4 单极天线

对于从基部进行激励的 $\lambda/4$ 单极天线，当放置在导电接地平面上时（图9-15a），其在接地平面上部区域的辐射波瓣图，与自由空间中半波振子的波瓣图相同。这是因为，根据4.12节的镜像理论，导电平面可以用 $\lambda/4$ 单极的像来代替，如图9-15b所示。因此，$\lambda/4$ 单极将辐射出跟式（9.42a）相同的电场，其归一化辐射强度由式（9.44）给定；但辐射限制在 $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$ 对应的上半部分空间。所以，单极天线仅仅辐射偶极子天线功率的一半。因此，对于 $\lambda/4$ 单极，$P_{rad}=18.3I_0^2$，其辐射电阻为 $R_{rad}=36.5\Omega$。 358

分析 $\lambda/4$ 单极的方法，也可以用来分析放置在导电平面上方的任何垂直导线天线，包括赫兹单极振子。

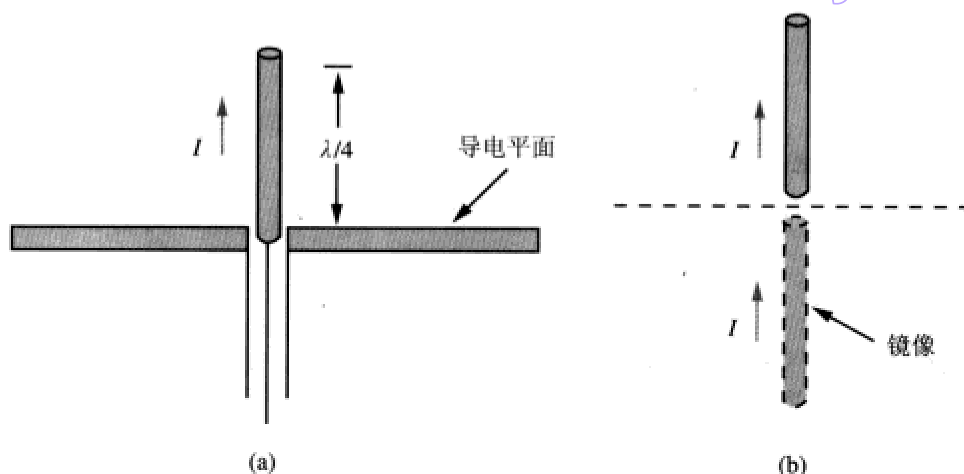


图9-15　位于导电平面之上的 λ/4 单极天线，等效于自由空间的一个完整半波振子

复习题

Q9.8　运行在（a）1MHz（AM 广播波段）；（b）100MHz（FM 广播波段）；（c）10GHz（微波波段）等不同情况下的半波振子，它们的物理长度各是多少？

Q9.9　半波振子的辐射波瓣图同赫兹振子相比有何特点？它们的方向性、辐射电阻、辐射效率相比较又有何特点？

Q9.10　假定制造材料相同，导线横截面积也相同，那么 λ/4 单极振子的辐射效率与半波振子相比有何特点？

练习 9.4　通过估算半波振子天线的 $F(\theta)$ 随 θ 的变化，确定其在上升平面（即包含振子轴线的平面）上的半功率波束宽度。

答案：$\beta = 78°$。（参见●）

练习 9.5　若在范围半径为 1km 处，半波振子的辐射功率密度最大值为 $50\mu W/m^2$，问电流幅值 I_0 是多少？

答案：$I_0 = 3.24A$。（参见●）

9.5　任意长度的偶极子

前面分析了赫兹振子和半波振子的辐射特性，现在考虑更一般的情况，即任意长度 l（相对于 λ）的直线偶极子。对于图9-16所示的中心馈电的偶极子，流经两半的电流必须是对称的，并且在端部必须为零。因此，电流相量 $\tilde{I}(z)$ 可以表示为关于某个参数的正弦函数，当 $z = \pm l/2$ 时，该函数的值为零：

$$\tilde{I}(z) = \begin{cases} I_0 \sin[k(l/2 - z)], & \text{当 } 0 \leqslant z \leqslant l/2 \text{ 时}, \\ I_0 \sin[k(l/2 + z)], & \text{当 } -l/2 \leqslant z < 0 \text{ 时}, \end{cases} \tag{9.52}$$

其中，I_0 是电流的幅值。计算这种天线辐射波的电场、磁场以及相关的功率密度的步骤，同前面半波振子天线的相应计算是基本相同的。仅有的差别是电流分布 $\tilde{I}(z)$。如果将式（9.52）给定的 $\tilde{I}(z)$ 表达式，代入式（9.41）中，则可以得到 z 位置处长

度为 dz 的一段偶极子单元辐射的电磁波微分电场 $\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{E}}_\theta$ 的表达式：

$$\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{E}}_\theta=\frac{\mathrm{j}k\eta_0 I_0}{4\pi}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\right)\sin\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz\cos\theta}\mathrm{d}z\times\begin{cases}\sin[k(l/2-z)], & \text{当 } 0\leqslant z\leqslant l/2 \text{ 时},\\ \sin[k(l/2+z)], & \text{当 } -l/2\leqslant z<0 \text{ 时},\end{cases}\tag{9.53}$$

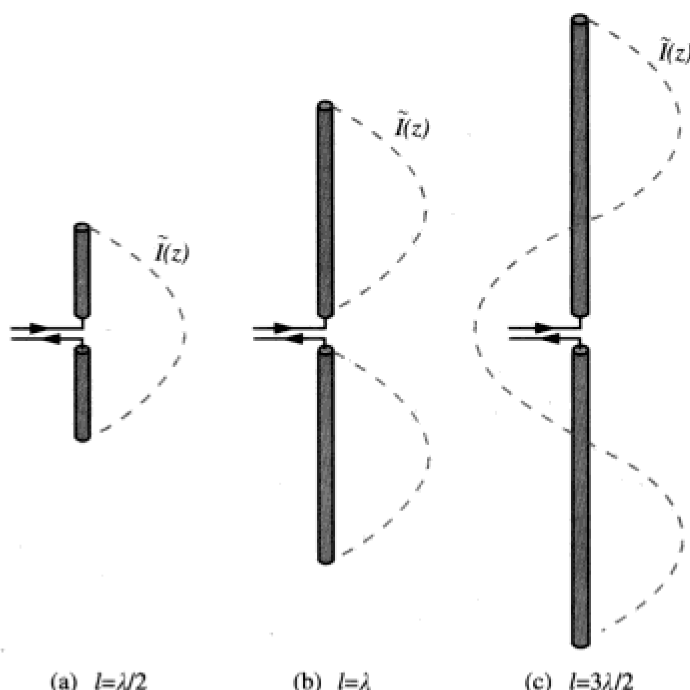


图 9-16　三个中心馈电的偶极子的电流分布

偶极子辐射的总场为

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{E}}_\theta &= \int_{-l/2}^{l/2}\mathrm{d}\,\tilde{\boldsymbol{E}}_\theta=\int_0^{l/2}\mathrm{d}\,\tilde{\boldsymbol{E}}_\theta+\int_{-l/2}^{0}\mathrm{d}\,\tilde{\boldsymbol{E}}_\theta\\ &=\frac{\mathrm{j}k\eta_0 I_0}{4\pi}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\right)\sin\theta\times\left[\int_0^{l/2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz\cos\theta}\sin[k(l/2-z)]\mathrm{d}z\right.\\ &\qquad\left.+\int_{-l/2}^{0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz\cos\theta}\sin[k(l/2+z)]\mathrm{d}z\right]\end{aligned}\tag{9.54}$$

如果应用欧拉恒等式，将 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz\cos\theta}$ 表示成 [cos（$kz\cos\theta$）+j sin（$kz\cos\theta$）]，则可以计算上面的两个积分，得到以下结果：

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_\theta=\mathrm{j}\,60I_0\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\right)\times\left[\frac{\cos\left(\dfrac{kl}{2}\cos\theta\right)-\cos\left(\dfrac{kl}{2}\right)}{\sin\theta}\right]\tag{9.55}$$

与此对应，偶极子天线辐射的时间平均功率密度为：

$$S(\theta)=\frac{|\tilde{\boldsymbol{E}}_\theta|^2}{2\eta_0}=\frac{15I_0^2}{\pi R^2}\left[\frac{\cos\left(\dfrac{\pi l}{\lambda}\cos\theta\right)-\cos\left(\dfrac{\pi l}{\lambda}\right)}{\sin\theta}\right]^2,\tag{9.56}$$

其中使用了关系式 $\eta_0 \approx 120\pi(\Omega)$ 以及 $k = 2\pi/\lambda$。当 $l = \lambda/2$ 时，式（9.56）简化为半波振子的式（9.43）。当振子长度分别为 $\lambda/2$、λ 以及 $3\lambda/2$ 时，对应的归一化辐射强度 $F(\theta) = S(R,\theta)/S_{max}$ 的图形如图9-17所示。长度 $l = \lambda/2$ 和 $l = \lambda$ 的振子，具有相似的辐射波瓣图，最大值都在 $\theta = 90°$ 位置，但全波振子的半功率波束宽度要比半波振子的窄一些，全波振子的 $S_{max} = 60I_0^2/(\pi R^2)$，是半波振子的四倍。长度 $l = 3\lambda/2$ 的振子，其波瓣图展现出多瓣结构，其最大辐射的方向不在 $\theta = 90°$ 上。

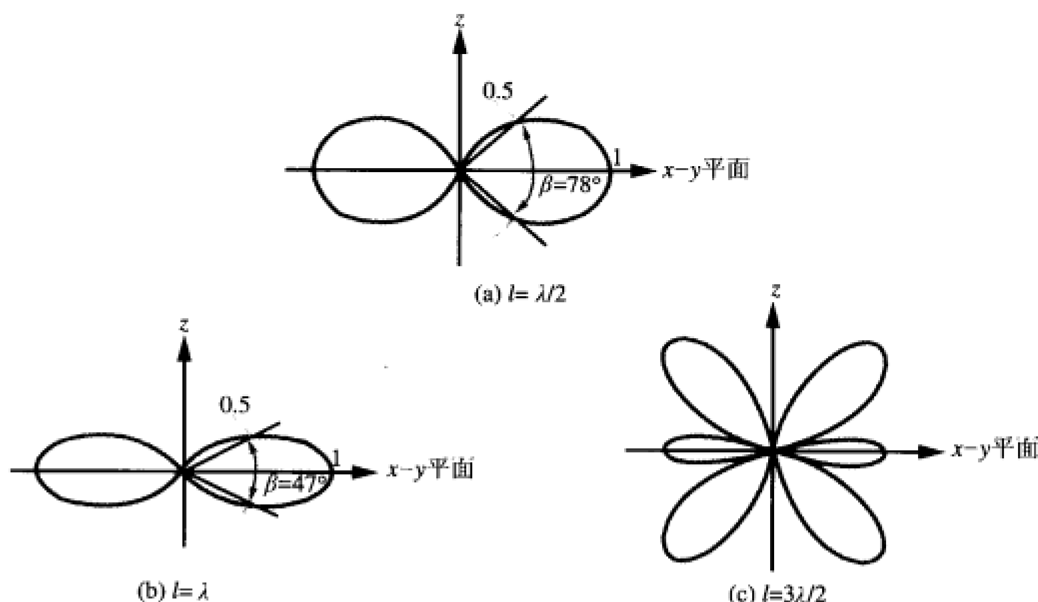


图9-17　振子长度为 $\lambda/2$、λ、$3\lambda/2$ 的辐射波瓣图

9.6　接收天线的有效面积

在前面几节中，将天线看成由电源馈电的能量辐射体，分析了它的辐射特性。现在考虑相反的过程，即接收天线如何从入射波中吸收能量，以及如何将其传送到负载。天线从入射波的功率密度 S_i（W/m²）中获取能量，并将其转换成截获功率（intercepted power）P_{int}（W），然后传送到匹配负载的能力，用有效面积（effective area）A_e来描述：

360

$$A_e = \frac{P_{int}}{S_i} \quad (\mathrm{m}^2) \tag{9.57}$$

A_e的其他常用名称还包括：有效孔径（effective aperture）、接收横截面（receiving cross section）等。天线的接收过程可以用图9-18所示的戴维南等效电路的形式来建模，其中 $\tilde{V}_{oc}$是由入射波在接收天线中感应出来的开路电压相量，Z_{in}是天线的阻抗，Z_L是从天线获取功率的负载阻抗。通常，Z_{in}和 Z_L都是复数形式：

$$Z_{in} = R_{rad} + jX_{in}, \tag{9.58a}$$

$$Z_L = R_L + jX_L, \tag{9.58b}$$

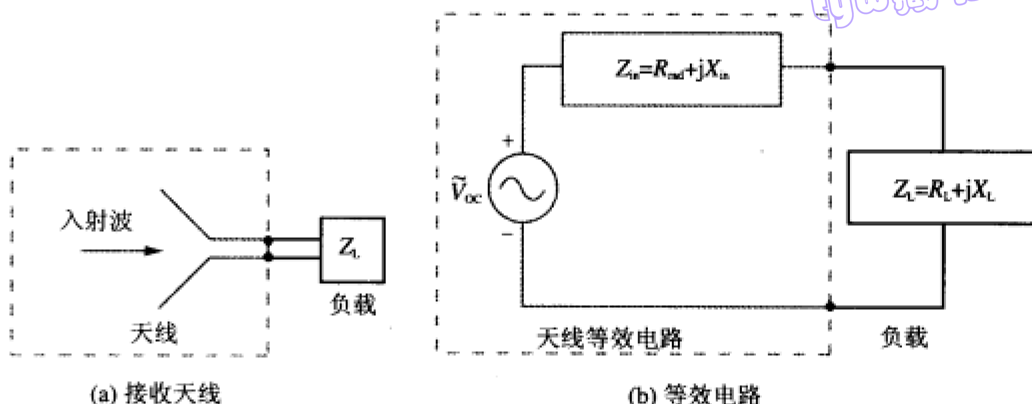


图 9-18 用等效电路表示的接收天线

其中 R_{rad} 表示天线的辐射电阻（其中假定天线的损耗电阻比 R_{rad} 小得多，可以忽略）。在例 9-4 中将会看到，要获得最大功率传输，就必须选择负载阻抗 $Z_L=Z_{in}^*$，或 $R_L=R_{rad}$ 和 $X_L=-X_{in}$。这时，电路简化为一个电源 $\tilde{V}_{oc}$，加在阻值为 $2R_{rad}$ 的一个电阻两端。因为 $\tilde{V}_{oc}$ 是正弦电压相量，传输到负载的时间平均功率为

$$P_L=\frac{1}{2}|\tilde{I}_L|^2R_{rad}=\frac{1}{2}\left[\frac{|\tilde{V}_{oc}|}{2R_{rad}}\right]^2R_{rad}=\frac{|\tilde{V}_{oc}|^2}{8R_{rad}},\tag{9.59}$$

361

其中，$\tilde{I}_L=\tilde{V}_{oc}/(2R_{rad})$，是流经电路的电流相量。由于天线是无损的，因此所有的截获功率 P_{int} 最终全部传送到负载电阻 R_L 上。因此，

$$P_{int}=P_L=\frac{|\tilde{V}_{oc}|^2}{8R_{rad}}\tag{9.60}$$

当入射波的电场 $\tilde{E}_i$ 与天线极化方向平行时，该入射波携带的功率密度为

$$S_i=\frac{|\tilde{E}_i|^2}{2\eta_0}=\frac{|\tilde{E}_i|^2}{240\pi}\tag{9.61}$$

由式（9.60）和式（9.61）的两个结果之比可得：

$$A_e=\frac{P_{int}}{S_i}=\frac{30\pi|\tilde{V}_{oc}|^2}{R_{rad}|\tilde{E}_i|^2}\tag{9.62}$$

开路电压 $\tilde{V}_{oc}$ 出现在接收天线上的原因在于入射电场 $\tilde{E}_i$，但它们之间的关系依赖于所考虑的具体天线。作为示意，让我们考虑 9.2 节中的短偶极子天线的情况。因为短偶极子的长度 l 比 λ 短，入射场感应的电流在整个长度上是均匀的，因此开路电压很简单，就是 $\tilde{V}_{oc}=\tilde{E}_il$。注意到对于短偶极子，$R_{rad}=80\pi^2/(l/\lambda)^2$（参见式（9.35）），利用 $\tilde{V}_{oc}=\tilde{E}_il$，式（9.62）简化为：

$$A_e=\frac{3\lambda^2}{8\pi}\quad(\text{m}^2)\quad(\text{短偶极子})\tag{9.63}$$

在例 9-2 中已经证明，短偶极子的方向性 $D=1.5$。用 D 表示时，式（9.64）可以重

写为：

$$A_e = \frac{\lambda^2 D}{4\pi} \quad (\text{m}^2) \quad (\text{对任何天线}) \tag{9.64}$$

虽然式（9.64）给出的 A_e 和 D 之间的关系，是由短偶极子推导出来的，但可以证明，它对于阻抗匹配的任何天线都成立。

例 9-4 最大功率传输

图 9-18b 所示的电路，由一个信号发生器连接到一个负载电阻 Z_L 构成，发生器本身又包含一个电压相量 $\tilde{V}_{oc}$ 和一个内阻 Z_{in}。如果

$$Z_{in} = R_{rad} + jX_{in},$$
$$Z_L = R_L + jX_L,$$

问 R_L、X_L 为何值时，可以使发生器向负载传输最大的功率？

解答：流经电路的电流相量为

$$\tilde{I}_L = \frac{\tilde{V}_{oc}}{Z_{in} + Z_L} = \frac{\tilde{V}_{oc}}{(R_{rad} + R_L) + j(X_{in} + X_L)}, \tag{9.65}$$

负载电阻 R_L 消耗的时间平均功率为

$$P_L = \frac{1}{2}|\tilde{I}_L|^2 R_L = \frac{1}{2}|\tilde{V}_{oc}|^2 \frac{R_L}{(R_{rad} + R_L)^2 + (X_{in} + X_L)^2} \tag{9.66}$$

现在的任务是确定负载参数 R_L 和 X_L，使 P_L 达到最大。这可以这样现实，即先求 P_L 的表达式对 R_L 的导数，并令其等于零，然后再求 P_L 对 X_L 的导数，也令其等于零。其中第一步为：

362

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = \frac{1}{2}|\tilde{V}_{oc}|^2 \left[\frac{1}{(R_{rad} + R_L)^2 + (X_{in} + X_L)^2} + \frac{-2R_L(R_{rad} + R_L)}{[(R_{rad} + R_L)^2 + (X_{in} + X_L)^2]^2}\right] = 0,$$

由此可以得到以下结果

$$(X_{in} + X_L)^2 - R_L^2 + R_{rad}^2 = 0 \tag{9.67}$$

第二步为：

$$\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = \frac{1}{2}|\tilde{V}_{oc}|^2 \left[\frac{-2R_L(X_{in} + X_L)}{[(R_{rad} + R_L)^2 + (X_{in} + X_L)^2]^2}\right] = 0,$$

由它可以得到第二个条件：

$$R_L(X_{in} + X_L) = 0 \tag{9.68}$$

为了满足这一结果，要么选择 $R_L = 0$（但它不可取，因为其意味着 $P_L = 0$），或者选择：

$$X_L = -X_{in} \tag{9.69a}$$

将式（9.69a）代入式（9.67）得到：

$$R_L = R_{rad} \tag{9.69b}$$

以上两个结果可以组合成

$$Z_L = Z_{in}^*, \tag{9.70}$$

其中 Z_{in}^* 是 Z_{in} 的共轭复数。因此，为了获得最大功率传输，负载阻抗应该等于信号发生器阻抗的共轭复数。 ■

练习 9.6 一个天线的有效面积是 9m^2。在 3GHz 下，其方向性是多少分贝？

答案：$D=40.53\text{dB}$。（参见❀）

练习 9.7 在 100MHz 时，一个天线的波瓣图立体角是 1.3sr。求：（a）天线的方向性 D；（b）天线的有效面积 A_e。

答案：（a）$D=9.67$；（b）$A_e=6.92\text{m}^2$。（参见❀）

9.7 弗里斯传输公式

图 9-19 所示的两个天线，是自由空间通信链路的一部分，这两个天线的间隔 R 很大，足以使彼此都落在对方的远端场区域。设发送和接收天线的有效面积分别为 A_t 和 A_r；辐射效率分别为 ξ_t 和 ξ_r；发射器供给发送天线的功率为 P_t，接收天线传递给接收器的功率为 P_{rec}。我们的目的是要找到 P_t 与 P_{rec} 之间的关系。跟前面一样，假定两个天线与各自的传输线之间都是阻抗匹配的。先考虑一种特殊的天线取向，即两个天线的辐射波瓣图峰值互相指向对方的情况。

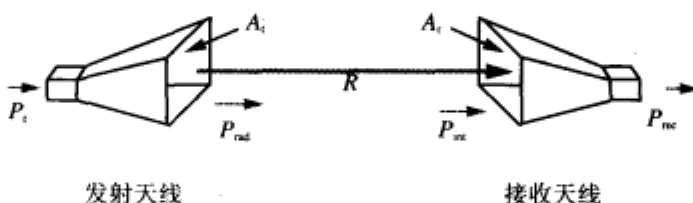


图 9-19 发射天线 - 接收天线结构

先将发射天线看成各向同性的无损辐射体。在这种情况下，对于离各向同性的发射天线距离为 R 的接收天线，其上的入射功率密度十分简单，就等于发射器的功率 P_t 除以半径为 R 的球面的面积：

$$S_{iso}=\frac{P_t}{4\pi R^2} \tag{9.71}$$

实际的发射天线既不是无损的，也不是各向同性的。因此，由实际天线引起的功率密度 S_r 为 [363]

$$S_r=G_tS_{iso}=\xi_tD_tS_{iso}=\frac{\xi_tD_tP_t}{4\pi R^2}, \tag{9.72}$$

其中，利用增益 $G_t=\xi_tD_t$ 来考虑非理想因素的影响，一是用 ξ_t 来考虑这个事实：在供给天线的功率 P_t 中，仅仅有一部分辐射到空间；二是用 D_t 来考虑发射天线在接收天线方向上所具有的方向性。利用式（9.64）、式（9.72）可以用发射天线的有效面积 A_t 来表示，即：

$$S_r=\frac{\xi_tA_tP_t}{\lambda^2R^2} \tag{9.73}$$

在接收天线侧，接收天线截获的功率，等于入射功率密度 S_r 与有效面积 A_r 之积：

$$P_{int}=S_rA_r=\frac{\xi_tA_tA_rP_t}{\lambda^2R^2} \tag{9.74}$$

传递到接收器的功率称为接收功率，用 P_{rec} 表示，它等于截获功率 P_{int} 乘以接收天线

的辐射效率 ξ_r。因此，$P_{rec}=\xi_r P_{int}$，由此可得：

$$\frac{P_{rec}}{P_t}=\frac{\xi_t\xi_r A_t A_r}{\lambda^2 R^2}=G_t G_r\left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2 \tag{9.75}$$

这个关系称为**弗里斯传输公式**（Friis transmission formula），在有些时候，P_{rec}/P_t 则称为**功率传输比**（power transfer ratio）。在推导包含增益 G_t、G_r 的弗里斯公式时（其中 G_t、G_r 分别为发射天线和接收天线的增益），对发射天线应用了 $\xi_t A_t=\xi_t D_t\lambda^2/4\pi=G_t\lambda^2/4\pi$，对接收天线也应用了类似的关系。

如果两个天线的取向不在传递最大功率的方向，则式（9.75）可以重写为下面的一般化形式

$$\frac{P_{rec}}{P_t}=G_t G_r\left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2 F_t(\theta_t,\phi_t)\ F_r(\theta_r,\phi_r), \tag{9.76}$$

其中 $F_t(\theta_t,\phi_t)$ 是发射天线的归一化辐射强度，其中的计算方向 (θ_t,ϕ_t) 是接收天线所在的方向（即从发射天线的天线波瓣图上看到的接收天线方向），对于接收天线的 $F_r(\theta_r,\phi_r)$，也有类似的定义。

例 9-5 卫星通信系统

一个 6GHz 的电视直播卫星系统，在离地面大约 40 000km 的高空，通过一个直径 2m 的抛物面碟形天线，发射 100W 的功率。每个电视频道占用 5MHz 的波段。由于天线接收到的电磁噪声，以及接收电子装置产生的噪声，导致地面家用电视接收器具有以下的噪声水平：

$$P_n=KT_{sys}B \quad (\mathrm{W}), \tag{9.77}$$

其中 T_{sys}（单位为 K）是一个性能指标，称作**系统噪声温度**（system noise temperature），它表示接收器－天线组合的噪声水平；K 是玻尔兹曼常数，等于 1.38×10^{-23}J/K；B 是接收器的带宽，单位为 Hz。

信噪比（signal-to-noise ratio）S_n（注意不要同功率密度 S 相混淆），定义为从发射器收到的信号功率 P_{rec} 与 P_n 的比值：

$$S_n=P_{rec}/P_n \quad (\text{无量纲}) \tag{9.78}$$

对于一个 $T_{sys}=580$K 的接收器，要实现 $S_n=40$dB 的高品质电视信号接收，抛物面碟形接收天线的最小直径是多少？可以假定卫星及地面接收天线是无损的，可以假定它们的有效面积等于物理孔径。

解答：给定的参数有：

$P_t=100$W，$f=6$GHz $=6\times10^9$Hz，$S_n=10^4$，

364 发射天线直径 $d_t=2$m，

$T_{sys}=580$K，

$R=40\ 000$km $=4\times10^7$m，

$B=5$MHz $=5\times10^6$Hz。

波长为 $\lambda=c/f=5\times10^{-2}$m，卫星发射天线的面积为 $A_t=(\pi d_t^2/4)=\pi(\mathrm{m}^2)$。根据式（9.77），接收器的噪声功率为

$$P_n = KT_{sys}B = 1.38 \times 10^{-23} \times 580 \times 5 \times 10^6 = 4 \times 10^{-14} \text{W}$$

对于无损天线（$\xi_t = \xi_r = 1$），利用式（9.75），可以得到接收信号的功率为

$$P_{rec} = \frac{P_t A_t A_r}{\lambda^2 R^2} = \frac{100\pi A_r}{(5 \times 10^{-2})^2 (4 \times 10^7)^2} = 7.85 \times 10^{-11} A_r$$

令比值 P_{rec}/P_n 等于 $S_n = 10^4$，可以求得接收天线的面积 A_r：

$$10^4 = \frac{7.85 \times 10^{-11} A_r}{4 \times 10^{-14}},$$

由此得 $A_r = 5.1\text{m}^2$。所需要的最小直径为 $d_r = \sqrt{4A_r/\pi} = 2.55\text{m}$。 ■

 **M9.2，9.4**

复习题

Q9.11 对于连接到负载的交流发电机，从发电机往负载传递最大功率的条件是什么？

Q9.12 如果通信系统的两个天线具有恒定的辐射效率以及有效面积，功率传输比如何随 λ 变化？请从天线的波束是如何随 λ 变化的角度来解释。

练习 9.8 假定例 9-5 中描述的通信系统的运行频率加倍到 12GHz。家用电视接收天线的最小直径将变为多少？

答案：$d_r = 1.27\text{m}$。（参见◉）

练习 9.9 一个 3GHz 的微波链路，包括两个完全相同的天线，增益都为 30dB。如果发射器的输出功率为 1kW，两个天线距离 10km 远，求接收到的功率。

答案：$P_{rec} = 6.33 \times 10^{-4}\text{W}$。（参见◉）

练习 9.10 抛物面碟形天线的有效面积近似等于其物理孔径。如果一个碟形天线在 10GHz 下的方向性是 30dB，问其有效面积是多少？如果频率增加到 30GHz，其新的方向性是多少？

答案：$A_e = 0.07\text{m}^2$，$D = 39.54\text{dB}$。（参见◉）

9.8 大孔径天线的辐射

对于导线天线，其辐射源为无穷小的电流单元，这些电流单元共同构成了沿着导线分布的电流；其在任一空间给定点的总辐射场，等于所有这些电流单元辐射场的和或积分。对孔径天线也可以作类似的陈述，只不过其辐射源变成了孔径上的电场分布。考虑图 9-20 所示的喇叭天线，它通过一根同轴传输线连接到信号源，同轴线的外层导体连接在喇叭的金属本体上，而内芯导体则通过一个小孔，部分地进入到喇叭喉的尾端。进入的这部分导体，起着单极天线的作用，所产生的波沿着喇叭孔径的方向往外辐射。辐射到孔径中的电磁波能量的电场，是随孔径上的坐标变量 x_a、y_a 变化的函数，称作电场孔径分布，以 $E_a(x_a, y_a)$ 表示。在喇叭内部，波的传播是由喇叭的几何结构引导的；但在电磁波由导行波转变为无界波的位置上，波前上的每一点都构成一个球面次级小波源。因此，孔径可以用分布式的各向同性辐射体表示，每个辐射体的强度正比于其所在位置 (x_a, y_a) 处的电场 $E_a(x_a, y_a)$。在远距离的 Q 点，来自所有辐射体的所有波的组合，构成了该点的总电磁波，可以由放置该处

365

的接收器观测到。

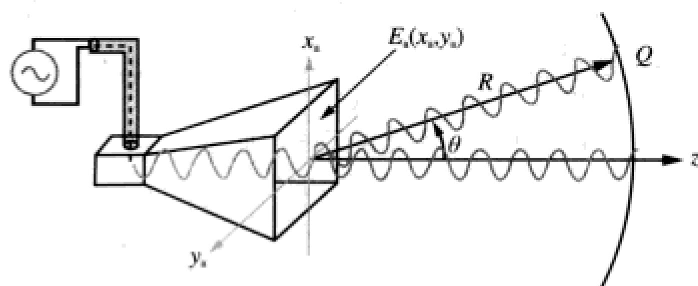


图 9-20 孔径场分布为 $E_a(x_a, y_a)$ 的喇叭天线

以上描述的喇叭天线的辐射过程，也适用于存在电磁波入射的任何孔径。例如，若通过校准透镜，用一个光源去照射遮断屏上的开口，如图 9-21a 所示，则开口将成为次级球面小波源，这十分类似喇叭天线的孔径。对于图 9-21b 所示的抛物面反射天线，可以用一个假想的孔径来描述，该孔径代表反射器前方某个平面上的电场分布。

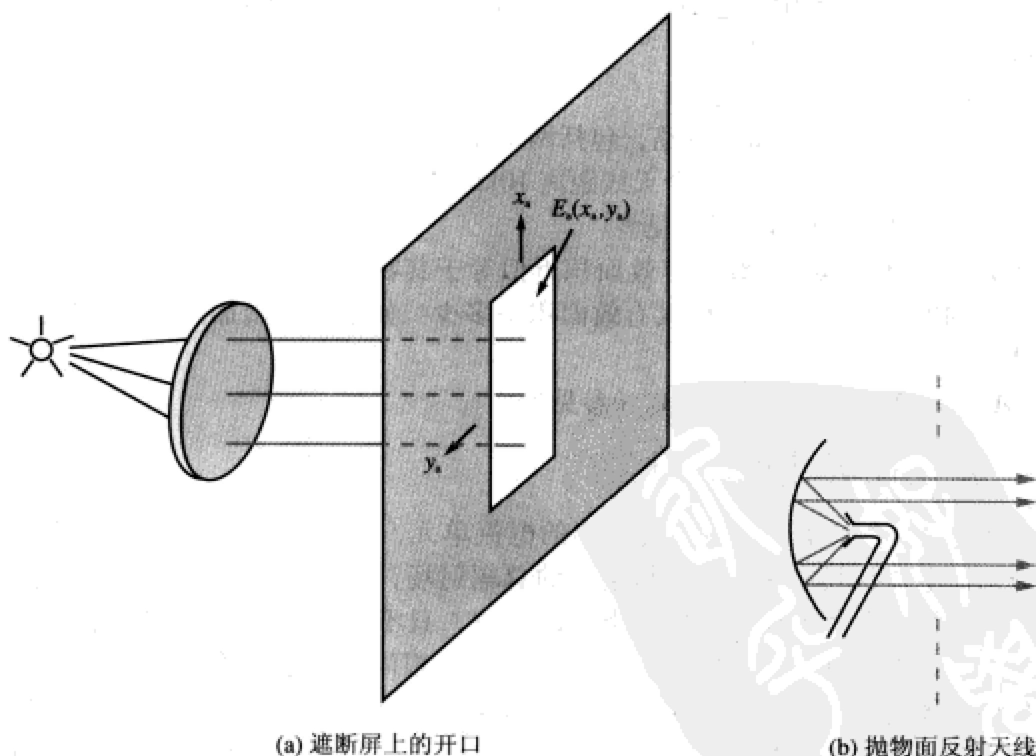


图 9-21 孔径辐射：(a) 遮断屏上的开口，受到校准透镜另一侧光源的照射；(b) 抛物面碟形反射器，受到小喇叭天线的照射

孔径辐射波的电磁场计算，有两类典型的数学公式可供选择。第一类是标量公式（scalar formulation），它以基尔霍夫的工作为基础，通常用于光学中的衍射问题以及用于大孔径天线。第二类是基于麦克斯韦方程的矢量公式（vector formulation）。

尽管矢量的方法在理论上更为高级，但却常常难于应用。因此，矢量方法主要应用在天线孔径的尺度小于波长或同波长相当的情况，因为在这种情况下，标量方法不再适用。

本节将仅介绍标量衍射方法，这样做的理由，一方面是因为其内在的简单性，另一方面是因为其具有广泛的实际应用。应用标量公式有一个关键要求，即天线孔径在每个主要维度上的长度，必须至少是几个波长。这类天线的一个显著特征，是其高方向性及随之而来的窄小波束，这对雷达以及自由空间的微波通信系统极具吸引力。这类应用常用的频率范围是 1GHz ~ 30GHz 的微波段，对应的波长范围是 30cm ~ 1cm，因此，在这个频率范围内建造、使用的天线，特别适合的孔径尺度是多个波长。

在图 9-22 中，x_a-y_a平面标记为 A 平面，上面有一个孔径，其电场分布 $E_a(x_a,y_a)$常称作孔径照度（aperture illumination）。虽然将要讨论的公式具有广泛的通用性，适用于任何的二维孔径分布，包括圆形的、椭圆形的孔径等，但为了方便，选择矩形的开口进行讨论，并设其 x_a方向的尺寸为 l_x，y_a方向的尺寸为 l_y。在图 9-22 中有一个观测平面 O，轴线为（x，y），到孔径平面 A 的距离为 z。设两平面的轴线平行，且相隔的距离 z 足够大，以致观测平面上的任一点 Q 都在孔径的远端场区中。为了满足远端场条件，有必要使

$$R \geqslant 2d^2/\lambda, \tag{9.79}$$

其中 d 是辐射孔径最长的直线尺度。

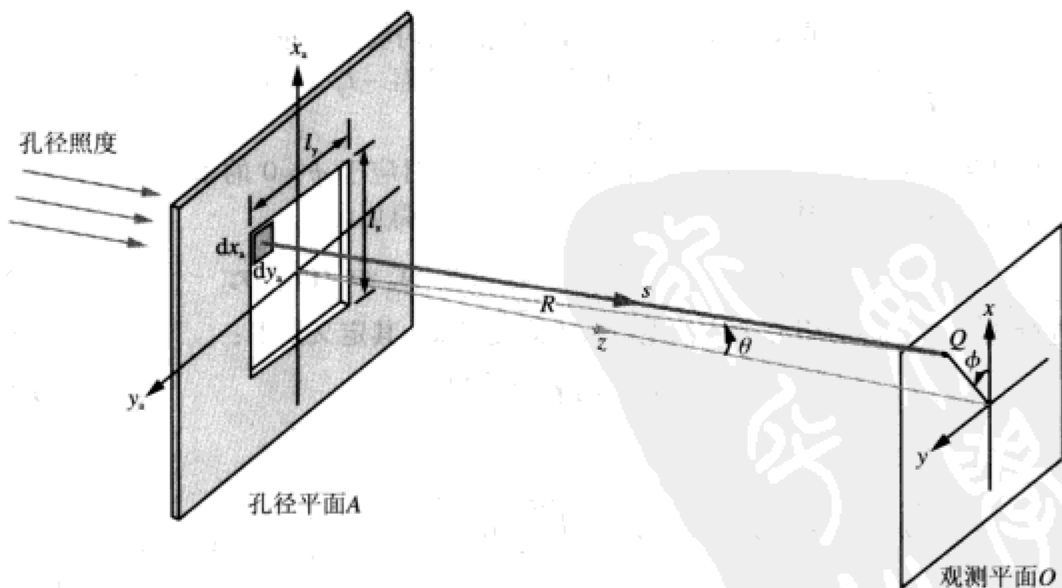


图 9-22 $z=0$ 处的 x_a-y_a平面上的孔径辐射

如图 9-22 所示，观测点 Q 的位置是由孔径中心到 Q 点之间的范围半径 R、角度 θ，以及 ϕ 确定的，这三个参数组合在一起，定义了观测点相对孔径坐标系的方向。将 Q 点的入射波电场相量记为 $\tilde{E}(R,\theta,\phi)$，则根据基尔霍夫标量衍射理论，辐射场

$\tilde{\boldsymbol{E}}(R,\theta,\phi)$和孔径照度$\tilde{\boldsymbol{E}}_a(x_a,y_a)$之间具有如下关系：

$$\tilde{\boldsymbol{E}}(R,\theta,\phi)=\frac{\mathrm{j}}{\lambda}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\right)\tilde{\boldsymbol{h}}(\theta,\phi), \tag{9.80}$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{h}}(\theta,\phi)=\iint_{-\infty}^{\infty}\tilde{\boldsymbol{E}}_a(x_a,y_a)\cdot\exp[\mathrm{j}k\sin\theta(x_a\cos\phi+y_a\sin\phi)]\mathrm{d}x_a\,\mathrm{d}y_a, \tag{9.81}$$

我们将$\tilde{\boldsymbol{h}}(\theta,\phi)$称作$\tilde{\boldsymbol{E}}(R,\theta,\phi)$的形状因数（form factor）。上式的积分限写成无穷大，是考虑到孔径以外的$\tilde{\boldsymbol{E}}_a(x_a,y_a)$值恒等于零这一事实。球面传播因数（$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}/R$）用以考虑波在孔径中心与观测点之间的传播；而$\tilde{\boldsymbol{h}}(\theta,\phi)$则表示激励场$\tilde{\boldsymbol{E}}_a(x_a,y_a)$在孔径范围上的积分，其中的指数函数，即式（9.81）中的$\exp[\mathrm{j}k\sin\theta(x_a\cos\phi+y_a\sin\phi)]$，近似考虑了$R$、$s$两个距离的差别，这里$s$是观测点到孔径上任意点$(x_a,y_a)$的距离

367

（见图9-22）。辐射场$\tilde{\boldsymbol{E}}(R,\theta,\phi)$的极化方向同孔径场$\tilde{\boldsymbol{E}}_a(x_a,y_a)$的相同，辐射波的功率密度则为

$$S(R,\theta,\phi)=\frac{|\tilde{\boldsymbol{E}}(R,\theta,\phi)|^2}{2\eta_0}=\frac{|\tilde{\boldsymbol{h}}(\theta,\phi)|^2}{2\eta_0\lambda^2R^2} \tag{9.82}$$

9.9　具有均匀孔径分布的矩形孔径

为了说明标量衍射技术，考虑一个矩形孔径，其高度为l_x、宽度为l_y，且每个方向的长度至少有几个波长。该孔径由以下形式的均匀场分布进行激励：

$$\tilde{E}_a(x_a,y_a)=\begin{cases}E_0, & \text{当}\ -l_x/2\leqslant x_a\leqslant l_x/2\ \text{且}\ -l_y/2\leqslant y_a\leqslant l_y/2\ \text{时}\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{9.83}$$

为了保持数学上的简单性，我们仅分析x-z平面（对应于$\phi=0$的平面）上、范围半径等于定值R处的辐射波瓣图。此时，式（9.81）简化为

368

$$\tilde{h}(\theta)=\int_{y_a=-l_y/2}^{l_y/2}\int_{x_a=-l_x/2}^{l_x/2}E_0\exp[\mathrm{j}kx_a\sin\theta]\mathrm{d}x_a\mathrm{d}y_a \tag{9.84}$$

在进行式（9.84）的积分之前，先引入中间变量u，其定义如下：

$$u=k\sin\theta=\frac{2\pi\sin\theta}{\lambda}, \tag{9.85}$$

这样一来，式（9.84）变为：

$$\begin{aligned}\tilde{h}(\theta)&=E_0\int_{-l_x/2}^{l_x/2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}ux_a}\mathrm{d}x_a\cdot\int_{-l_y/2}^{l_y/2}\mathrm{d}y_a=E_0\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}ul_x/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}ul_x/2}}{\mathrm{j}u}\right]\cdot l_y\\&=\frac{2E_0l_y}{u}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}ul_x/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}ul_x/2}}{2\mathrm{j}}\right]=\frac{2E_0l_y}{u}\sin(ul_x/2)\end{aligned} \tag{9.86}$$

用u的定义式代换u，得到：

$$\tilde{\boldsymbol{h}}(\theta) = \frac{2E_0 l_y}{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta\right)} \sin(\pi\, l_x \sin\theta/\lambda)$$
$$= E_0 l_x l_y \frac{\sin(\pi\, l_x \sin\theta/\lambda)}{\pi\, l_x \sin\theta/\lambda} = E_0 A_p \sin c(\pi\, l_x \sin\theta/\lambda), \tag{9.87}$$

其中 $A_p = l_x l_y$ 是孔径的物理面积。上式使用了 sin c 函数的标准定义，即对于任何参数 t，有

$$\sin c\, t = \frac{\sin t}{t} \tag{9.88}$$

利用式（9.82），可得辐射波在观测点上的功率密度表达式为：

$$S(R,\theta) = S_0 \sin c^2(\pi\, l_x \sin\theta/\lambda) \quad (x\text{-}z\ 平面) \tag{9.89}$$

其中 $S_0 = E_0^2 A_p^2/(2\eta_0 \lambda^2 R^2)$。sin c 函数在参数等于 0 时达到其最大值 1，对应于 $\theta = 0$。因此，对于固定的范围半径 R，$S_{max} = S(\theta = 0) = S_0$。由此可得归一化辐射强度为

$$F(\theta) = \frac{S(R,\theta)}{S_{max}} = \sin c^2(\pi\, l_x \sin\theta/\lambda) = \sin c^2(\pi\gamma) \quad (x\text{-}z\ 平面) \tag{9.90}$$

在图 9-23 中，以 dB 为单位绘制了 $F(\theta)$ 随中间变量 $\gamma = (l_x/\lambda)\sin\theta$ 变化的图形。该波瓣图的零点发生在除零以外的其他整数值 γ 上。

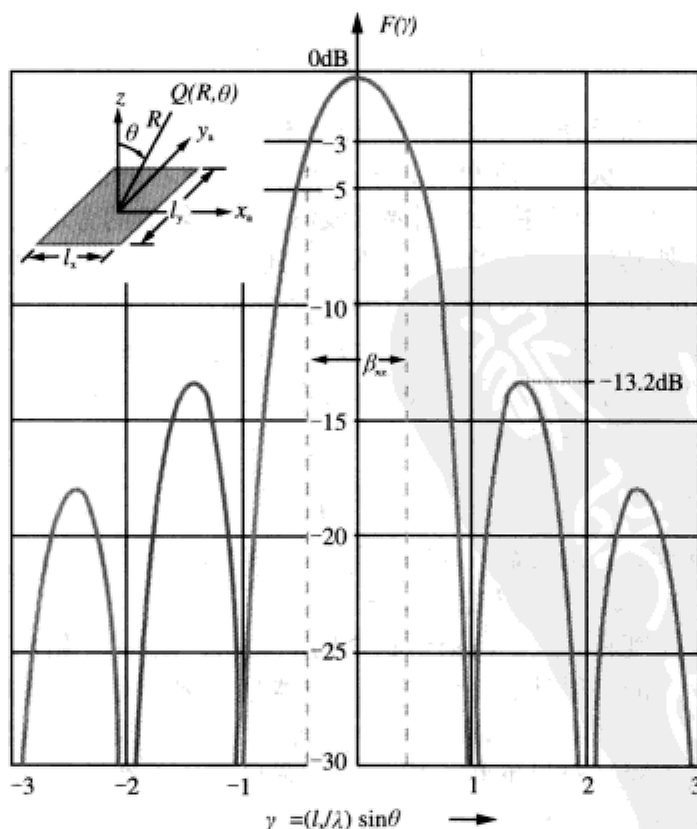


图 9-23 在 x-z 平面上（$\phi = 0$）受到均匀照射的矩形孔径的归一化辐射波瓣图

9.9.1 波束宽度

归一化辐射强度 $F(\theta)$ 在 x-z 平面上是对称的，最大值沿着瞄准轴的方向（此处为 $\theta=0$）。其半功率波束宽度 $\beta_{xz}=\theta_2-\theta_1$，这里的 θ_1、θ_2 是当 $F(\theta,0)=0.5$（或分贝尺度上的 -3dB）时的 θ 角度值，如图9-23所示。由于这里的波瓣图关于 $\theta=0$ 对称，所以 $\theta_1=-\theta_2$，$\beta_{xz}=2\theta_2$。角度 θ_2 可以通过求解下式得到

$$F(\theta_2)=\sin c^2(\pi l_x \sin\theta/\lambda)=0.5 \tag{9.91}$$

通过查取 sin c 函数表，由式（9.91）可以得到下述结果：

$$\frac{\pi l_x}{\lambda}\sin\theta_2=1.39, \tag{9.92}$$

或

$$\sin\theta_2=0.44\frac{\lambda}{l_x} \tag{9.93}$$

369

因为 $\lambda/l_x\ll1$（标量衍射理论的一个基本条件，就是孔径的尺寸远大于波长 λ），所以 θ_2 是很小的角，可以应用近似公式 $\sin\theta_2\approx\theta_2$。因此，

$$\beta_{xz}=2\theta_2\approx2\sin\theta_2=0.88\frac{\lambda}{l_x}\quad(\text{rad}) \tag{9.94a}$$

在 y-z 平面（$\phi=\pi/2$）进行类似的求解可得：

$$\beta_{yz}=0.88\frac{\lambda}{l_y}\quad(\text{rad}) \tag{9.94b}$$

值得注意的是，均匀孔径分布（在整个孔径上 $\widetilde{\boldsymbol{E}}_a=E_0$）产生的远端场波瓣图，具有最窄可能的波束宽度。从图9-23可见，第一个旁瓣电平在峰值以下13.2dB处，这等效于峰值的4.8%。如果某个特意应用要求波瓣图具有较低的旁瓣电平（以防止与天线波瓣图主波束以外其他方向上的激励源发出的信号相互干扰），则可以采用渐缩孔径分布（tapered aperture distribution）。这种孔径分布在中心的分布最大，随着往边沿靠近，分布逐渐减小。渐缩的分布可以使波瓣图的旁瓣电平很低，但却导致主瓣变宽。渐缩越陡，旁瓣电平就越低，主瓣也就越宽。通常，在给定平面上的波束宽度，譬如在 x-z 平面上，由下式确定：

$$\beta_{xz}=k_x\frac{\lambda}{l_x}, \tag{9.95}$$

其中 k_x 是与渐缩陡度相关的常数。对于均匀分布没有陡度的情况，$k_x=0.88$，对于高陡度分布的情况，$k_x\approx2$。典型情况下 $k_x\approx1$。

为了说明天线尺度和对应的波束形状之间的关系，图9-24给出了一个圆形反射器和一个圆柱反射器的辐射波瓣图。圆形反射器具有圆形对称的波瓣图；圆柱反射器的波瓣图则不同，它在幅角平面上有一个窄波束同最大尺度方向相对应，在上升平面上有一个宽波束同最窄尺度相对应。对于圆形对称天线波瓣图，波束宽度 β 同直径 d 的近似关系为 $\beta\approx\lambda/d$。

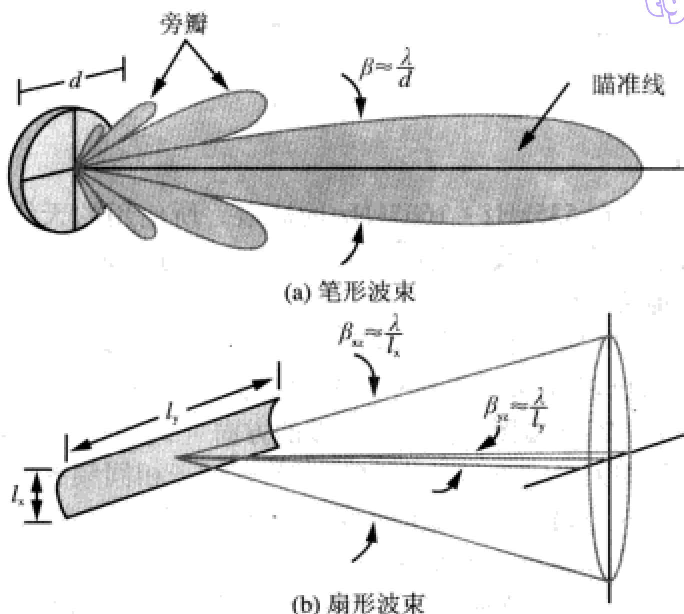


图 9-24 图 a 为圆形反射器的辐射波瓣图；图 b 为圆柱反射器的辐射波瓣图（未画出其旁瓣）

 **D9.2**

9.9.2 方向性和有效面积

在 9.3.3 节中，针对单主瓣、且主瓣瞄准线沿着 z 轴的天线，推导了用半功率波束宽度 β_{xz} 和 β_{yz} 表示的天线方向性 D 的近似计算式（9.26）： 370

$$D\approx\frac{4\pi}{\beta_{xz}\beta_{yz}} \tag{9.96}$$

如果使用近似关系 $\beta_{xz}\approx\lambda/l_x$ 以及 $\beta_{yz}\approx\lambda/l_y$，可得：

$$D\approx\frac{4\pi l_x l_y}{\lambda^2}=\frac{4\pi A_p}{\lambda^2} \tag{9.97}$$

对于任何天线，其方向性 D 同有效面积 A_e 都遵从式（9.64），即

$$D=\frac{4\pi A_e}{\lambda^2} \tag{9.98}$$

因此，对于孔径天线，其有效孔径近似等于其物理孔径，即 $A_e\approx A_p$。

练习 9.11 通过计算 $t=1.39$ 时 $\sin c^2 t$ 的值，证明式（9.92）是式（9.91）的一个解。

练习 9.12 一个矩形孔径，其瞄准线沿着 z 轴，在 x-z 和 y-z 平面的半功率波束宽度都是 3°。试确定其方向性（以 dB 表示）。

答案：$D=4583.66=36.61\text{dB}$。（参见●）

练习 9.13 使用标量衍射技术计算孔径天线的辐射场必须满足什么条件？该技术可用于计算眼睛瞳孔（$d\approx0.2\text{cm}$）在可见光谱（$\lambda=0.35\mu\text{m}\sim0.7\mu\text{m}$）下的方向性波瓣图吗？若假定瞳孔受到均匀照射，在 $\lambda=0.5\mu\text{m}$ 时，眼睛方向性波瓣图的波束宽度是多少？

答案：$\beta = 0.88\lambda/d = 2.2\times10^{-4}$rad = 0.76′（角分，60′=1°）。（参见）

M9.3

9.10 天线阵

AM 广播服务运行在 535kHz ~ 1605kHz 的波段，所使用的天线大部分都是沿着高塔安装的垂直振子。这类天线的高度在 $\lambda/6$ 到 $5\lambda/8$ 的范围之内，具体取决于所要求的运行性能及其他考虑因素。天线的物理高度则在 46m(150ft) ~ 274m(900ft)之间变化。1MHz 大约在 AM 频段的中央，其波长是 300m。因为单个振子在水平面中的辐射场是均匀的（这已经在 9.2 节和 9.4 节中讨论过），因此有必要采用多个天线塔，以使水平面上的天线波瓣图定向到感兴趣的方向（例如一个城市），而在不需要的方向上最小化，例如人口密度低的方向，或者运行于相同频率的由其他发射站服务的区域对应的方向（以避免不希望的干涉效应）。当两个或多个天线一起使用时，它们的组合称为*天线阵*（antenna array）。

371

AM 广播天线阵只是天线阵应用的一个例子，实际上天线阵也广泛应用于大量通信系统以及雷达应用中。为了获得高方向性、窄波束、低旁瓣、波束方向可操控，以及天线波瓣图整形等，天线阵技术给天线设计者们提供了很大的灵活性。图 9-25 所示为一个巨型雷达系统的照片，该系统由 5184 个独立的振子天线单元构成发射器阵列，由 4660 个单元构成接收器阵列。该雷达系统属于美国空军控制的空间监视网络的一部分，运行频率为 442MHz，所发送的组合峰值功率高达 30MW！

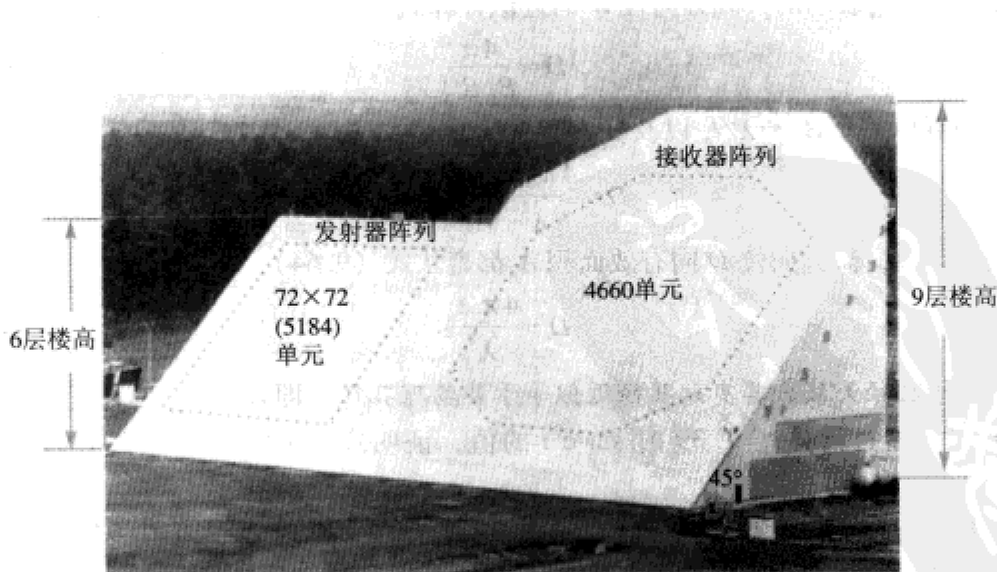


图 9-25 AN/FPS-85 相控阵雷达设备（安装在佛罗里达州的弗里波特市附近）。出于对军用飞机上装载的电子引爆设备（如弹射座椅、军需品等）的安全考虑，该雷达周围几英里为禁飞区

尽管天线阵没有必要由相同的辐射单元组成，但通常大多数阵列都使用相同的

单元，如振子天线、裂缝天线、喇叭天线或抛物面碟形天线等，并由相同类型的电流或场分布激励。构成阵列的天线单元，可以按各种方式配置，但最常用的只有两种，一种是线性一维配置，其中的单元沿一条直线放置，另一种是二维点阵网格配置，其中的单元构成一个矩形网格。所希望的阵列远端场辐射波瓣图形状，可以通过控制阵列单元的相对幅值，用合成的方法得到。此外，采用电子控制的固态移相器，通过控制阵列单元的相对相位，可以对天线阵的波束方向进行电子操控。天线阵的这种灵活性，给其带来了大量应用，其中包括**电子转向**（electronic steering），以及**多波束的生成**（multiple-beam generation）等。 372

本节以及下一节的目的在于，向读者介绍天线阵理论的基本原理，以及用于天线波瓣图整形、主瓣转向的一些设计技术。介绍将限制在邻近单元等间隔的一维直线阵范围内。

在图 9-26 中，N 个完全相同的辐射器沿着 z 轴放置，构成了一个直线阵。辐射器通过分支网络由共同的振荡器馈电。在每个分支中，按串联的方式插入衰减器（或放大器）、移相器，以控制该分支中天线单元的馈电信号的幅值和相位。

在任何辐射单元的远端场区域，电场强度相量 $\tilde{\mathbf{E}}_e(R,\theta,\phi)$ 都可以表示为两个函数的乘积，这两个函数分别是球面传播系数 e^{-jkR}/R，它用来考虑电场强度对范围半径 R 的依赖关系，以及 $\tilde{\mathbf{f}}_e(\theta,\phi)$，它用来表示电场强度对单元电场的方向性的依赖关系。因此，对于一个孤立的单元，其辐射场为

$$\tilde{\mathbf{E}}_e(R,\theta,\phi)=\frac{e^{-jkR}}{R}\tilde{\mathbf{f}}_e(\theta,\phi), \tag{9.99}$$

对应的功率密度 S_e 为

$$S_e(R,\theta,\phi)=\frac{1}{2\eta_0}|\tilde{\mathbf{E}}_e(R,\theta,\phi)|^2=\frac{1}{2\eta_0R^2}|\tilde{\mathbf{f}}_e(\theta,\phi)|^2 \tag{9.100}$$

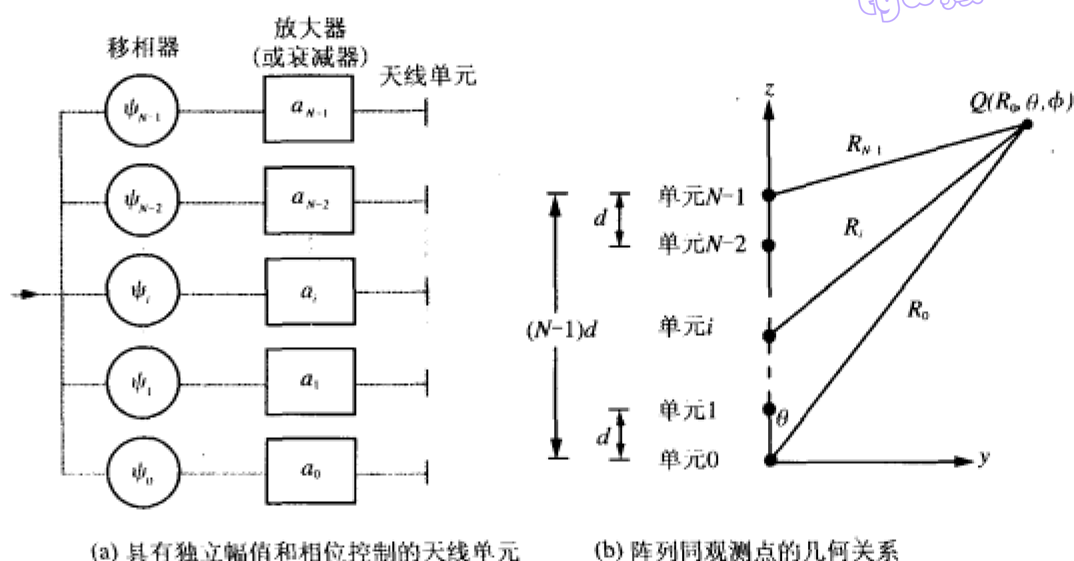
对于图 9-26b 所示的阵列中的单元，在观测点 Q，单元 i 对应的范围半径为 R_i，由其引起的远端场可以写成以下形式：

$$\tilde{\mathbf{E}}_i(R_i,\theta,\phi)=A_i\frac{e^{-jkR_i}}{R_i}\tilde{\mathbf{f}}_e(\theta,\phi), \tag{9.101}$$

其中 $A_i=a_ie^{j\psi_i}$ 是**复馈电系数**（complex feeding coefficient），它表示以某个参考激励为基准时，产生 $\tilde{\mathbf{E}}_i$ 的那个激励的幅值 a_i 和相位 ψ_i。在实际应用中，从所有单元中选取某一个的激励作为参考。需要注意的是，在天线阵中对于不同的单元，R_i 和 A_i 可能不同，但 $\tilde{\mathbf{f}}_e(\theta,\phi)$ 对于所有单元都相同，因为为了使所有单元都具有相同的方向性波瓣图，就必须假定 $\tilde{\mathbf{f}}_e(\theta,\phi)$ 相同。 373

在观测点 $Q(R_0,\theta,\phi)$ 处的总场，等于 N 个单元的场之和：

$$\tilde{\mathbf{E}}(R_0,\theta,\phi)=\sum_{i=0}^{N-1}\tilde{\mathbf{E}}_i(R_i,\theta,\phi)=\left[\sum_{i=0}^{N-1}A_i\frac{e^{-jkR_i}}{R_i}\right]\tilde{\mathbf{f}}_e(\theta,\phi), \tag{9.102}$$



(a) 具有独立幅值和相位控制的天线单元　　(b) 阵列同观测点的几何关系

图 9-26　直线阵的配置及其几何关系

其中 R_0 表示点 Q 到坐标系中心（取为 0 号单元的位置）的范围半径。对于长度 $l=(N-1)d$ 的阵列（d 为单元间距），为了满足式（9.79）给出的远端场条件，范围半径 R_0 应该足够大，以使

$$R_0 \geqslant \frac{2l^2}{\lambda}=\frac{2(N-1)^2d^2}{\lambda} \tag{9.103}$$

这个条件使得我们在考虑辐射场的幅值时，可以忽略点 Q 到各个具体单元间距离的差别。因此，在式（9.102）的分母中，对于所有的 i，可以令 $R_i=R_0$。牵涉到传播系数的相位部分时，可以使用平行光线近似，即

$$R_i \approx R_0 - z_i\cos\theta = R_0 - id\cos\theta, \tag{9.104}$$

其中 $z_i=id$ 是第 i 个单元到第 0 个单元的距离（图 9-27）。将以上两个近似应用到式（9.102）可得：

$$\widetilde{E}(R_0,\theta,\phi) = \widetilde{f}_e(\theta,\phi)\left(\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}\right)\times\left[\sum_{i=0}^{N-1}A_i e^{jikd\cos\theta}\right], \tag{9.105}$$

对应的天线阵的功率密度为

$$\begin{aligned} S(R_0,\theta,\phi) &= \frac{1}{2\eta_0}\left|\widetilde{E}(R_0,\theta,\phi)\right|^2 = \frac{1}{2\eta_0R_0^2}\left|\widetilde{f}_e(\theta,\phi)\right|^2\left|\sum_{i=0}^{N-1}A_i e^{jikd\cos\theta}\right|^2 \\ &= S_e(R_0,\theta,\phi)\left|\sum_{i=0}^{N-1}A_i e^{jikd\cos\theta}\right|^2, \end{aligned} \tag{9.106}$$

其中应用了式（9.100）。以上的式子是两个系数的乘积，其中第一个系数 $S_e(R_0,\theta,\phi)$，是单个单元辐射能量的功率密度，第二个系数则常称作阵列因数（array factor），它是各单元位置以及馈电系数的函数，而跟所用辐射器的特定类型无关。阵列因数表示当所有单元为各向同性辐射体时，所有 N 个单元的远端场辐射强度。将阵列因数记为

374

$$F_a(\theta) = \left|\sum_{i=0}^{N-1} A_i e^{jikd\cos\theta}\right| \tag{9.107}$$

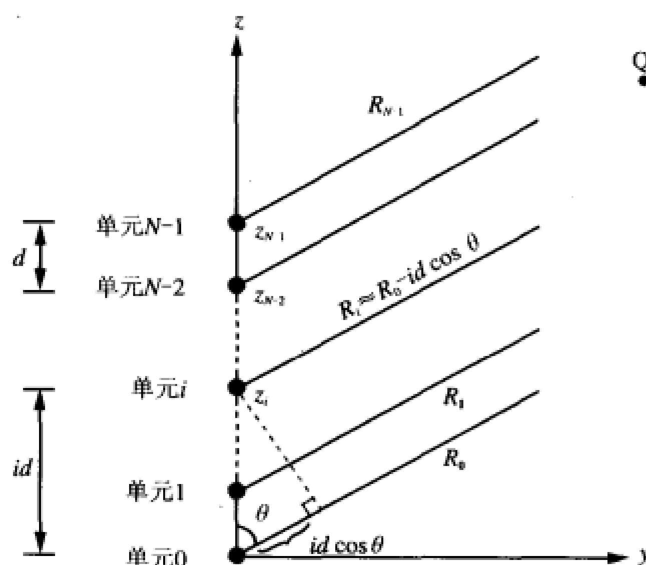


图 9-27 从各单元射向远方同一观测点的光线基本平行。因此，距离 $R_i \approx R_0 - id\cos\theta$

则天线阵的功率密度可以写成

$$S(R_0,\theta,\phi) = S_e(R_0,\theta,\phi)F_a(\theta) \tag{9.108}$$

这个方程称为*波瓣图乘法原理*（pattern multiplication principle）。根据这个原理，可以先将天线的各单元替换成各向同性的辐射器以计算远端场的功率波瓣图，并求得相应的阵列因数 $F_a(\theta)$，然后将所得结果乘以单个单元的功率密度 $S_e(R_0,\theta,\phi)$（所有单元的功率密度都应该相同），即可得到天线阵的远端场功率密度。

馈电系数 A_i 通常是一个复数，由一个幅值因数 a_i 和一个相位因数 ψ_i 构成：

$$A_i = a_i e^{j\psi_i} \tag{9.109}$$

将式（9.109）代入式（9.107）可得：

$$F_a(\theta) = \left|\sum_{i=0}^{N-1} a_i e^{j\psi_i} e^{jikd\cos\theta}\right|^2 \tag{9.110}$$

阵列因数由两个输入函数决定：一个是*阵列幅值分布*（array amplitude distribution），由所有的 a_i 构成；另一个是*阵列相位分布*（array phase distribution），由所有的 ψ_i 构成。幅值分布提供对天线辐射波瓣图形状的控制，而相位分布则用于波瓣图的转向。

例 9-6 两个垂直振子组成的天线阵

一个 AM 无线电广播站，采用两个垂直取向的半波振子，彼此间隔 $\lambda/2$，如图 9-28a所示。由第一个振子位置到第二个振子位置的矢量指向东方。两个振子由等幅激励馈电，东边振子的激励相对另一个振子的激励有 $-\pi/2$ 的移相。求天线阵在水平面上的天线波瓣图，并绘制出来。

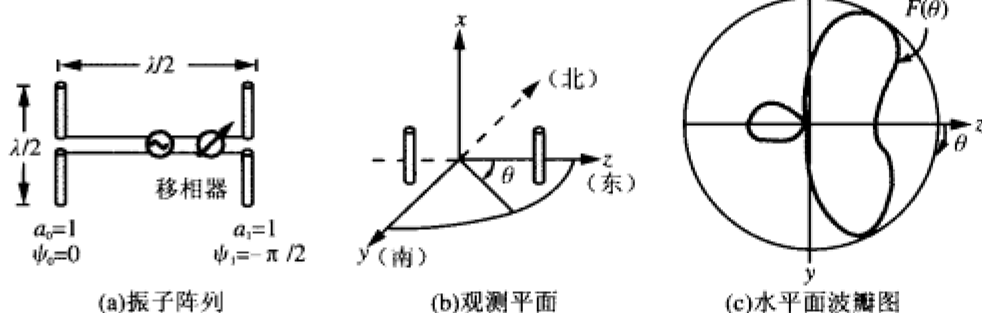


图 9-28 例 9-6 的两个半波振子构成的阵列

解答：式（9.110）给出的阵列因数是根据沿着 z 轴放置的辐射器推导出来的，为了保持坐标系相同，选择向东的方向为 z 轴，如图 9-28b 所示，并将第一个振子放在 $z=-\lambda/4$ 的位置，第二个振子放在 $z=\lambda/4$ 的位置。半波振子在垂直其轴线的平面上，此处即水平面上，具有均匀的辐射，因此，对于图 9-28b 中的任何 θ 角，都有 $S_e=S_0$，此处 S_0 是单个振子辐射功率密度的最大值。所以，由两个振子阵列辐射的功率密度为

$$S(R,\theta)=S_0F_a(\theta)$$

对于两个间隔为 $d=\lambda/2$、激励幅值相同（$a_0=a_1=1$）、相位分别为 $\psi_0=0$ 和 $\psi_1=-\pi/2$ 的单元，式（9.110）变成

$$F_a(\theta)=\left|\sum_{i=0}^{1}a_i e^{j\psi_i}e^{jikd\cos\theta}\right|^2=\left|1+e^{-j\pi/2}e^{j(2\pi/\lambda)(\lambda/2)\cos\theta}\right|^2=\left|1+e^{j(\pi\cos\theta-\pi/2)}\right|^2$$

$|1+e^{jx}|^2$形式的函数，可以先从每项中分离出一个因子 $e^{jx/2}$来，再进行计算：

$$\begin{aligned}|1+e^{jx}|^2&=|e^{jx/2}(e^{-jx/2}+e^{jx/2})|^2=|e^{jx/2}|^2|e^{-jx/2}+e^{jx/2}|^2\\&=|e^{jx/2}|^2\left|2\frac{[e^{-jx/2}+e^{jx/2}]}{2}\right|^2\end{aligned}$$

$e^{jx/2}$的绝对值等于1，并且可以看出方括号中的函数是 $\cos(x/2)$。因此，

$$|1+e^{jx}|^2=4\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

将这个结果应用到 $F_a(\theta)$的表达式中，可以得到

$$F_a(\theta)=4\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

因此，阵列辐射的功率密度为

$$S(R,\theta)=S_0F_a(\theta)=4S_0\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

这个函数具有最大值 $S_{max}=4S_0$，对应的余弦函数参数为零，即

$$\frac{\pi}{2}\cos\theta-\frac{\pi}{4}=0,$$

由此得到结果：$\theta=60°$。采用最大值进行归一化处理 $S(R,\theta)$，得到归一化辐射强

度为

$$F(\theta)=\frac{S(R,\theta)}{S_{\max}}=\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

$F(\theta)$ 的波瓣图如图 9-28c 所示。■

 D9.3

例 9-7 波瓣图合成

在例 9-6 中，给定了阵列参数 a_0、a_1、ψ_0、ψ_1 和 d，需要求解的是两单元振子天线阵的波瓣图。现在考虑相反的过程：给定所希望的波瓣图技术要求，要求确定天线阵参数以达到相应的技术要求。

给定两个垂直振子，如图 9-28b 所示，试确定天线阵参数，以使天线阵沿东方具有最大辐射，向北和向南没有辐射。

解答：由例 9-6 可知，因为每个振子在 y-z 平面上各方向辐射均匀，因此两振子天线阵在该平面上的辐射波瓣图由阵列因数 $F_a(\theta)$ 唯一确定。阵列因数波瓣图的形状取决于三个参数：幅值比 a_1/a_0，相位差 $\psi_1-\psi_0$，以及空间间隔 d(图 9-29a)。为方便起见，选择 $a_0=1$，$\psi_0=0$。因此，式（9.107）变成 376

$$F_a(\theta)=\left|\sum_{i=0}^{1}a_i\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}ikd\cos\theta}\right|^2=\left|1+a_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi d/\lambda)\cos\theta}\right|^2$$

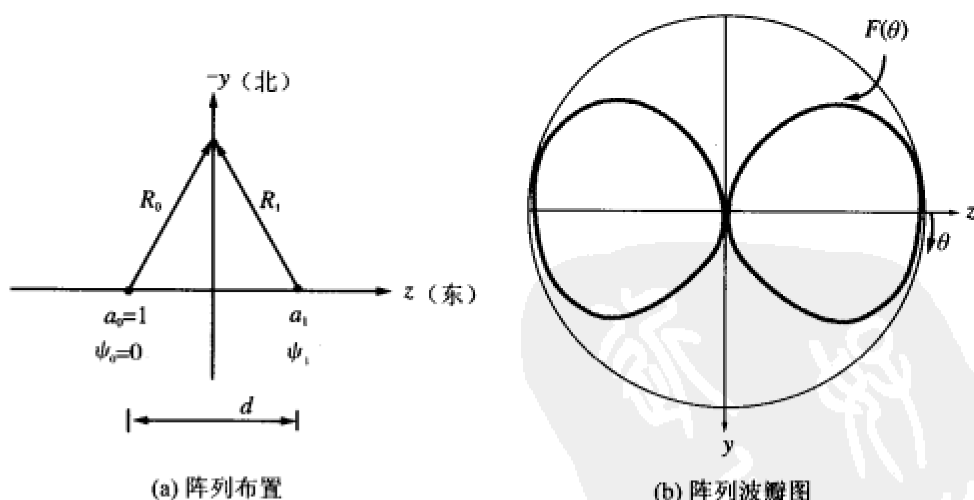


图 9-29 （a）两个垂直振子空间间隔为 d，沿着 z 轴放置；（b）对于 $a_0=a_1=1$，$\psi_1=\psi_0=-\pi$，$d=\lambda/2$ 的情况，y-z 平面上的归一化阵列波瓣图

现在考虑图 9-29a 南北方向的技术要求，即在 $\theta=90°$ 的方向上，要求 F_a 等于 0。对于 y 轴上的任何观测点，图 9-29a 中的范围半径 R_0 和 R_1 相等，这意味着，两个振子的辐射波到达观测点的时程所对应的传播相位是相同的。因此，为了满足上述要求，需选择 $a_1=a_0$，$\psi_1=\pm\pi$。这样选择以后，两个振子辐射的信号将具有相同的幅值和相反的相位，因而发生相消干涉。利用参数 $a_0=a_1=1$ 和 $\psi_1=\pm\pi$，来计算在 $\theta=90°$ 处的相位因数，可以证明以上结论：

$$F_a(\theta=90°) = |1+1e^{\pm j\pi}|^2 = |1-1| = 0$$

当考虑朝东的技术要求时（即在 $\theta=0°$ 的方向上，要求天线辐射波瓣图为最大值），由上面的两个 ψ_1 值（π 和 $-\pi$）可以求得相同的间隔 d 答案。下面选取 $\psi_1=-\pi$，检验 $\theta=0°$ 处的阵列因数：

$$F_a(\theta=0) = |1+e^{-j\pi}e^{j2\pi d/\lambda}|^2 = |1+e^{j(-\pi+2\pi d/\lambda)}|^2$$

要使 $F_a(\theta=0)$ 为最大值，就要求第二项的相位角等于0或 2π：

$$-\pi+\frac{2\pi d}{\lambda}=2n\pi,$$

或

$$d=(2n+1)\frac{\lambda}{2}, \quad n=0,1,2,\cdots$$

总之，如果 $a_0=a_1, \psi_1-\psi_0=-\pi, d=(2n+1)\lambda/2$，两振子天线阵就能够满足给定的技术要求。

377

对于 $d=\lambda/2$，在任意角度 θ 上的阵列因数为

$$F_a(\theta) = |1+e^{-j\pi}e^{j\pi\cos\theta}|^2 = |1-e^{j\pi\cos\theta}|^2$$

$$= \left|2je^{-j(\pi/2)\cos\theta}\left[\frac{e^{j(\pi/2)\cos\theta}-e^{-j(\pi/2)\cos\theta}}{2j}\right]\right|^2 = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)$$

该阵列因数的最大值为4，这是单位幅值的双单元阵列可以达到的最大电平。$F_a(\theta)$ 达到最大值时的方向，对应于 $\theta=0°$ 的方向（东）和 $\theta=180°$ 的方向（西），如图9-29b所示。■

练习9.14 一个双单元天线阵，单元的激励同相位，且 $a_0=1$、$a_1=3$。推导阵列因数表达式。已知单元沿 z 轴放置，间隔为 $\lambda/2$。

答案：$F_a(\theta)=[10+6\cos(\pi\cos\theta)]$。（参见❀）

练习9.15 一个等间隔 N 单元的天线阵，沿着 z 轴放置，具有等幅值、同相位的激励，即 $A_i=1(i=0,1,\cdots,N-1)$。问在边射方向上，阵列因数的幅值是多少？

答案：$F_a(\theta=90°)=N^2$。（参见❀）

9.11 等相位分布的 N 单元天线阵

现在考虑一个 N 单元的天线阵，单元均匀分布、间隔为 d，采用等相位激励，即 $\psi_i=\psi_0(i=1,2,\cdots,N-1)$。这种采用同相单元的阵列，有时称作边射天线阵（broadside array），因为其阵列因数的辐射波瓣图的主瓣，总是沿着阵列轴线侧面的方向。根据式（9.110），阵列因数为：

$$F_a(\theta) = \left|e^{j\psi_0}\sum_{i=0}^{N-1}a_ie^{jikd\cos\theta}\right|^2 = |e^{j\psi_0}|^2\left|\sum_{i=0}^{N-1}a_ie^{jikd\cos\theta}\right|^2 = \left|\sum_{i=0}^{N-1}a_ie^{jikd\cos\theta}\right|^2 \quad (9.111)$$

相邻单元辐射场的相位差为：

$$\gamma = kd\cos\theta = \frac{2\pi d}{\lambda}\cos\theta \quad (9.112)$$

以 γ 表示时，式（9.111）具有以下化简的形式：

$$F_a(\gamma) = \left| \sum_{i=0}^{N-1} a_i e^{ji\gamma} \right|^2 \quad \text{（同相）} \tag{9.113}$$

对于 $a_i = 1$（$i = 0, 1, \cdots, N-1$）的均匀幅值分布，式（9.113）变成：

$$F_a(\gamma) = |1 + e^{j\gamma} + e^{j2\gamma} + \cdots + e^{j(N-1)\gamma}|^2 \tag{9.114}$$

采用以下步骤，这个等比级数可以写成更为紧凑的形式。首先，定义

$$F_a(\gamma) = |f_a(\gamma)|^2, \tag{9.115}$$

其中

$$f_a(\gamma) = [1 + e^{j\gamma} + e^{j2\gamma} + \cdots + e^{j(N-1)\gamma}] \tag{9.116}$$

接下来，将 $f_a(\gamma)$ 乘以 $e^{j\gamma}$ 得到：

$$f_a(\gamma)e^{j\gamma} = (e^{j\gamma} + e^{j2\gamma} + \cdots + e^{jN\gamma}) \tag{9.117}$$

378

从式（9.116）中减去式（9.117）可得

$$f_a(\gamma)(1 - e^{j\gamma}) = 1 - e^{jN\gamma}, \tag{9.118}$$

因而有

$$f_a(\gamma) = \frac{1 - e^{jN\gamma}}{1 - e^{j\gamma}} = \frac{e^{jN\gamma/2}}{e^{j\gamma/2}} \frac{(e^{-jN\gamma/2} - e^{jN\gamma/2})}{(e^{-j\gamma/2} - e^{j\gamma/2})} = e^{j(N-1)\gamma/2} \frac{\sin(N\gamma/2)}{\sin(\gamma/2)} \tag{9.119}$$

将 $f_a(\gamma)$ 乘以其共轭复数，可得到以下结果：

$$F_a(\gamma) = \frac{\sin^2(N\gamma/2)}{\sin^2(\gamma/2)} \quad \text{（等幅同相）} \tag{9.120}$$

可以证明，$F_a(\gamma)$ 的最大值发生在 $\gamma = 0$ 处（即 $\theta = \pi/2$ 处），大小等于 N^2，利用 $\gamma = 0$ 去计算式（9.114）的值，很容易验证这一点。因此，归一化的阵列因数为

$$F_{an}(\gamma) = \frac{F_a(\gamma)}{F_{a,\max}} = \frac{\sin^2(N\gamma/2)}{N^2 \sin^2(\gamma/2)} = \frac{\sin^2\left[\frac{N\pi d}{\lambda}\cos\theta\right]}{N^2 \sin^2\left[\frac{\pi d}{\lambda}\cos\theta\right]} \tag{9.121}$$

针对 $N = 6$、$d = \lambda/2$ 的情况，图 9-30 绘出了 $F_{an}(\theta)$ 的极坐标图。需要提醒读者的是，这里绘出的仅仅是阵列因数的辐射波瓣图，而天线阵的波瓣图，则等于该波瓣图和单个单元的波瓣图的乘积，正如前面波瓣图乘法原理所讨论的那样。

379

例 9-8 多波束天线阵

对于一个激励相等、单元间隔 $d = 7\lambda/2$ 的两单元天线阵，求其阵列因数表达式，并绘出阵列波瓣图。

解答：激励相同（$a_0 = a_1 = 1$）的两单元（$N = 2$）天线阵，其阵列因数为

$$F_a(\gamma) = \left| \sum_{i=0}^{1} a_i e^{ji\gamma} \right|^2 = |1 + e^{j\gamma}|^2,$$

$$= |e^{j\gamma/2}(e^{-j\gamma/2} + e^{j\gamma/2})|^2 = |e^{j\gamma/2}|^2 |e^{-j\gamma/2} + e^{j\gamma/2}|^2 = 4\cos^2(\gamma/2),$$

其中 $\gamma = (2\pi d/\lambda)\cos\theta$。归一化阵列波瓣图如图 9-31 所示，它包括 7 个瓣，都具有相同的峰值，但角宽度不同。在 $\theta = 0$ 到 $\theta = \pi$ 的角度范围中，波束（波瓣）的数目等于单元间隔 d 中所包含的 $\lambda/2$ 的个数，即等于 $d/(\lambda/2)$。 ■



M9.4-9.5

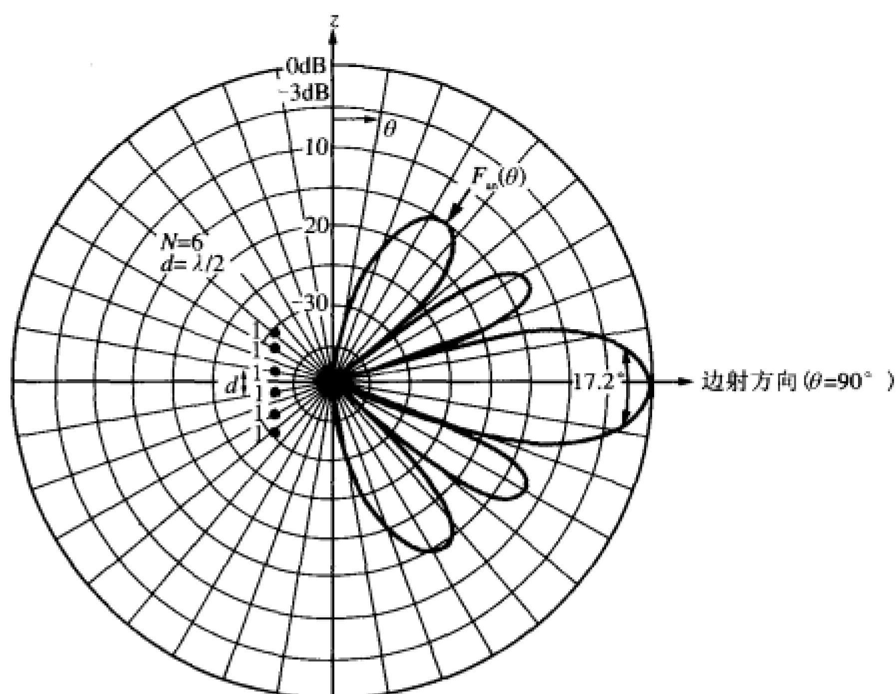


图 9-30 单元间距为 $d=\lambda/2$、均匀激励的 6 单元天线阵的归一化阵列波瓣图

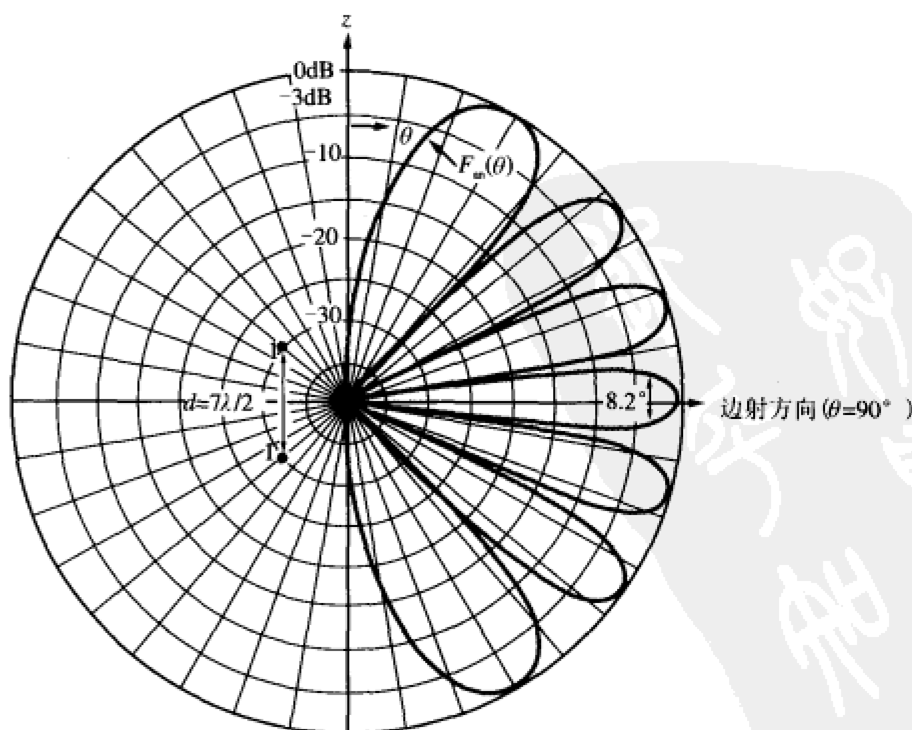


图 9-31 间隔 $d=7\lambda/2$ 的两单元天线阵的归一化阵列波瓣图

9.12 天线阵的电子扫描

前一节讨论的是等相天线阵，其各个馈电系数的相位($\psi_0, \cdots, \psi_{N-1}$)都相等。本节将讨论采用相邻单元延相的手段，实现天线阵波束方向的电子转向（electronically steering），使其可以从 $\theta = 90°$的边射方向转到任何希望的角度 θ_0。电子转向不仅取消了改变波束方向所需要的机械转向天线，而且极大提高了波束扫描的速度。 380

 D9.4

如图 9-32 所示，在阵列的单元之间，采用线性递增的延相，可以实现电子转向。相对第 0 号单元的相位，第 i 号单元的相位为：

$$\psi_i = -i\delta, \tag{9.122}$$

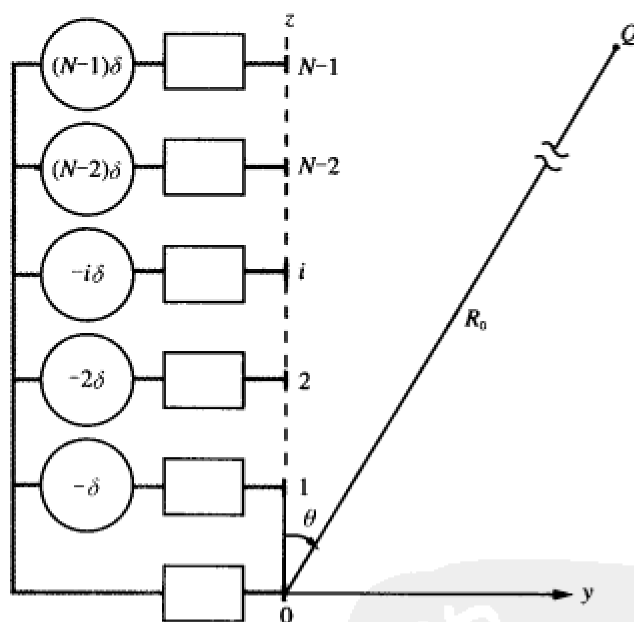


图 9-32 线性相位的应用

其中 δ 是相邻单元之间的相位延迟增量（incremental phase delay）。在式（9.110）中应用式（9.122），可得：

$$F_a(\theta) = \left|\sum_{i=0}^{N-1} a_i e^{-ji\delta} e^{jikd\cos\theta}\right|^2 = \left|\sum_{i=0}^{N-1} a_i e^{ji(kd\cos\theta-\delta)}\right|^2 = \left|\sum_{i=0}^{N-1} a_i e^{ji\gamma'}\right|^2 \triangleq F_a(\gamma'), \tag{9.123}$$

其中

$$\gamma' = kd\cos\theta - \delta \tag{9.124}$$

出于下面马上就将看到的原因，用扫描角（scan angle）θ_0来定义移相角 δ：

$$\delta = kd\cos\theta_0 \tag{9.125}$$

这样一来，γ'变为

$$\gamma' = kd(\cos\theta - \cos\theta_0) \tag{9.126}$$

式（9.123）给出的阵列因数，除参数是 γ'而不是 γ 外，跟早前推导的同相天线

阵的阵列因数式（9.113）具有完全相同的函数形式。因此，不论天线阵的任何幅值分布如何，采用线性相位分布激励的天线阵的阵列因数，都可以通过假定天线阵为等相位分布激励，然后将所得的阵列因数表达式中的 γ，简单地替换为 γ' 而得到。对于幅值分布关于天线阵中心对称的情况，阵列因数 $F_a(\gamma')$ 达到最大值的条件是变量 $\gamma'=0$。在同相位时（$\delta=0$），以上条件对应于 $\theta=90°$ 的方向，这就是将同相位的情况称作边射天线阵的原因。根据式（9.126），对于线性相位阵这种更一般的情况，$\gamma'=0$ 对应 $\theta=\theta_0$。所以，当在天线阵上应用线性相位时，阵列波瓣图沿着 $\cos\theta$ 轴移动了 $\cos\theta_0$ 的数量，最大辐射的方向则从边射方向（$\theta=90°$）调整（steer）到 $\theta=\theta_0$ 的方向。一路调下来，如果想将波束调整到端射（end-fire）方向（$\theta=0$）的话，则移相增量 δ 必须等于 kd 弧度。381

9.12.1 等幅值激励

为了说明天线阵的电子扫描过程，考虑等幅分布激励的 N 单元天线阵的情况。式（9.121）是其归一化阵列因数。用 γ' 替换 γ 之后有

$$F_{an}(\gamma')=\frac{\sin^2(N\gamma'/2)}{N^2\sin^2(\gamma'/2)} \tag{9.127}$$

其中 γ' 由式（9.126）定义。这样得到的式（9.127），就是具有相等幅值（$a_i=1;i=0,1,\cdots,N-1$）和增量相位（$\psi_i=-i\delta$）激励的天线阵列因数。

图9-33绘出了 $N=10$，$d=\lambda/2$ 时，$\theta_0=0°$、45°和90°等三种情况下 $F_{an}(\theta)$ 的主瓣。可以看到，随着阵列的波束方向由边射方向往端射方向调整，半功率波束宽度不断增加。

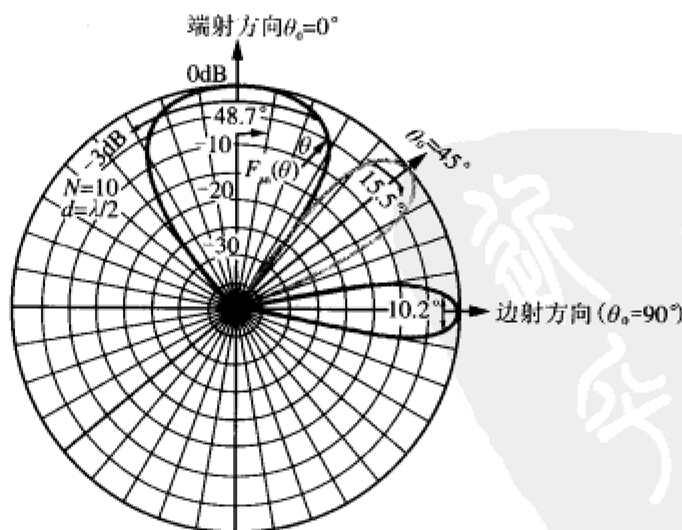


图9-33 相邻单元间隔为 $\lambda/2$ 的10单元天线阵的归一化阵列波瓣图。所有单元具有等幅激励。通过在阵列上施加线性相位，主瓣可以从边射方向（$\theta_0=90°$）调整到任何的扫描方向 θ_0。其中等相位激励对应于 $\theta_0=90°$

9.12.2 阵列馈电

根据前面的分析，为了将天线波束调整到 θ_0 角的位置，必须满足两个条件：(1) 天线阵上的相位分布必须是线性的；(2) 相位延迟增量 δ 的幅值必须满足式 (9.125)。这两个条件的组合，为相位波前从 $\theta=90°$（边射方向）转向到 $\theta=\theta_0$ 提供了所需的转换。利用电子控制的移相器，对每个辐射单元的激励进行单独的控制，就可以完成这一任务。此外，有一种称为**频率扫描**（frequency scanning）的技术，可以用于对所有单元的相位同时进行控制。图 9-34 给出了频率扫描天线阵的馈电配置的一个简单实例。共同的馈电点通过不同长度的传输线连接到各辐射单元。同第 0 号辐射单元相比，第 1 号辐射单元到共同馈电点的路径多出了 l 的距离，第 2 号则多出 $2l$，第 3 号多出 $3l$。因此，对于第 i 号单元，路径的长度为

382

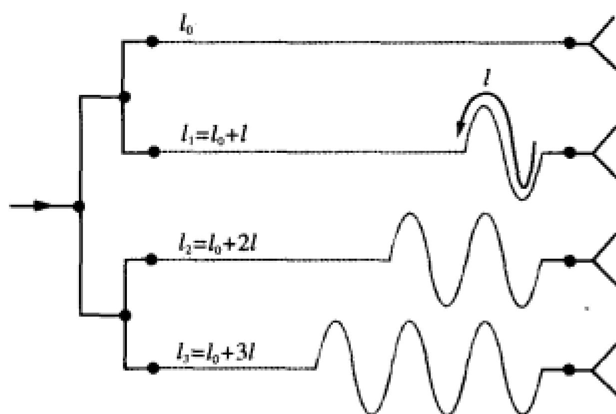


图 9-34 频率扫描天线阵的馈电配置实例

$$l_i = il + l_0 \tag{9.128}$$

其中 l_0 是第 0 号单元的路径长度。频率为 f 的电磁波，在长度为 l_i 的传输线上传播时，其相位因数为 $e^{-j\beta l_i}$，其中 $\beta=2\pi f/u_p$ 是线路的相位常数，u_p 是其传播速度。因此，以第 0 号单元为参照，第 i 个单元的相位延迟增量为

$$\psi_i(f) = -\beta(l_i - l_0) = -\frac{2\pi}{u_p}f(l_i - l_0) = -\frac{2\pi i}{u_p}fl \tag{9.129}$$

假定在给定频率 f_0 时，选择长度增量 l 为

$$l = \frac{n_0 u_p}{f_0} \tag{9.130}$$

其中 n_0 是特定的正整数。在这种情况下，相位延迟 $\psi_1(f_0)$ 为

$$\psi_1(f_0) = -2\pi\left(\frac{f_0 l}{u_p}\right) = -2n_0\pi \tag{9.131}$$

类似有，$\psi_2(f_0)=-4n_0\pi$，$\psi_3(f_0)=-6n_0\pi$。这就是说，在 f_0 时，所有单元将具有相等的相位（都是 2π 的整数倍），天线阵的辐射方向位于边射方向。如果 f 变成 $f_0+\Delta f$，则第 1 号单元相对第 0 号单元的新相移为

$$\psi_1(f_0+\Delta f) = -\frac{2\pi}{u_p}(f_0+\Delta f)l = -\frac{2\pi f_0 l}{u_p} - \left(\frac{2\pi l}{u_p}\right)\Delta f$$
$$= -2n_0\pi - 2n_0\pi\left(\frac{\Delta f}{f_0}\right) = -2n_0\pi - \delta, \tag{9.132}$$

这里应用了式（9.130），δ 则定义为：

383

$$\delta = 2n_0\pi\left(\frac{\Delta f}{f_0}\right) \tag{9.133}$$

类似有，$\psi_2(f_0+\Delta f)=2\psi_1$，$\psi_3(f_0+\Delta f)=3\psi_1$。忽略 2π 及其整数倍（因为它们对辐射场的相对相位没用影响），可以看到，相移增量直接正比于频率偏移部分（$\Delta f/f_0$）。所以，对于一个有 N 个单元的天线阵，控制 Δf 可以直接控制 δ，进而实现对扫描角 θ_0 的控制［依据式（9.125）］。令式（9.125）等于式（9.133），并求解 $\cos\theta_0$ 得：

$$\cos\theta_0 = \frac{2n_0\pi}{kd}\left(\frac{\Delta f}{f_0}\right) \tag{9.134}$$

当频率 f 从 f_0 变化到 $f_0+\Delta f$ 时，$k=2\pi/\lambda=2\pi f/c$ 也随着频率而变化。但如果 $\Delta f/f_0$ 很小的话，就可以将 k 看成等于 $2\pi f_0/c$ 的常数。在式（9.134 中），因采用这种近似而引起 $\cos\theta_0$ 的误差，跟 $\Delta f/f_0$ 在同一个数量级。

例 9-9 电子转向

设计一个可转向的 6 单元天线阵，使其满足以下技术要求：

（1）所有单元具有等幅激励；

（2）在 $f_0=10\text{GHz}$ 时，阵列的辐射位于边射方向，单元间隔为 $d=\lambda_0/2$，其中 $\lambda_0=c/f_0=3\text{cm}$；

（3）在上升平面上从 $\theta_0=30°$ 到 $\theta_0=150°$ 的角度范围内，阵列的波瓣图应该是可以电子转向的；

（4）天线阵由电压控制的振荡器馈电，振荡频率的变化范围是 9.5GHz ~ 10.5GHz；

（5）阵列采用图 9-34 所示的馈电配置，传输线的相速度为 $u_p=0.8c$。

解答：天线阵应可以在 $\theta_0=30°$ 到 $\theta_0=150°$ 的范围内调节（图 9-35）。在 $\theta_0=30°$ 时，$kd=(2\pi/\lambda_0)(\lambda_0/2)=\pi$，根据式（9.134）有

$$\frac{1}{2} = 2n_0\left(\frac{\Delta f}{f_0}\right) \tag{9.135}$$

由于 $f_0=10\text{GHz}$，振荡器频率的变化范围为（$f_0-0.5\text{GHz}$）~（$f_0+0.5\text{GHz}$），因此，$\Delta f_{max}=0.5\text{GHz}$。为了满足式（9.135），应该选择 n_0，以使 Δf 尽可能接近（但不大于）Δf_{max}。令 $\Delta f=\Delta f_{max}$，从式（9.135）中可求得 n_0 为

$$n_0 = \frac{f_0}{4\Delta f_{max}} = \frac{10\text{GHz}}{4\times 0.5\text{GHz}} = 5$$

由于 n_0 已经是整数，所以无需修改其数值；但如果上面计算得到的 n_0 不是整数的话，

则应该将其向上调整至最接近的整数。

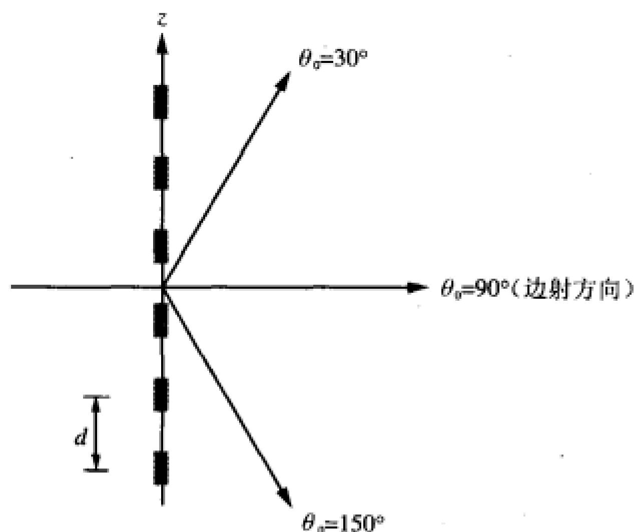


图 9-35 可电子转向的 6 单元阵列（例 9-9）

应用式（9.130），可求得长度增量 l 的大小为：

$$l=\frac{n_0u_p}{f_0}=\frac{5\times0.8\times3\times10^8}{10^{10}}=0.12\text{m}=12(\text{cm})$$

384

最后，由 $N=6$，$kd=\pi$，根据式（9.127）可以得到归一化阵列波瓣图的如下表示式：

$$F_{an}(\gamma')=\frac{\sin^2(3\gamma')}{36\sin^2(\gamma'/2)}$$

其中，根据式（9.126）有

$$\gamma'=kd(\cos\theta-\cos\theta_0)=\pi(\cos\theta-\cos\theta_0)$$

根据式（9.134）有

$$\cos\theta_0=\frac{2n_0\pi}{kd}\left(\frac{\Delta f}{f_0}\right)=10\left(\frac{f-10\text{GHz}}{10\text{GHz}}\right) \tag{9.136}$$

天线阵波瓣图的形状跟图 9-30 类似，主瓣方向沿着 $\theta=\theta_0$。当 $f=f_0=10\text{GHz}$ 时，$\theta_0=90°$（边射方向）；当 $f=10.5\text{GHz}$ 时，$\theta_0=30°$；当 $f=9.5\text{GHz}$ 时，$\theta_0=150°$。对于任何在 30°~150°之间的其他 θ_0值，所需的振荡频率 f 由式（9.136）计算。■

复习题

Q9.13 天线阵为什么十分有用？请举几个典型应用的例子。

Q9.14 解释波瓣图乘法原理是如何用来计算天线阵的辐射波瓣图的。

Q9.15 对于直线阵，阵列的幅值和相位各起什么作用？

Q9.16 解释电子波束转向是如何实现的。

Q9.17 频率扫描为什么是调整天线阵波束方向的一种十分有吸引力的技术？

本章要点

- 天线是一种变换器，它或者将传输线上传播的导行波，变换成在无界媒介中传播的电磁波，或者进行相反的变换。
- 除某些含有非线性半导体或铁磁性材料的固态天线外，天线都是互易设备：它们无论用作发射还是接收，都具有相同的辐射波瓣图。
- 在天线的远端场区，辐射能量近似一个平面波。
- 电流源天线，譬如一段电线，其辐射的电场等于组成该天线的所有赫兹振子辐射的电场之和。
- 半波振子的辐射电阻 R_{rad} 是 73Ω，很容易与传输线匹配。
- 天线的方向特性用其辐射波瓣图、方向性、波瓣图立体角，及半功率波束宽度等来描述。
- 弗里斯传输公式建立了一个天线的接收功率与远处相隔一定距离的另外一个天线发射功率之间的关系。
- 大孔径（尺度不小于数个波长）辐射的远端场与孔径上的场分布间的联系，遵从基尔霍夫标量衍射理论。均匀孔径分布产生的远端场波瓣图，具有可能的最窄波束宽度。
- 通过独立地控制天线阵各单元的幅值和相位，可以对天线的波瓣图进行整形，并实现波束方向的电子转向。
- 由相同单元构成的天线阵，其波瓣图等于阵列因数与单个天线单元的天线波瓣图之乘积。

385

重要术语汇总

请说明下列术语的意义，或给出定义：

天线	各向同性天线	辐射波瓣图	天线阻抗
远端场区	短偶极子（赫兹振子）	球面传播因数	功率密度 $S(\theta,\phi)$
边射方向	立体角	（归一化）辐射强度 F	
上升平面和幅角平面		辐射波瓣	波瓣图立体角 Ω_p
波束宽度 β	天线方向性 D	天线增益 G	辐射效率 ξ
辐射电阻 R_{rad}	损耗电阻 R_{loss}	有效面积（有效孔径）A_e	
弗里斯传输公式	系统噪声温度 T_{sys}	信噪比 S_n	孔径分布
天线阵	电子转向	馈电系数	波瓣图乘法原理
阵列因数 $F_a(\theta,\phi)$		端射方向	频率扫描

习题

9.2 ~ 9.3　短偶极子与天线辐射特性

9.1* 一个中心馈电的赫兹振子，由 $I_0=10\text{A}$ 的电流进行激励。如果振子长度为 $\lambda/50$，试确定 1km 远处的最大辐射功率密度。

9.2 1m 长的振子，由频率为 1MHz、幅值为 12A 的电流进行激励。在偏离振子轴线为 30°的方向上，距离为 5km 的远处，振子辐射的平均功率密度为多少？

9.3* 一个天线，其归一化的辐射强度为

$$F(\theta,\phi)=\begin{cases}1, & (\text{当 } 0\leqslant\theta\leqslant 60°, 0\leqslant\phi\leqslant 2\pi \text{ 时})\\ 0, & (\text{其他})\end{cases}$$

试确定：

(a) 最大辐射的方向；

(b) 方向性；

(c) 波束立体角；

(d) x-z 平面中的半功率波束宽度。

建议：在计算相应量之前，先绘制波瓣图。

9.4 对于以下情况的天线，重做习题 9.3

$$F(\theta,\phi)=\begin{cases}\sin^2\theta\cos^2\phi & (\text{当 } 0\leqslant\theta\leqslant\pi, -\pi/2\leqslant\phi\leqslant\pi/2 \text{ 时})\\ 0 & (\text{其他})\end{cases}$$

9.5* 一个 2m 长、中心馈电的振子天线，运行在 AM 波段中的 1MHz 频率下。振子由半径为 1mm 的铜线制成。

(a) 确定天线的辐射效率。

(b) 以 dB 计算时，天线的增益是多少？

(c) 为了使天线辐射 20W，所需要的天线电流是多大？信号发生器必须提供多少功率给天线？

386

9.6 对于长度为 20cm、频率为 5MHz 的天线，重做习题 9.5。

9.7* 一个波瓣图立体角为 1.5sr 的天线，辐射功率为 30W。在范围半径为 1km 时，天线辐射的最大功率密度是多少？

9.8 一个辐射效率为 90% 的天线，其方向性为 6.7dB。其增益是多少 dB？

9.9* 一个圆形抛物面反射天线，其辐射波瓣图包括一个圆形的主瓣，半功率波束宽度为 2°，以及若干个小旁瓣。忽略这些小旁瓣，试以 dB 单位，估算天线的方向性。

9.10 某天线的归一化辐射强度为

$$F(\theta)=\exp(-20\theta^2)\qquad(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

其中 θ 的单位为弧度。试确定：

(a) 半功率波束宽度；

(b) 波瓣图立体角；

(c) 天线的方向性。

---

* 答案见附录 D。

解答见 CD-ROM。

9.4~9.5 偶极子天线

9.11* 针对一个长度为1m、运行于FM/TV波段中150MHz频率下的半波振子，重做习题9.5。

9.12 假定某半波振子天线的损耗阻抗小到可以忽略，忽略其天线阻抗中的电阻分量，当60Ω的传输线连接到该振子天线时，计算其该传输线上的驻波比。

9.13* 对于长度 $l \ll \lambda$ 的短偶极子，相比9.2节中将 $\tilde{I}(z)$ 当成沿着偶极子方向恒定不变的电流来处理的方法，一个更加接近实际的近似是采用下述的三角形函数来描述 $\tilde{I}(z)$：

$$\tilde{I}(z)=\begin{cases} I_0(1-2z/l) & (\text{当 } 0\leqslant z\leqslant l/2 \text{ 时}) \\ I_0(1+2z/l) & (\text{当 } -l/2\leqslant z\leqslant 0 \text{ 时}) \end{cases}$$

它可以保证电流在端部为零，如图9-36所示。利用这一电流分布，确定：

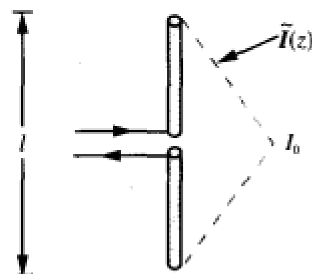


图9-36 短偶极子上的三角形电流分布（习题9.13）

(a) 远端场 $\tilde{\mathbf{E}}(R,\theta,\phi)$；
(b) 功率密度 $S(R,\theta,\phi)$；
(c) 方向性 D；
(d) 辐射电阻 R_{rad}。

9.14 对于一个长度为 $l=3\lambda/2$ 的偶极子天线：
(a) 确定最大辐射的方向；
(b) 求 S_{max} 的表达式；
(c) 绘制一幅归一化辐射波瓣图 $F(\theta)$；
(d) 将绘制的波瓣图与图9-17c所示的波瓣图进行对比。

9.15 对于长度为 $l=3\lambda/4$ 的偶极子，重做习题9.14的(a)~(c)。

387 9.16 对于 $l=\lambda$ 的偶极子，重做习题9.14的(a)~(c)。

9.17* 车载天线是一个位于导电表面上的垂直单极子。针对一个运行在1MHz频率、长度为1m的车载天线，重做习题9.5。已知该天线的导线直径为1cm，由铝制成，$\mu_c=\mu_0$，$\sigma_c=3.5\times10^7$ S/m。

9.6~9.7 有效面积与弗里斯传输公式

9.18 一个工作在100MHz频率下的半波振子，确定其有效面积，并与其物理横截面积相比较（假定导线直径为1cm）。

9.19* 一个3GHz的瞄准式微波通信链路，包括两个无损抛物面碟形天线，直径都是1m。如果接收天线需要1nW的接收功率才能接收良好，已知两天线间的距离为40km，问需要多大的发射功率？

9.20　一个半波振子电视广播天线，频率为 50MHz，发射功率为 1kW。问位于 30km 远处、增益为 13dB 的家用电视天线接收到的功率是多少？

9.21*　一个 150MHz 的通信链路，由相距 2km 的两个垂直半波振子天线构成。天线是无损的，信号占用的带宽为 3MHz，接收器的系统噪声温度为 600K，希望的信噪比为 20dB。问需要多大的发射器功率？

9.22　在图 9-37 所示的通信系统中，所有组件都匹配得当。如果 $P_t=10\text{W}$，$f=6\text{GHz}$：

(a) 接收天线处的功率密度是多少（假定天线排列得当）？

(b) 接收功率是多少？

(c) 如果 $T_{sys}=1000\text{K}$，接收器波段宽度为 10MHz，以 dB 为单位的信噪比是多少？

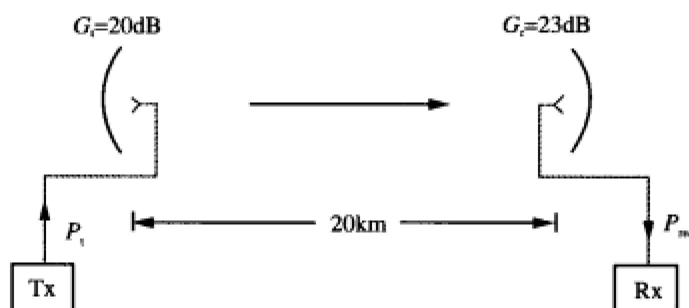


图 9-37　习题 9.22 的通信系统

9.8～9.9　孔径辐射

9.23*　一个均匀照射的孔径，长度为 $l_x=20\lambda$。确定 x-z 平面上的第一空档间的波束宽度。

9.24　10dB 波束宽度定义为，当 $F(\theta)$ 的值为峰值以下 10dB 时，对应的角度 θ 之间的波束大小。对于一个长度为 $l_x=10\lambda$、均匀照射的孔径，确定其在 x-z 平面上的 10dB 波束宽度。

9.25*　一个均匀照射的矩形孔径，位于 x-y 平面上，高度为 3m（沿 x 方向），宽度为 1m（沿 y 方向）。如果 $f=10\text{GHz}$，试确定：

(a) 在上升平面（x-z 平面）和幅角平面（y-z 平面）上的辐射波瓣图的波束宽度。

(b) 以分贝表示的天线方向性 D。

9.26　一个具有圆形孔径的天线，具有圆形的波束，在 20GHz 时的波束宽度为 1.5°。

(a) 以 dB 表示的天线方向性是多少？

(b) 如果天线的面积加倍，新的天线方向性和新的波束宽度是多少？

(c) 如果孔径保持为 (a) 的情况不变，但频率倍增为 40GHz，那么方向性和波束宽度将成为多少？

9.27*　一个 94GHz 的汽车防撞雷达，采用矩形孔径天线，安装在汽车的保险杆上。如果天线长度为 1m，高度为 10cm，试确定：

(a) 垂直和水平方向的波束宽度。

(b) 在 300m 远处，波束的水平展开宽度。

388

9.28　一个微波望远镜由一个特别灵敏的接收器连接到一个 100m 的抛物面碟形天线构成，用以测量宇宙目标发射的 10GHz 的辐射能量。如果天线波束指向月球，从地球上看，月球展开的平面角为 0.5°，问月球横截面的多大比例将被波束所覆盖？

9.10 ~ 9.12 天线阵

9.29* 某坐标系的 z 轴指向东方，x 轴指向天顶，其中有一个两单元天线阵，两个单元为各向同性天线，沿 z 轴排列，相隔距离为 d，一个位于 $z=0$ 处，另外一个位于 $z=d$ 处，天线的激励的幅值分别是 a_0 和 a_1。如果 $z=d$ 处的天线激励相对另外一个天线的激励具有 δ 角度的相位差，针对以下各种情况，求阵列因数，并绘出 x-z 平面上的波瓣图：

(a) $a_0=a_1=1$，$\delta=\pi/4$，$d=\lambda/2$；

(b) $a_0=1$，$a_1=2$，$\delta=0$，$d=\lambda$；

(c) $a_0=a_1=1$，$\delta=-\pi/2$，$d=\lambda/2$；

(d) $a_0=1$，$a_1=2$，$\delta=\pi/4$，$d=\lambda/2$；

(e) $a_0=1$，$a_1=2$，$\delta=\pi/2$，$d=\lambda/4$。

9.30 如果习题 9.29a 中的天线是彼此平行的，且轴线沿着 x 轴方向的垂直安装赫兹振子，试确定 x-z 平面上的归一化辐射强度，并绘出图形。

9.31* 考虑图 9-29a 所示的两单元振子阵列。如果两个振子的激励具有相同的馈电系数 ($a_0=a_1=1$，$\psi_0=\psi_1=0$)，请选择 (d/λ) 使阵列因数在 $\theta=45°$ 时为最大值。

9.32 选择 (d/λ) 使习题 9.31 的天线阵的阵列因数在 $\theta=45°$ 时为空白，而不是最大值。

9.33* 一个 5 单元的直线天线阵，具有等相位、均匀幅值分布的激励，单元间隔为 $3\lambda/4$。求归一化的阵列因数，并绘制其图形；确定半功率波束宽度。

9.34 图 9-38 所示的三单元直线天线阵，采用各向同性的辐射源，沿 z 轴放置，单元间隔为 $\lambda/4$。中央单元的激励幅值是底部和顶部单元的 2 倍；相对中间单元，底部单元的相位是 $-\pi/2$，顶部单元的相位是 $\pi/2$。确定阵列因数，并绘制其在上升平面上的图形。

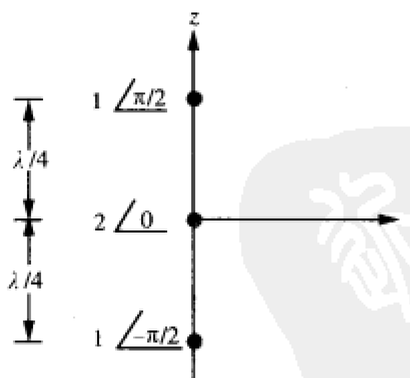


图 9-38 习题 9.34 的三单元天线阵

9.35* 一个 8 单元直线阵，单元间隔为 $\lambda/2$，采用等幅激励。为了将主波束转向到低于边射方向 60°的方向，相邻单元间的相位延迟增量应该为多少？给出阵列因数表达式，并绘制其图形。

9.36 一个直线天线阵，包含 12 个等间隔的单元 ($d=\lambda/2$)，沿 z 轴排列。选择适当的相位延迟增量 δ，以将主波束转向到高于边射方向 30°的方向。给出该转向天线的阵列因数表达式，并绘制其波瓣图。根据该波瓣图，估计波束宽度。

389

9.37 ~ 9.40 附加习题——题目及完整解答见光盘。

第 10 章　卫星通信系统及雷达传感器

应用实例

本章将从整体上介绍卫星通信系统及雷达传感器的工作原理，重点放在电磁相关的主题上。

10.1　卫星通信系统

一个巨大的通信网络联系着今天的世界。这一网络为固定与移动终端提供着大量的语音、数据以及视频服务（图 10-1）。该网络的使用寿命和有效性，在很大程度上取决于轨道卫星系统的使用状况。轨道卫星作为通信中继站，覆盖着地球表面的很大部分区域。例如，一颗位于赤道上空 35 786km 高处的对地静止轨道上的卫星，可以覆盖 1/3 的地球表面，可以将覆盖范围内的任何两点联系起来（图 10-2）。通信卫星工程的历史，可以回溯到 20 世纪 50 年代后期，当时的美国海军将月球作为无源反射器，为华盛顿特区与夏威夷之间的低速率数据通信提供中继。在人造地球卫星发展史上跨出的第一大步，则发生在 1957 年 10 月，当时的苏联发射了斯普特尼克 I 号（Sputnik I）卫星，它的任务是单向传送遥感信息，总共工作了 21 天。接下来的另一颗遥感卫星是探险家 I 号（Explorer I），由美国在 1958 年 1 月发射。同年 12 月，美国发射了“斯科尔”（Score）卫星，用于广播艾森豪威尔总统的圣诞祝词，这是人类第一次利用人造卫星进行双向语音通信。

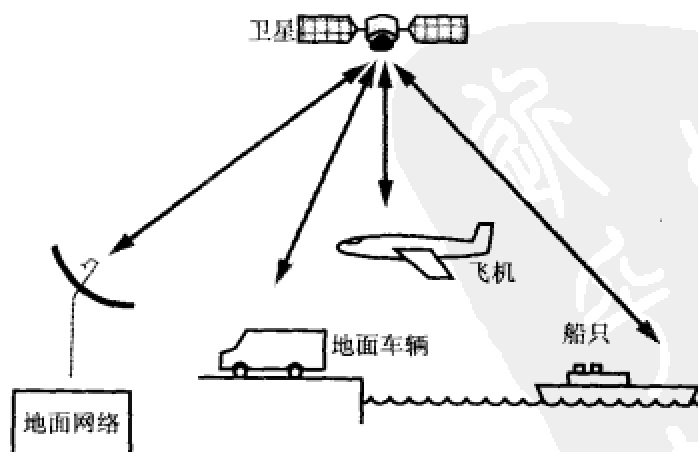
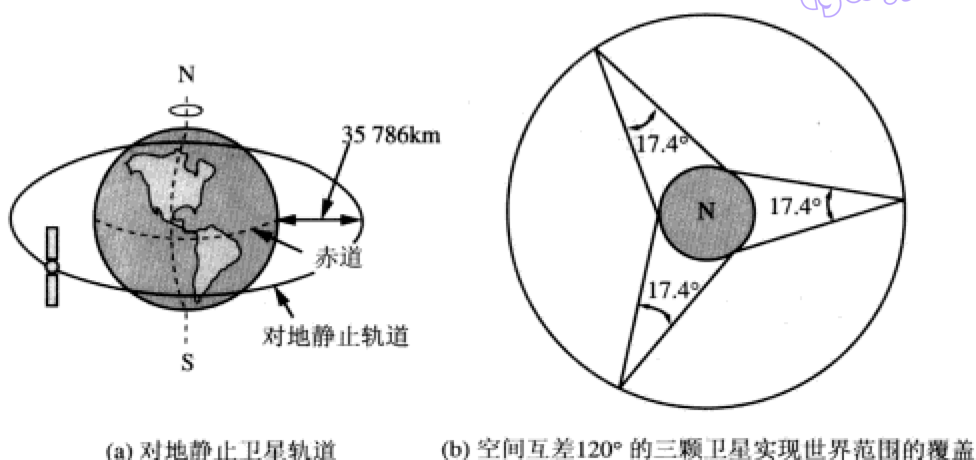


图 10-1　卫星通信网络的构成

紧接这些成就的是争先恐后的空间活动，许多国家开发出了实际运营的通信卫星，用于商业目的或政府部门。本节将从整体上介绍卫星通信链路，包括发射器－接收器的功率计算、信号的传输、频率的分配，以及天线的设计等内容。



(a) 对地静止卫星轨道　　(b) 空间互差120° 的三颗卫星实现世界范围的覆盖

图 10-2　对地静止卫星轨道

当人们说某个卫星处于对地静止轨道（geostationary orbit）时，是指该卫星处于一个圆形轨道上，轨道所在的平面就是地球的赤道平面，且卫星的高度正好可以使卫星的轨道周期等于地球的自转周期。如图 10-3 所示，绕地球的圆形轨道上质量为 M_s的卫星，受到两个力的作用，一个是引力 F_g，另外一个是排斥的离心力 F_c。两个力的幅值分别为：

$$F_g = \frac{GM_sM_e}{R_0^2}, \tag{10.1}$$

$$F_c = \frac{M_s u_s^2}{R_0} = M_s\omega^2 R_0, \tag{10.2}$$

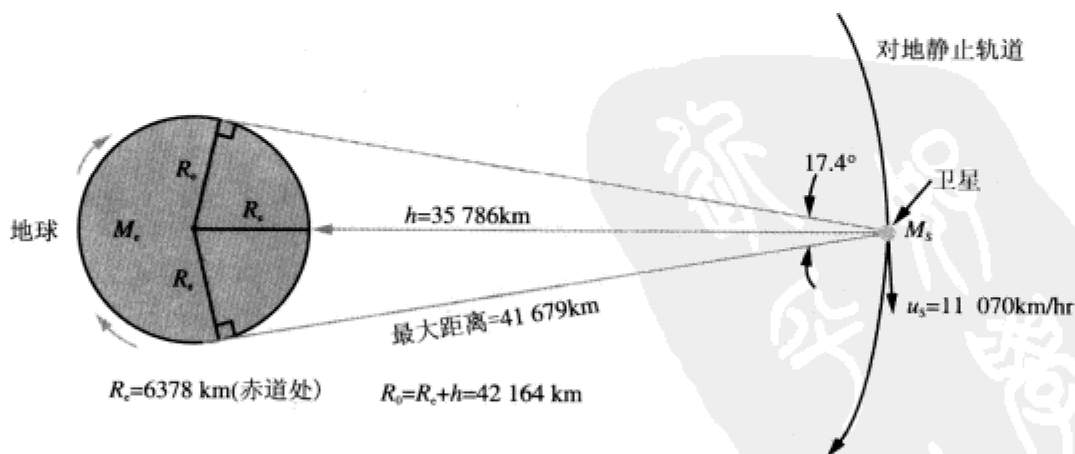


图 10-3　质量为 m_s的绕地轨道卫星。由于轨道对地静止，因此卫星和地球中心的距离 R_0应该为 42 164km。在赤道上，这对应于离地表 35 786km 的高度

其中 $G = 6.67 \times 10^{-11}(N \cdot m^2/kg^2)$，是宇宙引力常数；$M_e = 5.98 \times 10^{24}$kg，是地球的质量；$R_0$是卫星与地心之间的距离；$u_s$是卫星的速度。对于旋转物体，$u_s = \omega R_0$，其中 ω 是物体的角速度。为了使卫星保持在轨道上，作用在其上的两个相反方向的力

必须幅值相等，即

$$G\frac{M_s M_e}{R_0^2}=M_s\omega^2 R_0,\tag{10.3}$$

由此可以得到 R_0的解

$$R_0=\left[\frac{GM_e}{\omega^2}\right]^{1/3}\tag{10.4}$$

392

为了保持对地球表面相对静止，卫星的角速度应该等于地球绕自身轴线的旋转角速度，即

$$\omega=\frac{2\pi}{T},\tag{10.5}$$

其中 T 是一个恒星日的周期，单位为 s。恒星日考虑了地球绕太阳旋转的因素，等于 23h 56min 4.1s。将式（10.5）代入式（10.4）可得：

$$R_0=\left(\frac{GM_eT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3},\tag{10.6}$$

将 T、M_e及 G 的实际数值代入，得到 $R_0=42\ 164$km。减去赤道上地球的平均半径 6378km，得到地球表面之上的高度为 $h=35\ 786$km。

从对地静止轨道上看，地球的张角为 17.4°，可以看到的赤道弧长为 18 000km，对应的经度角约为 160°。在地球赤道上方的对地静止轨道上，均匀布置 3 颗卫星，就可以沿着赤道平面实现全球的完整覆盖，并且三个卫星的波束之间还将存在很大一部分重叠区。就两极的覆盖来讲，全球波束能够覆盖到赤道两侧纬度 81°的地面站。

并非所有的卫星通信系统都使用对地静止轨道上的空间飞行器。由于发射器功率的限制或考虑到其他因素，有时需要在低得多的高度下运行。在这种情况下，卫星被放置在一个高椭圆度的轨道上（以满足开普勒定律的要求），使其近地点附近的部分轨道离地面的距离只有几百公里。在对地静止的情况下，只需要 3 颗卫星就可以实现全球覆盖，但在高椭圆度轨道的情况下，却需要多得多的卫星数目。

10.2 卫星转发器

通信卫星起着远距离中继器的功能，它通过上行链路（uplink）接收地面站的信号，并予以处理，然后通过下行链路（downlink）将信号重发到希望的地面目标。国际电信联盟为卫星通信分配了特定的波段，如表 10-1 所示。其中，美国商用卫星在提供国内通信时，大多采用 4/6GHz 的波段（4/6GHz band：3.7GHz ~ 4.2GHz 为下行链路，5.925GHz ~ 6.425GHz 为上行链路）以及 12/14GHz 的波段（12/14GHz band：11.7GHz ~ 12.2GHz 为下行链路，14.0GHz ~ 14.5GHz 为上行链路）。分配给每个上行链路段、每个下行链路段的波段宽度为 500MHz。通过让地球—卫星的上行链路、卫星—地球的下行链路使用不同的频段，同一个天线就可以承担两种功能，

同时又可以防止这两种信号间的相互干扰。同上行链路相比，下行链路波段通常采用较低的载波频率，其原因在于，较低的频率所受到的地球大气层衰减较小，因而对卫星的输出功率要求可以降低。

表 10-1 通信卫星的频率分配

用　途	下行链路频率（MHz）	上行链路频率（MHz）
	固定服务	
商用（C 波段）	3700 ~ 4200	5925 ~ 6425
军用（X 波段）	7250 ~ 7750	7900 ~ 8400
商用（K 波段）		
国内（美国）	11 700 ~ 12 200	14 000 ~ 14 500
国际	10 950 ~ 11 200	27 500 ~ 31 000
	移动服务	
航海	1535 ~ 1 542.5	1635 ~ 1644
航空	1 543.5 ~ 1 558.8	1645 ~ 1660
	广播服务	
	2500 ~ 2535	2655 ~ 2690
	11 700 ~ 12 750	
		遥测、跟踪及控制
	137 ~ 138，401 ~ 402，1525 ~ 1540	

这里采用 4/6GHz 波段作为例子，来进行卫星中继器运行的分析，但需要牢记的是，无论具体应用哪个卫星通信波段，中继器的功能结构基本上是相同的。

图 10-4 所示为典型通信卫星实现 12 通道中继器的通用方块图。每个通道从天线的接收点开始、经过中继器的转换、再到天线的重发点的路径，称作一个*转发器*（transponder）。总共 500MHz 的波段宽度，当分配给 12 个通道（转发器）时，每个通道的波段宽度为 36MHz，通道间隔则为 4MHz。每个转发器的基本功能包括：保持与邻近的射频（RF）通道隔离、频率转换，以及放大。当采用*频分多路复用*（frequency-division multiple access，FDMA）技术，一种常用的信息传输方案时，在每个转发器 36MHz 的波段宽度中，可以容纳数千路独立的电话通道（电话语音信号要求的最小波段宽度为 3kHz，每个电话通道额定的频率宽度通常为 4kHz），或数个电视频道（每个要求 6MHz 的波段宽度），或数百万位的数字信号，当然也可以是这三种通道的组合。

393

当使用同一个天线进行发送和接收时，使用*双工器*（duplexer）进行信号分离。双工器的种类很多，但最易于理解的是图 10-5 所示的*环行器*（circulator）。环行器是一种三端口设备，它把一块铁氧体材料放入永磁体产生的磁场中，以实现从端口 1 到 2、从 2 到 3、从 3 到 1 的功率流向，而阻止相反方向的流向。天线接在环行器的端口 1 上，其接收到的信号仅能通向端口 2；端口 2 匹配到一个带通滤波器上，因此，所接收的信号不会有任何部分从端口 2 反射到端口 3；发射信号则连接到端口 3，环行器使该信号通向端口 1，由天线进行发射。

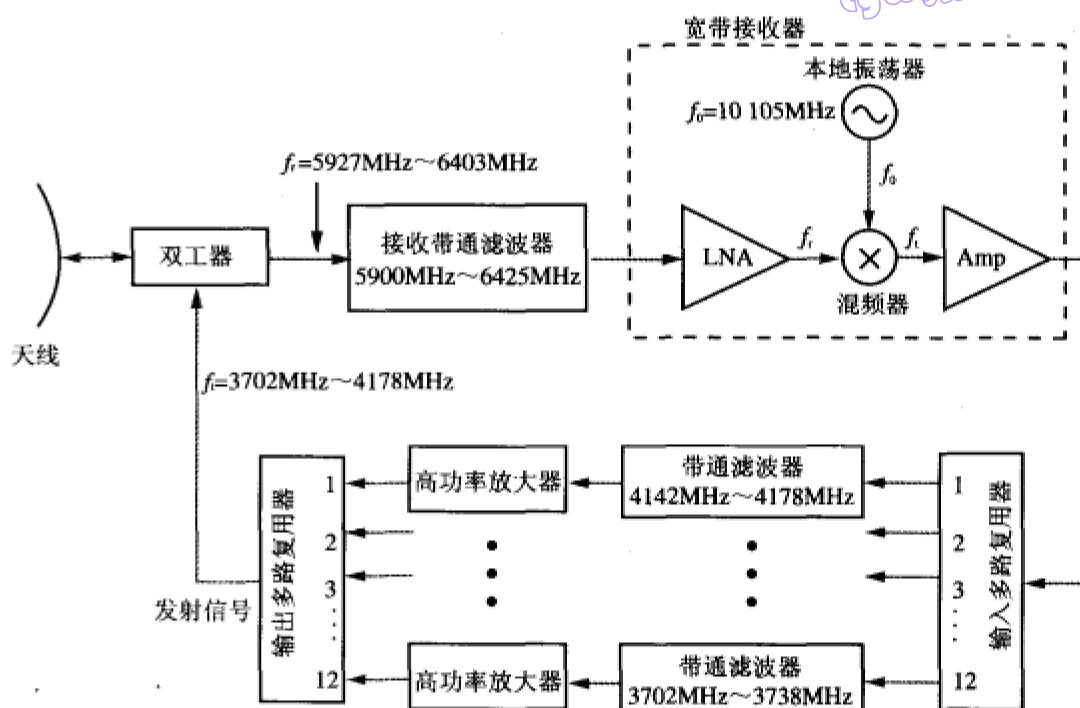


图 10-4 12 通道（转发器）通信系统的各个单元

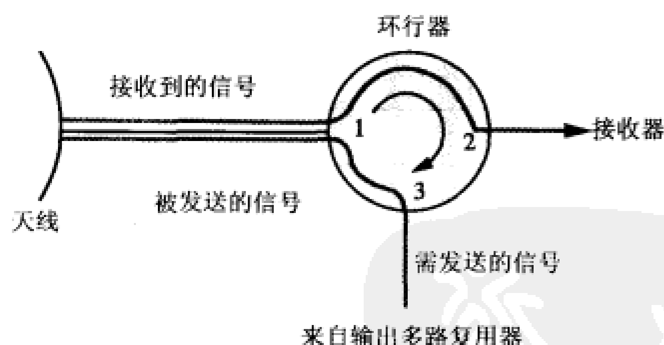


图 10-5 铁氧体环行器的基本运行原理

在图 10-4 中，接收到的信号经过双工器之后，再通过一个接收带通滤波器，以保证接收信号与发送信号的隔离。接收滤波器覆盖 5.925MHz ~ 6.425MHz 的波段宽度，这包含了所有 12 个通道累加的波段宽度。第一个接收通道的频率范围是从 5927MHz ~ 5963MHz，第二个是从 5967MHz ~ 6003MHz，依此类推，直到第 12 个通道，其频率范围是从 6367MHz ~ 6403MHz。在接收信号的路径上，接下来的子系统是宽带接收器，它包括三个元件：低噪声宽带放大器、频率转换器，及输出放大器。频率转换器由一个稳定的本地振荡器连接到一个非线性微波混频器构成，其中本地振荡器产生的信号频率为 f_0 = 10 105MHz。混频器用于将接收信号的频率 f_r（范围从 5927MHz ~ 6403MHz），转换为较低的频率 $f_t = f_0 - f_r$。这样一来，接收信号频率的较低端，即 5927MHz，转换成了 4178MHz，而较高端的 6403MHz，则转换成了

394

3702MHz。经过这一转换后的 12 个通道，具有新的频率范围，但它们的信号中所载的信息（调制信息）与接收信号中的信息是相同的。从原理上讲，这样得到的接收器输出信号，可以作进一步的放大，然后经双工器通向天线，发送回地球。但在实际上，接收器的输出信号经过一个多路复用器（multiplexer）及紧随其后的一组窄带通滤波器后，分离成为 12 个转发器通道，每个滤波器覆盖一个转发器通道的波段宽度。12 个通道的信号各由自己的高功率放大器（high-power amplifier，HPA）放大，然后由另外一个多路复用器组合，并把组合的多频率信号送给双工器。这个通道分离与重组的过程，是一种安全措施，以防止因单个高功率放大器性能降低或完全故障而引起 12 个通道全部丢失。

395

采用极化分集（polarization diversity）技术，在同样 500MHz 的波段范围内，卫星中继器的信息承载容量可以从 12 个通道倍增为 24 个通道。以通道 1（从 5927MHz ~5963MHz）为例，若不是在其中传输一个通道的信息，而是让地面站往卫星发送两个信号，它们载有不同的信息、覆盖相同的频段，但具有不同的天线极化状态配置，一个为右旋圆（RHC）极化，另一个为左旋圆（LHC）极化。卫星天线则装备成这样一种馈源配置，它可以独立接收两个圆极化信号中的每一个，并且彼此的干扰可以忽略不计。在这种情况下，要使用两个双工器，一个连接到 RHC 极化馈源，另一个则连接到 LHC 极化馈源，如图 10-6 所示。

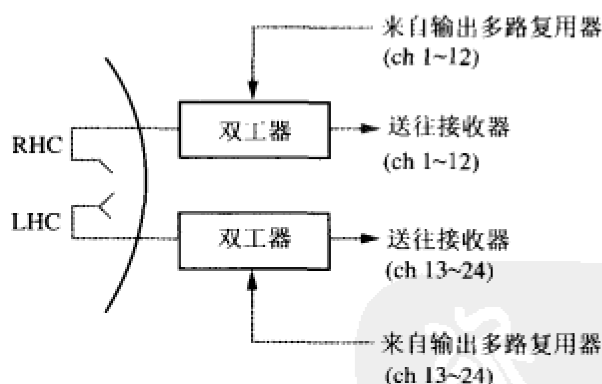


图 10-6　极化分集技术将通道数目从 12 增加到 24

10.3　通信链路的功率预算

在图 10-7 中，卫星通信链路的上行段和下行段都受制于弗里斯传输公式（Friis transmission formula，参见 9.7 节），该公式指出，对于增益为 G_r 的接收天线，若在范围半径 R 处，增益为 G_t 的发射天线所发射的功率为 P_t，则接收天线接收到的功率为

$$P_r = P_t G_t G_r \left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2 \tag{10.7}$$

396

式（10.7）的表达式适用于无损媒介，例如自由空间。为了考虑地球大气中云层、雨水的衰减（当沿传播路径上存在云层、雨水时），以及大气层中某些气体（主要是

氧气和水蒸气）的吸收作用，式（10.7）应该重写为以下形式：

$$P_{ri} = Y(\theta)P_r = Y(\theta)P_t G_t G_r \left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2, \tag{10.8}$$

其中 P_{ri} 代表当考虑大气层损失时的接收器输入功率，$Y(\theta)$ 是天顶角为 θ 时大气层的单向透射率。除与 θ 有关之外，$Y(\theta)$ 也是通信链路的微波频率以及沿着传播路径的雨速情况的函数。对于低于 10GHz 的频率，包括分配给卫星通信的 4/6GHz 波段，大气层气体的吸收作用是极其微小的，云层和雨水的衰减也相对较小。因此，在大多数情况下，透射率 $Y(\theta)$ 的典型幅值在 0.5 到 1 之间。0.5 的透射率意味着需要传输两倍于自由空间情况下的功率，接收才能达到特定的功率水平。在大气的各种衰减原因中，最严重的是下雨，其衰减系数随着频率的增加而迅速增大。因此，从发射器的功率要求来看，随着通信系统的频率向着微波范围的较高频段增大，大气衰减将变得比较重要。

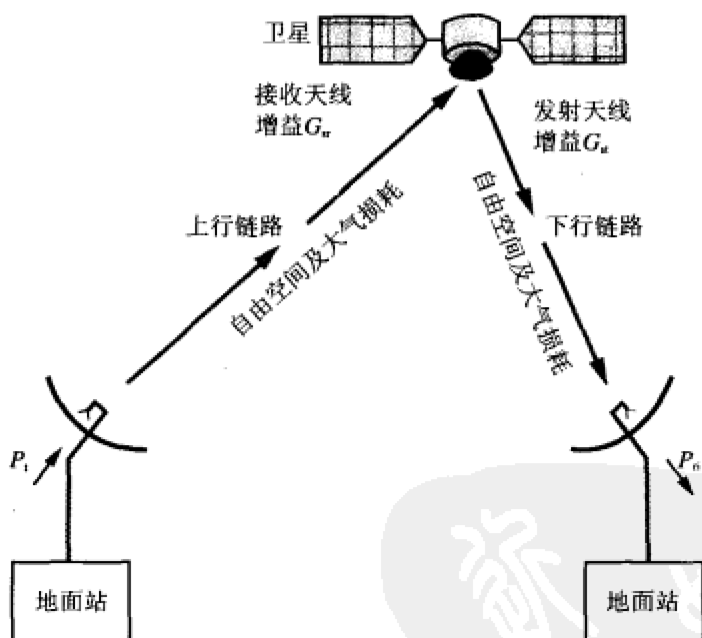


图 10-7 卫星转发器

出现在接收器输出中的噪声 P_{no}，包括三个方面的贡献：(1) 由接收器电子元件产生的内部噪声；(2) 天线接收的由外源引起的噪声，包括大气层辐射的热噪声等；(3) 由天线材料引起的热辐射噪声。所有噪声源的组合，可以用一个等效的系统噪声温度 T_{sys} 表示，按以下方式进行定义：

$$P_{no} = G_{rec} K T_{sys} B \tag{10.9}$$

其中 K 是玻尔兹曼常数，G_{rec} 是接收器的功率增益，B 是波段宽度。这个输出噪声水平，跟一个无噪声的接收器在输入以下噪声水平时的输出完全相同：

$$P_{ni} = \frac{P_{no}}{G_{rec}} = K T_{sys} B \tag{10.10}$$

信噪比（signal-to-noise ratio）定义为信号功率与噪声功率的比值，这里的噪声功率是指等效的无噪声接收器输入端的噪声功率。因此，

$$S_n = \frac{P_{ri}}{P_{ni}} = \frac{Y(\theta)P_tG_tG_r}{KT_{sys}B}\left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2 \quad (10.11)$$

通信系统的性能决定于两组因素。第一组因素是信号处理技术，包括在发射器端对信号进行编码、调制、组合、发送等处理的技术，以及在接收端对信号进行接收、分离、解调、解码等处理的技术。第二组因素是通信链路上的增益和损耗，它们用信噪比 S_n来表示。对于一组给定的信号处理技术，S_n确定接收信号的质量，譬如数字信号传输时的位误差率，传输声音和视频信号时的声音和图形质量等。极高质量的信号传输，要求极高的 S_n数值；在广播级质量的卫星电视中，有些系统的设计可以提供超过50dB（或10^5数量级）的 S_n数值。

卫星链路的性能取决于上行链路段和下行链路段的性能组合。如果其中有一段的性能很差，组合性能也将很差，而不管另外一段的性能有多么的好。正是因为这个原因，系统功率要每段分开进行计算。

397

10.4 天线波束

尽管大多数的地面站天线必须提供高方向性的波束，以防止干涉效应，但卫星天线系统则设计成波束定制的形式，以匹配卫星的服务区域。例如，为了实现全球覆盖，要求波束宽度为17.4°。相反，为了在卫星与一个小区域之间进行发送和接收，就可能需要1°数量级甚至更小的波束宽度，如图10-8所示。波束宽度 β 为1°的天线，将在地球表面产生一个点状波束，其覆盖地球的面积的直径大约为630km。

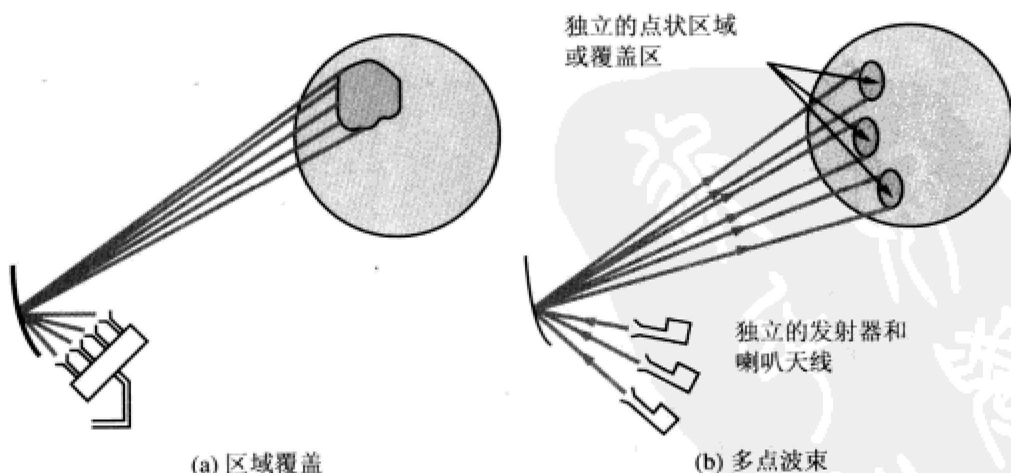


图10-8 点状和多波束卫星天线系统，用以覆盖地球表面限定的区域

波束尺寸与天线增益有着直接的联系，因而与要求的发送功率有联系。天线增益 G 与方向性 D 的关系为 $G=\xi D$，其中 ξ 是辐射效率，D 同波束宽度 β 的关系由式(9.26)的近似表达式给定。对于环形波束，有

$$G=\xi\frac{4\pi}{\beta^2},\tag{10.12}$$

其中β的单位为rad。对于无损天线（$\xi=1$），一个$\beta=17.4°(=0.3\text{rad})$的全球波束所对应的增益为$G=136$或21.3dB。相反，一个1°的窄波束所对应的天线增益为41 253或46.2dB。

为了实现卫星系统相关的各种通信功能，主要使用四种类型的天线[1]：

（1）工作于VHF和UHF频段，用于遥测、跟踪，以及实现控制功能，常采用偶极子天线和螺旋天线；

（2）为了产生宽角度波束以实现全球覆盖，常采用喇叭天线以及相对较小的抛物面碟形天线（直径为几厘米的数量级）；

（3）馈源来自一个或多个喇叭的抛物面碟形天线，可产生单个波束来进行区域覆盖（图10-8a），或产生多个点状波束（图10-8b）；

（4）包含许多独立辐射单元的天线阵，可以产生多点波束，也可以进行波束转向以及波束扫描。

复习题

Q10.1 与对地静止轨道相比，椭圆卫星轨道有何优点与缺点？

398

Q10.2 为什么卫星通信系统的上行链路段和下行链路段采用不同的频率？哪段采用较高的频率？为什么？

Q10.3 如何利用天线极化技术增加通信系统承载的通道数目？

Q10.4 接收器的总系统噪声温度的噪声来源有哪些？

10.5 雷达传感器

Radar（雷达）这个术语是radio detection and ranging（无线电定向和测距）的缩写形式，后者描述了现代雷达系统的部分特征，但远不是全部。在历史上，最早开发和应用的雷达系统位于无线电频率范围，包括微波波段，而现在已经出现了光波雷达，或激光雷达（lidar），运行在可见光的波长。这些年来，雷达这个词已经失去了它原始的含义，被用来指称任何有源电磁传感器，只要该传感器“用自带的波源照射空间区域、并检测该区域中反射物体的回波”即可。除了检测是否存在反射物体、以及通过测量雷达发射的短脉冲的时间延迟来确定其距离之外，雷达还可以确定目标的位置（方向）以及径向速度。移动物体的径向速度（radial velocity）就是在该物体与雷达的连线方向上的速度分量，其获得方法是测量移动物体产生的多普勒频移（Doppler frequency shift），即测量发射信号与接收信号的频率差。此外，反射脉冲的强度和形状，则携带了反射物体的材料特性与形状的信息。

雷达在日常生活与军事上具有广泛应用，包括空中交通控制、飞机导航、法律的实施、武器系统的控制与引导、地球环境遥感、天气观测、天文、汽车防撞等等。不同类型的雷达应用，所使用的频率范围低至兆赫兹区间，高达225GHz的频率。

---

1. 参考R. G. Meadows，A. J. Parsons，*Satellite Communications*，英国Hutchinson公司，1989年。

10.5.1 雷达系统的基本运行

图10-9所示的方框图包含了脉冲雷达系统的基本功能单元。其中，同步器-调制器（synchronizer-modulator）单元通过产生一列直流、窄宽度、均匀间隔的脉冲，来使发射器的运行与视频处理器-显示单元（videoprocessor-display unit）同步。这些脉冲被同时送往发射器以及视频处理器-显示单元，以表明雷达脉冲发射的时刻。发射器中有一个高功率射频振荡器，它具有on/off控制电压端，由同步器-调制器单元提供的脉冲进行驱动。因此，发射器产生的射频能量脉冲，在宽度和间隔上等于同步器-调制器单元产生的直流脉冲。发射器产生的每个脉冲，经由双工器（duplexer）送往天线，其中双工器用以实现天线在发射器与接收器间的共享。双工器也常称作发射器/接收器开关（transmitter/receiver switch，T/R switch），在脉冲持续的时间里，它将发射器连接到天线，而在新脉冲到来之前的其余时间里，则将接收器连接到天线。然而，有些双工器是无源设备，它们可以实现连续（同时）共享功能，并对信号进行隔离。图10-5所示的环行器，就是无源双工器的一个例子。在天线发射以后，发射出去的部分信号被反射物体（常称作目标，target）所截获，并重新往许多方向辐射。由目标重新辐射并返回到雷达的能量，被天线收集，并送到接收器；接收器对信号进行处理，以检测目标是否存在，并提取其位置和相对速度的信息。399接收器将反射回的射频信号转换成低频的视频信号，并传送给视频处理器-显示单元，后者则将所提取的信息，以适当的格式显示出来，以满足具体应用的需要。伺服单元则用来定位天线波束的方向，以对控制信号作出响应。这些控制信号可以来自不同的途径，例如来自操作人员，来自预设功能的控制单元，或者由另外一个系统进行控制的控制单元提供。例如，在空间交通控制雷达中，控制单元发布命令，使伺服单元连续地沿方位角方向转动天线。相反，安装在飞机前端的雷达天线，则只能在限定的角度范围内进行来回的扫描。

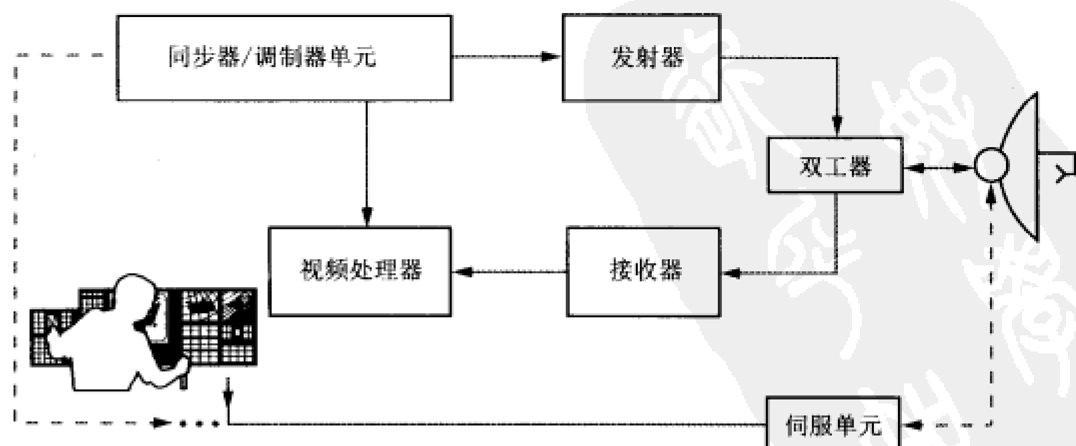


图10-9 雷达系统的基本方框图

10.5.2 非模糊测距范围

雷达发射能量的各种特征的集合，称作信号波形（signal waveform）。对于脉冲

雷达，这些特征包括：（1）载波频率 f；（2）脉冲长度（pulse length）τ；（3）脉冲重复频率（pulse repetition frequency）f_p（每秒钟的脉冲数），或脉冲间周期（inter-pulse period）$T_p=1/f_p$；（4）脉冲中的调制（如果存在的话）。其中的前三个特征表示在图 10-10 中，调制则是指对信号的幅值、频率，或相位进行控制，这超出了目前分析的水平，因此不予考虑。

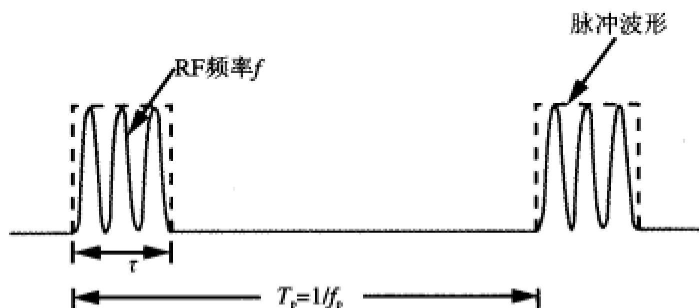


图 10-10 一个脉冲雷达，以 f_p 的重复频率，发射一列连续的 RF 脉冲

到目标的距离，可以通过测量脉冲达到目标再返回所用的时间延迟 T 来确定。对于距离为 R 的目标，

$$T=\frac{2R}{c},\tag{10.13}$$

这里 $c=3\times10^8\mathrm{m/s}$ 为光速，系数 2 用以考虑来回传播。雷达能够清晰地测量的最大目标距离，称为非模糊测距范围（unambiguous range），用 R_u 表示，它由脉冲间周期 T_p 决定，由下式给定： 400

$$\boldsymbol{R}_u=\frac{cT_p}{2}=\frac{c}{2f_p}\tag{10.14}$$

距离 R_u 对应于目标回波可以在下一个脉冲发送之前收到的最大目标距离。如果 T_p 太短，则给定脉冲的回波信号可能会在下一个脉冲发送以后才到达，在这种情况下，目标表现出来的距离将比实际距离短得多。

根据式（10.14），脉冲重复频率（PRF）越高，非模糊测距范围 R_u 就越短，例如，若雷达用于探测 100km 远的目标，那么，f_p 将低至 1.5kHz。单独考虑 R_u 的话，要求选择低的 PRF，而另外一些考虑却建议选择高的 PRF。稍后在 10.6 节中将会看到，雷达接收器的信噪比直接正比于 f_p，因此选择尽可能高的 PRF 比较有利。不仅如此，PRF 除了决定最大非模糊测距范围 R_u 外，还决定着雷达能够清楚地测量的最大多普勒频率（因而决定着能够测量的目标最大径向速度）。如果最大距离和速度的要求无法由同一个 PRF 满足，那么作出某种妥协是必要的。另外一种选择是采用多 PRF（multiple-PRF）雷达系统，这种系统先以一个 PRF 发送几个脉冲，接下来再以另外一个 PRF 发送几个脉冲，然后将接收到的两组脉冲一起处理，以去除两个 PRF 单独应用时的不确定性。

10.5.3 测距范围及角度的分辨率

考虑图 10-11 所示的雷达，它正在观测两个目标，两个目标的范围半径分别为

R_1和R_2。设$t=0$时刻对应着发射脉冲的开始。脉冲长度为τ。目标1的返回脉冲将在$T_1=2R_1/c$时刻到达，其长度为τ（假设脉冲的空间长度比目标的径向尺度要大得多）。同样，目标2的返回脉冲将在$T_2=2R_2/c$时刻到达。只要$T_2 \geqslant T_1+\tau$，或等效地只要

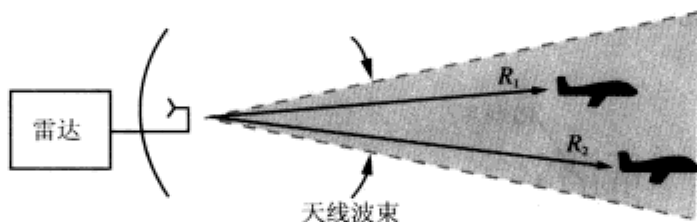


图 10-11　雷达波束同时照射两个目标，一个的距离为R_1，另外一个为R_2

$$\frac{2R_2}{c} \geqslant \frac{2R_1}{c}+\tau \tag{10.15}$$

这两个目标就可以分辨为不同的目标。雷达的**测距范围分辨率**（range resolution），用ΔR表示，定义为两个目标的回波不发生重叠时，两目标之间的最小间距。根据式(10.15)，有

$$\Delta R = R_2 - R_1 = c\tau/2 \tag{10.16}$$

有些雷达可以发射持续时间短到1ns甚至更短的脉冲。当$\tau=1\text{ns}$时，$\Delta R=15\text{cm}$。

401

雷达系统的基本角分辨率由其天线的波束宽度β确定，如图10-12所示。在范围半径为R的地方，对应的**方位分辨率**（azimuth resolution），用Δx表示，由下式给定

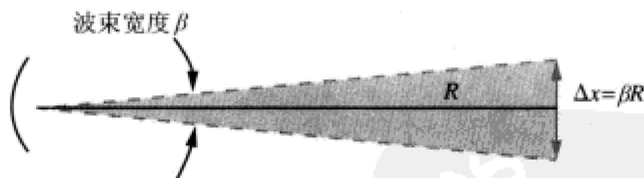


图 10-12　在范围半径R处，方位分辨率Δx等于βR

$$\Delta x = \beta R, \tag{10.17}$$

其中β的单位是弧度。在有些情况下，采用特殊技术可以将角分辨率改进到波束宽度β的若干分之一。10.8节中描述的单脉冲跟踪雷达就是一个这样的例子。

10.6　目标探测

利用雷达进行目标探测时，受到两个因素的支配：(1) 由于一部分发射能量被目标反射，而导致雷达接收器收到的**信号能量**（signal energy）；(2) 接收器产生的**噪声能量**（noise energy）。图10-13所示为雷达接收器的输出随时间变化的函数曲线，它将目标引起的接收信号、外部噪声源引起的噪声、以及构成接收器的装置引起的噪声显示在一块。噪声的随机变化，有时可能导致难以将目标的反射信号与一个噪声尖峰相区分。在图10-13中，将接收器输出端的平均噪声功率电平记为$P_{no}=$

402

$G_{rec}P_{ni}$，其中 G_{rec} 是接收器的增益，P_{ni} 是以接收器输入端口为参照时的噪声电平。功率电平 P_{r_1} 和 P_{r_2} 代表由雷达观测到的两个目标的回波。由于噪声的随机性，在探测中有必要设置阀值 $P_{r_{min}}$。对于图 10-13 中标明的阀值 1，雷达将探测到两个目标的存在，但它也将探测到一个假报警（false alarm）。发生这种情况的机会称为假报警概率（false-alarm probability）。另一方面，如果将阀值提升到电平 2，以防止假报警，则雷达将无法探测到第一个目标的存在。正确探测目标的机会称为探测概率（detection probability）。因此，要综合考虑两种概率，在妥协的基础上，相对平均噪声电平来完成阀值的设置。

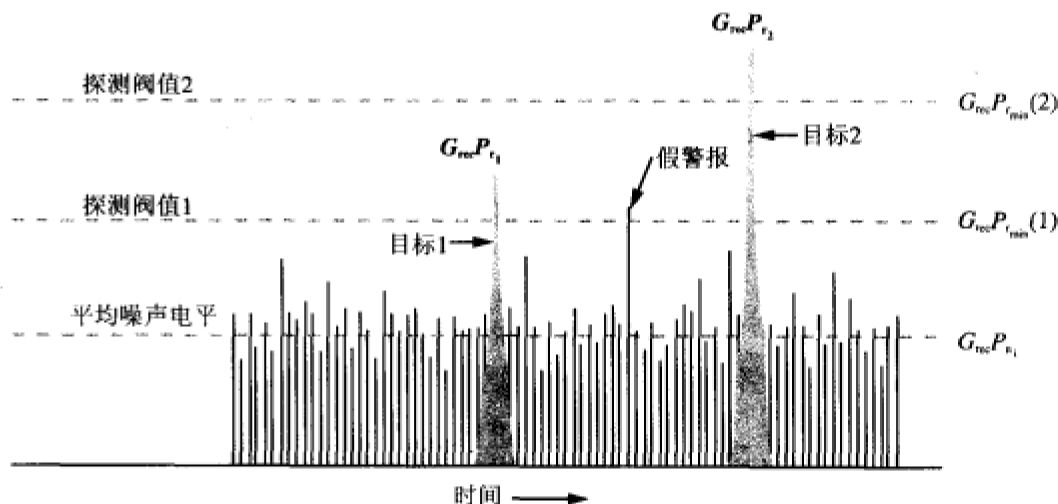


图 10-13 雷达接收器的输出随时间变化的函数关系

为了使噪声电平保持最小，接收器被设计成频宽 B 刚好足以让接收脉冲中的大部分能量可以通过。这样的设计，称作滤波匹配设计（matched-filter design），它要求 B 等于脉冲长度 τ 的倒数（即 $B=1/\tau$）。因此，对于一个滤波匹配的接收器，式（10.10）成为

$$P_{ni}=K\,T_{sys}B=\frac{K\,T_{sys}}{\tau} \qquad (10.18)$$

雷达接收的信号功率 P_r 同发射功率 P_t 的关系，遵从雷达方程。下面先推导双站雷达（bistatic radar）配置这种一般情况的雷达方程，此时发射器、接收器不必在同一地点；然后针对发射器、接收器处在同一地点的单站雷达（monostatic radar），对所得结果进行专门处理。在图 10-14 中，目标到发射器的距离为 R_t，到接收器的距离为 R_r。照射目标的功率密度为

$$S_t=\frac{P_t}{4\pi R_t^2}G_t \quad (\mathrm{W/m^2}), \qquad (10.19)$$

其中（$P_t/4\pi R_t^2$）表示一个各向同性辐射体辐射的功率密度，G_t 为目标方向上发射天线的增益。目标采用雷达截面（radar cross section, RCS）σ_t 来描述，单位为 $\mathrm{m^2}$。σ_t 的定义方法为：它将目标截获并重新发送出的功率表示为

$$P_{\text{rer}} = S_t\sigma_t = \frac{P_t G_t \sigma_t}{4\pi R_t^2} \quad (\text{W}) \tag{10.20}$$

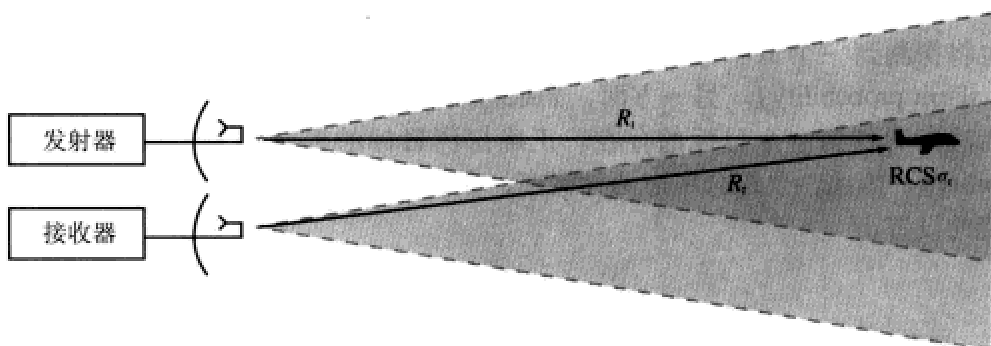


图 10-14 双站雷达系统利用雷达截面（RCS）σ_t探测目标

这个重新辐射出去的功率以球面的形式往外扩展，在接收雷达的天线上产生 S_r的入射功率密度，即

403

$$S_r = \frac{P_{\text{rer}}}{4\pi R_r^2} = \frac{P_t G_t \sigma_t}{(4\pi R_t R_r)^2} \quad (\text{W/m}^2) \tag{10.21}$$

当有效面积为 A_r、辐射效率为 ξ_r时，接收雷达天线截获并传给接收器的功率 P_r为

$$P_r = \xi_r A_r S_r = \frac{P_t G_t \xi_r A_r \sigma_t}{(4\pi R_t R_r)^2} = \frac{P_t G_t G_r \lambda^2 \sigma_t}{(4\pi)^3 R_t^2 R_r^2}, \tag{10.22}$$

其中应用了式（9.29）和式（9.64），以将接收天线的有效面积 A_r同增益 G_r联系起来。对于采用同一个天线完成发送和接收功能的单站雷达，$G_t = G_r \triangleq G, R_t = R_r \triangleq R$。因此，

$$P_r = \frac{P_t G^2 \lambda^2 \sigma_t}{(4\pi)^3 R^4} \tag{10.23}$$

单向通信系统对 R 的依赖关系为 $1/R^2$，而上述雷达方程（radar equation）对范围半径的依赖关系则是 $1/R^4$，这实际上是两个单向传播过程的乘积。

探测过程可以基于单个脉冲的回波，也可以基于几个脉冲的回波之和（积分）。此处只考虑单个脉冲的情况。如果目标回波信号的功率 P_r超过图 10-13 所示的探测阈值（threshold detection level）$P_{r_{\min}}$，则称该目标是可探测的。最大可探测范围（maximum detectable range）$R_{\max}$是目标可否探测的分界点，其外部的目标不可探测，它对应于式（10.23）中 $P_r = P_{r_{\min}}$时的范围。即，

$$R_{\max} = \left[\frac{P_t G^2 \lambda^2 \sigma_t}{(4\pi)^3 P_{r_{\min}}}\right]^{1/4} \tag{10.24}$$

信噪比等于接收到的功率 P_r同式（10.18）给定的平均输入噪声功率 P_{ni}之比，即

$$S_n = \frac{P_r}{P_{ni}} = \frac{P_r \tau}{K T_{\text{sys}}}, \tag{10.25}$$

最小信噪比（minimum signal-to-noise ratio）$S_{\min}$对应 $P_r = P_{r_{\min}}$，即

$$S_{min} = \frac{R_{\tau_{min}} \tau}{K T_{sys}} \tag{10.26}$$

将式（10.26）代入式（10.24）可得：

$$R_{max} = \left[\frac{P_t \tau G^2 \lambda^2 \sigma_t}{(4\pi)^3 K T_{sys} S_{min}} \right]^{1/4} \tag{10.27}$$

乘积 $P_t\tau$ 等于发射脉冲的能量。因此，根据式（10.27），确定最大可探测范围的，是发射脉冲的能量，而不单单是发射器的功率水平。就最大可探测范围而言，一个高功率窄脉冲同一个能量相等的低功率长脉冲将产生相同的雷达性能。然而，长脉冲的测距范围分辨率要比短脉冲差很多（见式（10.16））。

最大可探测范围 R_{max} 也可以通过改善信噪比而得以增加。作为具体实现措施，可以对多个脉冲的回波进行积分，从而增加来自目标的总接收能量。在限定的积分时间里，可获得的积分脉冲个数正比于 PRF。因此，从使目标的探测效果最大化的角度来看，只要其他方面容许，那么采用尽可能高的 PRF 是有利的。

10.7 多普勒雷达

多普勒效应是由于发射源、反射物体或接收系统等发生移动而引起波频率偏移的一种效应。如图 10-15 所示，由静止的各向同性点源辐射的波，形成空间间隔均匀的同心圆，随着时间的变化而从源点往外行进。相反，由移动波源辐射的波，则在移动的方向上受到压缩，在相反的方向上则被拉开。波被压缩时，其波长变短，这等效于增加频率。相反，波被展开时，频率减低。频率的变化量称为多普勒频移（Doppler frequency shift），以 f_d 表示。这就是说，如果 f_t 是移动波源所辐射的波频率，则一个静止的接收器所观测到的波频率 f_r 将为 404

$$f_r = f_t + f_d \tag{10.28}$$

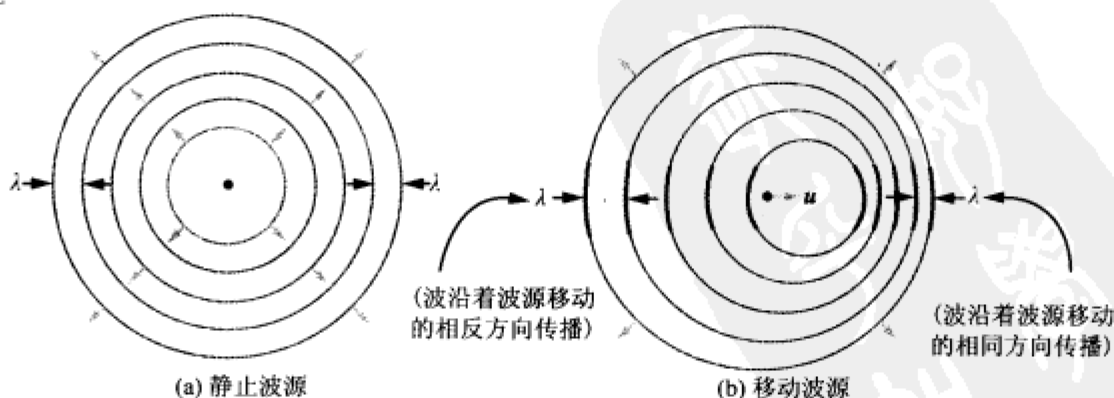


图 10-15 不同点源辐射的波。波在移动的方向上受到压缩，而在相反的方向上被展开；在与运动方向垂直的方向上则不受影响

当以波源到接收器的范围半径矢量方向作参照时，所得到的速度矢量的方向，决定着 f_d 的幅值和符号。

考虑一个波源，以f_t的频率发射电磁波，如图10-16所示。在距离波源R远的地方，辐射波的电场为

$$E(R)=E_0e^{j(\omega_t t-kR)}=E_0e^{j\phi}, \tag{10.29}$$

其中E_0是波的幅值，$\omega_t=2\pi f_t, k=2\pi/\lambda_t$，这里$\lambda_t$是发射波的波长。幅值依赖于距离$R$以及波源天线的增益，但在多普勒效应中无需考虑。物理量

$$\phi=\omega_t t-kR=2\pi f_t t-\frac{2\pi}{\lambda_t}R \tag{10.30}$$

是以$R=0$处$t=0$时刻的辐射波为基准时，辐射波的相位。如果波源向着接收器移动（或者反过来，后者往前者移动），径向速度为u_r，如图10-16所示，则

$$R=R_0-u_r t, \tag{10.31}$$

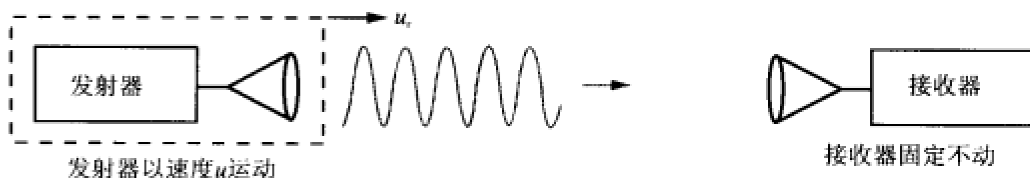


图10-16 一个发射器以u_r的径向速度，接近一个固定不动的接收器

其中R_0是$t=0$时刻波源与接收器间的距离。因此，

$$\phi=2\pi f_t t-\frac{2\pi}{\lambda_t}(R_0-u_r t) \tag{10.32}$$

这就是接收器探测到的信号的相位。根据定义，波的频率等于相位ϕ对时间的导数再除以2π。因此

$$f_r=\frac{1}{2\pi}\frac{d\phi}{dt}=f_t+\frac{u_r}{\lambda_t} \tag{10.33}$$

比较式（10.33）和式（10.28），可以发现$f_d=u_r/\lambda_t$。对雷达来讲，多普勒效应发生两次，一次是波从雷达到目标，另外一次是波从目标反射回雷达。因此，$f_d=2u_r/\lambda_t$。f_d对方向的依赖关系，由速度与测距范围单位矢量的点积给定，因此有

405

$$f_d=-2\frac{u_r}{\lambda_t}=-\frac{2u}{\lambda_t}\cos\theta, \tag{10.34}$$

其中u_r是u的径向速度分量，θ是测距范围矢量与速度矢量之间的夹角，如图10-17所示，其中测距范围矢量的方向定义为从雷达到目标。对于后退的目标（相对雷达），$0\leqslant\theta\leqslant90°$；对于靠近的目标，$90°\leqslant\theta\leqslant180°$。

10.8 单脉冲雷达

单脉冲雷达（monopulse radar）把从单个脉冲的回波中提取的信息作为基础，在对目标进行方向跟踪时，其角度分辨率可以达到天线波束宽度的若干分之一。为了在上升和方位角两个方向上跟踪目标，单脉冲雷达采用抛物面碟形之类的天线，在其焦点处有四个分离的小馈源，如图10-18中的喇叭所示。单脉冲系统有两种类型：第一类称为**幅值比较单脉冲**（amplitude-comparison monopulse），因为其跟踪信息是

从四个喇叭接收到的回波的幅度中提取的；第二类则称为相位比较单脉冲（phase-comparison monopulse），因为其依赖于接收信号的相位而不是幅值。此处的分析限于幅值比较方案。

406

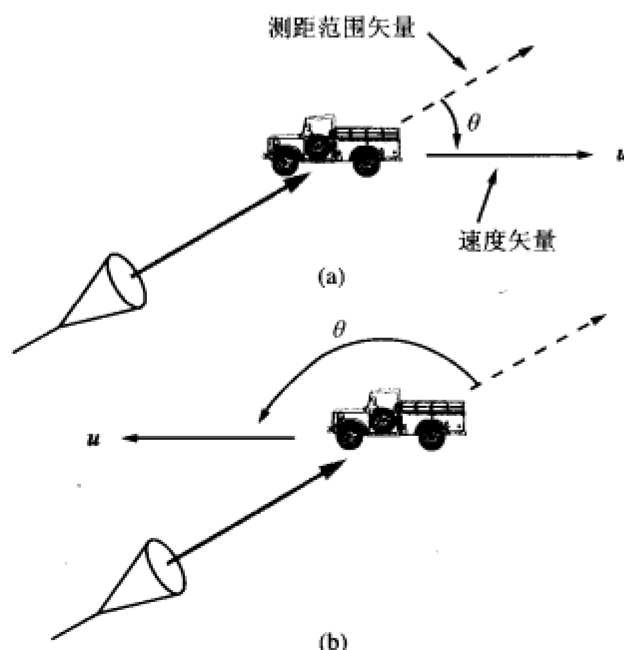


图 10-17 对于后退的目标（0≤θ≤90°），多普勒频移为负，参见图（a）；对于靠近的目标（90°≤θ≤180°），多普勒频移为正，参见图（b）

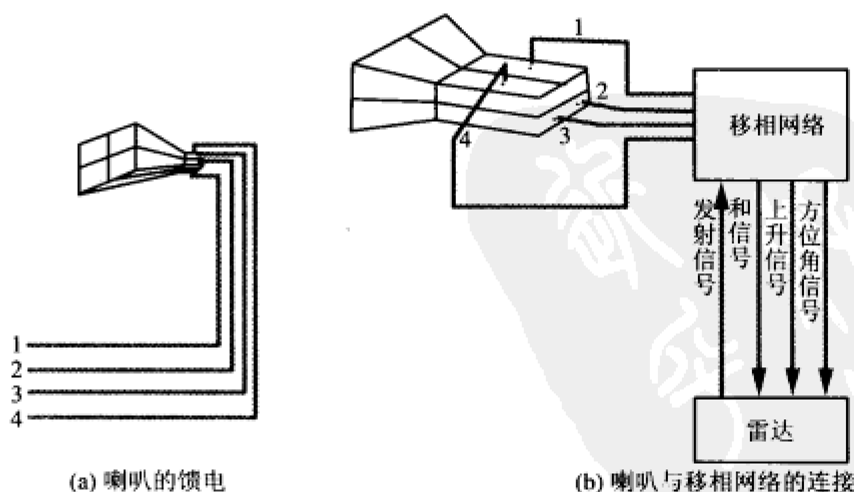


图 10-18 幅值比较单脉冲雷达的天线馈源配置

具体而言，每个喇叭都将产生自己的波束，四个波束所指的方向略有差别。图 10-19 显示了相邻两个喇叭的波束。幅值比较单脉冲方案的基本原理为，测量经由两个波束收到的回波信号的幅值，然后利用二者之差，将天线的瞄准线方向重指向目

标。利用计算机控制的移相器，图10-18所示的*移相网络*（phasing network）可以按不同的方式，对发射器传递给四单元喇叭阵的信号进行组合，或对四单元喇叭阵接收到的回波信号进行组合。在发送时，移相网络使四个馈端的馈电同相位，因而产生单个主波束，称作*和波束*（sum beam）。移相网络采用特殊的微波装置，无论在发射模式期间还是在接收模式期间，它们都可以提供所需要的功能。其等效功能可以用图10-20所示的流程图来描述。在接收期间，移相网络利用功率分配器、功率组合器，以及移相器，产生出三个不同的输出通道。其中一个为和通道，对应于四个喇叭的信号同相相加，其辐射波瓣图如图10-21a所示。第二个通道，称为*上升-差别通道*（elevation-difference channel），其获得方法为：先将右上角、左上角两个喇叭的输出相加（图10-20b），再将右下角、左下角两个喇叭的输出相加，然后将前者减后者即得。减法过程的实现方法为，先在第二个求和的路径中加入一个180°的移相器，然后再与第一个和相加。上升-差别通道的波束波瓣图如图10-21b所示。第三个通道是*幅角-差别通道*（azimuth-difference channel），尽管在图10-20中没有画出这个通道，但其实现过程却是类似的，它产生的波束对应于右边两个喇叭输出之和与左边两个喇叭输出之和的差别。如果被观测目标位于两个上升波束的中点，则两个波束在接收器上产生的回波将具有相同的强度，因此上升-差别通道的输出为零。如果不是零的话，则上升-差别通道的幅值将正比于目标偏离瞄准线方向的角度，其正负符号表明偏离的方向。在实用中，差别通道的输出被乘以和通道的输出，以增大差别信号的强度，并为提取角度误差的符号提供一个相位参考值。这个乘积称为*角误差信号*（angle error signal），在图10-21c中显示为角误差的函数。误差信号激活一个伺服控制系统，重定位天线的方向。在方位角方向上，利用幅角-差别通道与和通道的乘积，采取类似上面的步骤，从而可以使单脉冲雷达在两个方向上提供自动跟踪。至于到目标的距离，则可以通过测量双程的信号延迟来获得。

407

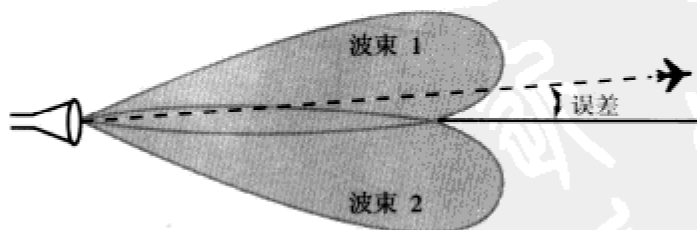


图10-19 单脉冲雷达利用两个重叠波束进行目标探测

复习题

Q10.5 PRF同非模糊测距范围的关系如何？

Q10.6 解释假报警概率及探测概率是如何同接收器的噪声电平相联系的。

Q10.7 在图10-17所示的几何结构中，多普勒频移在什么情况下达到最大？

408

Q10.8 单脉冲雷达的原理是什么？

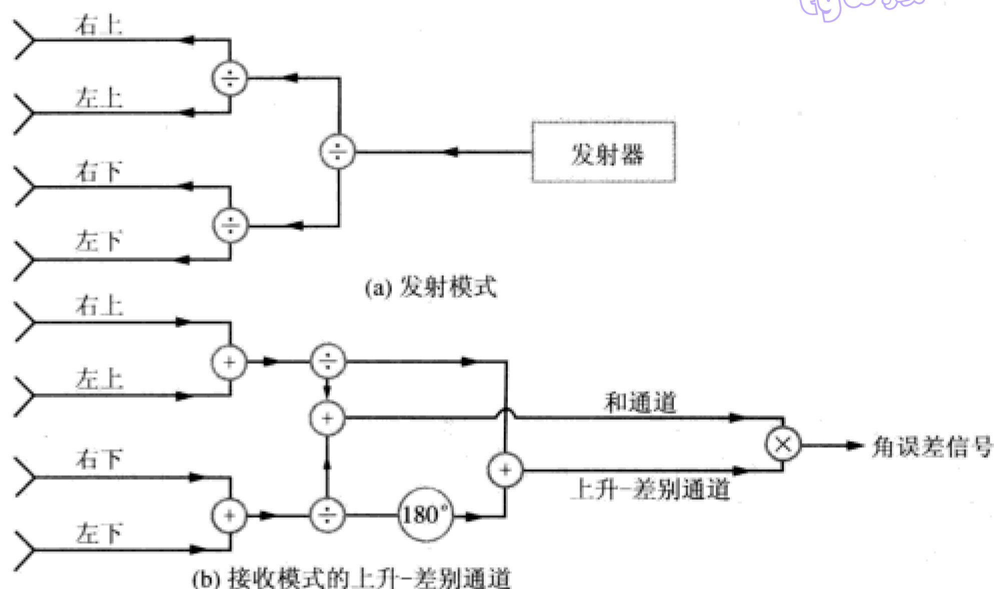


图 10-20　移相网络的功能流程图

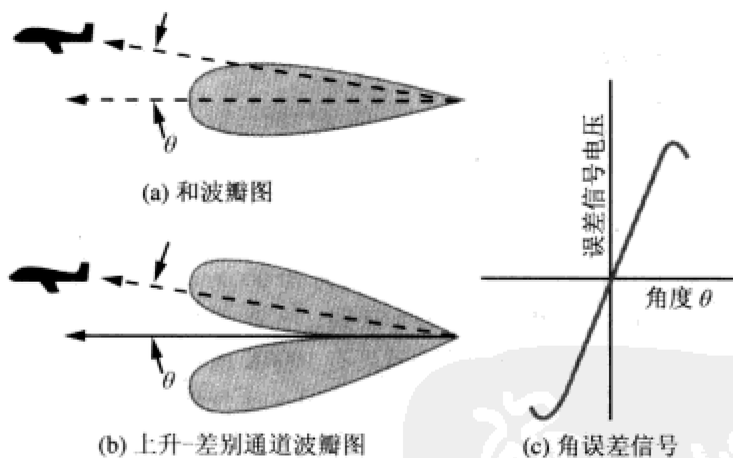


图 10-21　单脉冲天线的和波瓣图（图 a）、上升－差别通道波瓣图（图 b）、及角误差信号（图 c）

本章要点

- 在对地静止轨道上等间隔的三颗卫星，可以现实地球表面的大部分覆盖。
- 利用极化分集技术，可以使卫星中继器每单位波段承载的通道数目加倍。
- 卫星天线系统设计成波束定制的形式，以匹配卫星服务的区域。天线阵特别适合这种目的。
- 雷达是一个电磁传感器，它照射一个空间区域，然后测量反射物体的回波。从回波中可以提取到的信息包括目标的距离、径向速度、运动方向，以及其他特征。
- 由于接收器噪声的随机性，目标探测是一个统计过程，具有假报警概率和探

测概率。

- 移动物体产生的多普勒频移，正比于物体相对雷达的径向速度，反比于 λ。
- 单脉冲雷达使用多波束实现目标方向的跟踪，其角分辨率等于其天线波束宽度的若干分之一。

重要术语汇总

请说明下列术语的意义或给出定义

对地静止轨道	上行链路、下行链路	转发器	双工器
环行器	多路复用器	极化分集	大气层透射率 Y
径向速度 u_r	多普勒频移 f_d	脉冲长度 τ	脉冲重复频率(PRF) f_p
脉冲间周期 T_p	非模糊测距范围 R_u	测距范围分辨率	方位分辨率
假报警概率	探测概率	匹配滤波器	双站雷达
单站雷达	雷达截面 σ_t	探测阈值	最大可探测范围 R_{max}
单脉冲雷达	和通道、差别通道		

409

习题

10.1～10.4 卫星通信系统

10.1* 遥感卫星位于地球表面上方1000km的绕地圆形轨道上。其轨道周期是多少?

10.2 一个转发器的带宽为500MHz，使用极化分集技术。如果传输单路电话的通道需分配的波段宽度为4kHz，问该转发器可以承载多少路电话?

10.3* 针对TV通道，重做习题10.2，设每个TV通道要求的带宽为6MHz。

10.4 一个对地静止卫星离地面接收站的距离为40 000km。卫星发射天线为圆形孔径，直径为1m，地面站则使用抛物面碟形天线，有效直径为30cm。如果卫星以12GHz的频率发射1kW的功率，地面接收器具有1000K的系统噪声温度，问接收到的带宽为6MHz的TV信号的信噪比是多少?天线和大气层可以看成无损的。

10.5～10.8 雷达传感器

10.5* 某汽车防撞雷达，用于探测在1km范围内是否有汽车存在。问其最大可用的PRF是多少?

10.6 一个10GHz的气象雷达，使用30cm直径的无损天线。如果使用的脉冲长度为1μs，问在距离为1km远的地方，雷达的体积分辨率（各维的分辨率）是多少?

10.7* 一个雷达系统的参数为：$P_t=1\text{kW},\tau=0.1\mu\text{s},G=30\text{dB},\lambda=3\text{cm},T_{sys}=1500\text{K}$。小汽车的雷达截面典型值为$10\text{m}^2$。对于一个最小信噪比等于13dB的雷达，问小汽车可以被探测到的最远距离是多少?

10.8 一个3cm波长的雷达，位于xy坐标系的原点。一辆小汽车位于$x=100\text{m},y=200\text{m}$处，正往东（$x$方向）行进，速度为120km/hr。问雷达测得的多普勒频移是多少?

410

* 答案见附录D。

附录 A　符号、物理量及单位

符　号	物　理　量	国际标准单位	简　写
$\mathbf{A}$	磁位（矢量）	韦伯/米	Wb/m
B	电纳	西门子	S
$\mathbf{B}$	磁通密度	特斯拉，或韦伯/平方米	T，或 W/m^2
C	电容	法拉	F
D	（天线）方向性	（无量纲）	–
$\mathbf{E}$	电场强度	伏特/米	V/m
$\mathbf{D}$	电通密度	库仑/平方米	C/m^2
F	（归一化）辐射强度	（无量纲）	–
$\mathbf{F}$	力	牛顿	N
f	焦距	米	m
f	频率	赫兹	Hz
G	电导	西门子	S
G	（功率）增益	（无量纲）	–
$\mathbf{H}$	磁场强度	安培/米	A/m
I	电流	安培	A
$\mathbf{J}$	体电流密度	安培/平方米	A/m^2
$\mathbf{J}_s$	面电流密度	安培/米	A/m
k	波数	弧度/米	rad/m
L	电感	亨利	H
l	长度	米	m
M，m	质量	千克	kg
$\mathbf{M}$	磁化矢量	安培/米	A/m
$\mathbf{m}$	磁偶极矩	安培·平方米	$A \cdot m^2$
n	折射率	（无量纲）	–
P	功	瓦特	W
$\mathbf{P}$	电极化矢量	库仑/平方米	C/m^2
p	压力	牛顿/平方米	N/m^2
$\mathbf{p}$	电偶极矩	库仑·米	$C \cdot m$
Q，q	电荷	库仑	C
R	反射率（反射比）	（无量纲）	–
R	电阻	欧姆	Ω
S	驻波比	（无量纲）	–
$\mathbf{S}$	坡印亭矢量	瓦特/平方米	W/m^2
S_{av}	功率密度	瓦特/平方米	W/m^2
T	温度	开尔文	K
T	转矩	牛顿·米	$N \cdot m$
T	透射率（透射比）	（无量纲）	–
t	时间	秒	s

（续）

符号	物理量	国际标准单位	简写
u	速度	米/秒	m/s
V	电位	伏特	V
V	电压	伏特	V
V_{emf}	电动势（emf）	伏特	V
W	能量（功）	焦耳	J
w	能量密度	焦耳/立方米	J/m^3
X	电抗	欧姆	Ω
Y	导纳	西门子	S
Z	阻抗	欧姆	Ω
α	衰减常数	奈培/米	Np/m
β	相位常数	弧度/米	rad/m
Γ	反射系数	（无量纲）	–
γ	传播常数	每米	m^{-1}
δ_s	趋肤深度	米	m
ε，ε_0	介电常数，电容率	法拉/米	F/m
ε_r	相对介电常数	（无量纲）	–
η	阻抗	欧姆	Ω
λ	波长	米	m
μ，μ_0	磁导率	亨利/米	H/m
μ_r	相对磁导率	（无量纲）	–
μ_e，μ_h	（电子、空穴）迁移率	平方米/伏特·秒	$m^2/V\cdot s$
ρ_l	线电荷密度	库仑/米	C/m
ρ_s	面电荷密度	库仑/平方米	C/m^2
ρ_v	体电荷密度	库仑/立方米	C/m^3
σ	电导率	西门子/米	S/m
σ_t	雷达截面	平方米	m^2
τ	透射系数	（无量纲）	–
τ	脉冲长度	秒	s
Φ	磁通	韦伯	Wb
ψ	引力场	牛顿/千克	N/kg
χ_e	电极化率	（无量纲）	–
χ_m	磁化率	（无量纲）	–
Ω	立体角	立体弧度	sr
ω	角频率	弧度/秒	rad/s

附录 B　部分常用材料的材料常数

表 B-1　常用材料的相对介电常数 ε_r（低频、室温 20℃下）

$\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$，$\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}$ F/m

材　料	相对介电常数，ε_r	材　料	相对介电常数，ε_r
真空	1	干燥土壤	2.5～3.5
空气（海平面处）	1.0006	有机玻璃	3.4
泡沫聚苯乙烯	1.03	玻璃	4.5～10
特氟隆（聚四氟乙烯）	2.1	石英	3.8～5
石油	2.1	电木（酚醛塑料）	5
木材（干）	1.5～4	瓷器	5.7
石蜡	2.2	丽光板（胶木）	6
聚乙烯	2.25	云母	5.4～6
聚苯乙烯	2.6	氨水	22
纸	2～4	海水	72～80
橡胶	2.2～4.1	蒸馏水	81

注：对于绝大部分金属，$\varepsilon_r\approx1$。

表 B-2　常用材料的电导率 σ（低频、室温 20℃下）

材　料	电导率，σ(S/m)	材　料	电导率，σ(S/m)
导体		半导体	
银	6.2×10^7	纯锗	2.2
铜	5.8×10^7	纯硅	4.4×10^{-4}
金	4.1×10^7	绝缘体	
铝	3.5×10^7	湿土壤	$\sim10^{-2}$
钨	1.8×10^7	生水	$\sim10^{-3}$
锌	1.7×10^7	蒸馏水	$\sim10^{-4}$
黄铜	1.5×10^7	干燥土壤	$\sim10^{-4}$
生铁	10^7	玻璃	10^{-12}
青铜	10^7	硬橡胶	10^{-15}
锡	9×10^6	石蜡	10^{-15}
铅	5×10^6	云母	10^{-15}
水银	10^6	熔凝石英	10^{-17}
碳	3×10^4	蜡	10^{-17}
海水	4		
动物身体（平均）	0.3（不良导体）		

表 B-3 常用材料的相对磁导率 μ_r 的典型值（实际值取决于具体材料的品质）

$\mu = \mu_r \mu_0$，$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m

材料	相对磁导率，μ_r	材料	相对磁导率，μ_r	材料	相对磁导率，μ_r
抗磁性		铝	1.00002≈1	硅钢	7000
铋	0.99983≈1	钨	1.00008≈1	镍铁高导磁合金	~100 000
金	0.99996≈1	钛	1.0002≈1	精制纯铁	~200 000
水银	0.99997≈1	铂	1.0003≈1		
银	0.99998≈1	铁磁性（非线性）			
铜	0.99999≈1	钴	250		
水	0.99999≈1	镍	600		
顺磁性		低碳钢	2000		
空气	1.000004≈1	纯铁	4000~5000		

注：除铁磁性材料外，所有电介质、导体的 $\mu_r \approx 1$。



附录 C　数学公式

三角关系

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$$

$$2 \sin x \cos y = \sin(x + y) + \sin(x - y)$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x + y) + \cos(x - y)$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x \pm 90°) = \mp \sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(x \pm 90°) = \pm \cos x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$ （欧拉恒等式）

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

小数值近似

当$|x| \ll 1$时，有

$$(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx$$

$$(1 \pm x)^2 \approx 1 \pm 2x$$

$$\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{x}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} \approx 1 \mp \frac{x}{2}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \approx 1 + x$$

$$\ln(1 + x) \approx x$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \approx x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

附录 D　奇数号习题的答案

第 1 章

1.1　$p(x,t)=24\cos(8\pi\times10^3t-24.24\pi x+42°)$ $(\mathrm{N/m^2})$

1.3　$\lambda=12.5\mathrm{cm}$

1.5　$u_p=0.83(\mathrm{m/s})$；$\lambda=10.47\mathrm{m}$

1.7　(a) $y_1(x,t)$ 沿 x 方向行进，而 $y_2(x,t)$ 则沿负 x 方向行进。

(b) $x=(\pi/60+2n\pi/30)\mathrm{cm}$；$|y_s|_{max}=1.9$

(c) $x=n\pi/30$；$|y_s|_{min}=0$

1.9　$T=1.5\mathrm{s}$；$u_p=0.56\mathrm{m/s}$；$\lambda=0.84\mathrm{m}$

1.11　$y_2(t)$ 滞后 $y_1(t)$ 60°。

1.13　$\alpha=5\times10^{-3}$ $(\mathrm{Np/m})$

1.15　(a) $z_1=3.6e^{-j33.7°}$；$z_2=4.5e^{j153.4°}$

(b) $|z_1|=3.60$

(c) $z_1z_2=16.2e^{j119.7°}$

(d) $z_1/z_2=0.80e^{-j187.1°}$

(e) $z_1^3=46.66e^{-j101.1°}$

1.17　(a) $t=3.16e^{j18.43°}$；$s=5.10e^{j78.69°}$

(b) $t=2.83e^{-j45°}$；$s=2.83e^{j45°}$

(c) $t=5.2$；$s=3e^{j90°}$

(d) $t=0$；$s=6e^{j30°}$

1.19　$\ln(z)=16.1-j0.93$

1.21　$v_c(t)=8.5\cos(2\pi\times10^3t-62.1°)\mathrm{V}$

1.23　(a) $v(t)=3\cos(\omega t-2\pi/3)\mathrm{V}$

(b) $v(t)=6\cos(\omega t+3\pi/4)\mathrm{V}$

(c) $i(t)=5\cos(\omega t+53.1°)\mathrm{A}$

(d) $i(t)=3.61\cos(\omega t+146.31°)\mathrm{A}$

(e) $i(t)=-\sin\omega t$ A

(f) $i(t)=2\cos(\omega t+3\pi/4)\mathrm{A}$

第 2 章

2.1　(a) $l/\lambda=6.67\times10^{-6}$；传输线可以忽略。

(b) $l/\lambda=0.01$；边界线。

(c) $l/\lambda=0.2$；必须包括传输线的影响。

(d) $l/\lambda=0.33$；必须包括传输线的影响。

2.3　$R'=1.0(\Omega/\mathrm{m})$；$L'=167(\mathrm{nH/m})$；$G'=0$；$C'=172(\mathrm{pF/m})$

2.5　$\alpha=0.14\mathrm{Np/m}$；$\beta=31.5\mathrm{rad/m}$；$Z_0=(27.7+j0.098)\Omega$；$u_p=2\times10^8\mathrm{m/s}$

2.7　$R'=2(\Omega/\mathrm{m})$；$L'=200(\mathrm{nH/m})$；$G'=800(\mu\mathrm{S/m})$；$C'=80(\mathrm{pF/m})$；$\lambda=1\mathrm{m}$

2.9 $R'=0.8\Omega/\text{m}$；$L'=38.2\text{nH/m}$；$G'=0.5\text{mS/m}$；$C'=23.9\text{pF/m}$

2.11 (a) $b=3.5\text{mm}$

(b) $u_p=1.98\times10^8\text{m/s}$

2.13 $Z_L=(90-\text{j}120)\Omega$

2.15 $Z_0=55.9\Omega$

2.17 $Z_{in}=(60+\text{j}20)\Omega$

2.21 (a) $\Gamma=0.62e^{-\text{j}29.7°}$

(b) $Z_{in}=(12.5-\text{j}12.7)\Omega$

(c) $\widetilde{V}_i=1.40e^{-\text{j}34.0°}$ (V)；$\widetilde{I}_i=78.4e^{-\text{j}11.5°}$ (mA)

2.23 (a) $Z_{in_1}=(35.20-\text{j}8.62)\Omega$

(b) $Z'_L=(17.6-\text{j}4.31)\Omega$

(c) $Z_{in}=(107.57-\text{j}56.7)\Omega$

2.25 $l=\lambda/4+n\lambda/2$

2.27 $Z_{in}=240\Omega$

2.29 $l=0.29\lambda$

2.31 (a) $Z_{in}=(41.25-\text{j}16.35)\Omega$

(b) $\widetilde{I}_i=1.08e^{\text{j}10.16°}$ A；$\widetilde{V}_i=47.86e^{-\text{j}11.46°}$ V

(c) $P_{in}=24\text{W}$

(d) $\widetilde{V}_L=60e^{-\text{j}54°}$ V；$\widetilde{I}_L=0.8e^{-\text{j}54°}$ A；

$P_L=P_{in}=24\text{W}$

(e) $P_{Z_g}=29.15\text{W}$；$P_g=53.15\text{W}$

2.33 $P^i_{av}=10.0\text{mW}$；$P^r_{av}=-1.1\text{mW}$；$P^t_{av}=8.9\text{mW}$

2.35 (a) $\Gamma=0.5$

(b) $\Gamma=0.62\angle{-29.7°}$

(c) $\Gamma=1.0\angle{-53.1°}$

(d) $\Gamma=1.0\angle{180°}$

2.37 $Z_{01}=40\Omega$；$Z_{02}=250\Omega$

2.39 (a) $Z_{in}=-\text{j}154\Omega$

(b) $0.074\lambda+(n\lambda/2)$，$n=0,1,2,\cdots$

2.41 (a) $Z_L+\text{j}95\Omega$

(b) $l=0.246\lambda$

2.43 $Z_L=(41-\text{j}19.5)\Omega$

2.45 $Z_{in}=(95-\text{j}70)\Omega$

2.47 第一个解：短分支离天线的距离 $d=0.199\lambda$，长度为 $l=0.125\lambda$。第二个解为：离天线距离为 $d=0.375\lambda$，短分支长度为 $l=0.375\lambda$。

2.49 $Z_{in}=100\Omega$

2.53 $V_g=19.2\text{V}$；$R_g=30\Omega$；$l=525\text{m}$

第3章

3.1 $\hat{a}=\hat{x}0.45+\hat{z}0.89$

3.3 面积 = 9

3.5 (a) $A=\sqrt{14}$; $\hat{\boldsymbol{a}}_A=(\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{y}}2-\hat{\boldsymbol{z}}3)/\sqrt{14}$

(b) $-12/5$

(c) $\theta_{AC}=15.8°$

(d) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}=\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{y}}4+\hat{\boldsymbol{z}}3$

(e) $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=13$

(f) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\hat{\boldsymbol{x}}54-\hat{\boldsymbol{y}}57-\hat{\boldsymbol{z}}20$

(g) $\hat{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{B}=-\hat{\boldsymbol{z}}4$

(h) $(\boldsymbol{A}\times\hat{\boldsymbol{y}})\cdot\hat{\boldsymbol{z}}=1$

3.7 $\dfrac{\boldsymbol{A}(1,-1,2)}{|\boldsymbol{A}(1,-1,2)|}=-\hat{\boldsymbol{x}}0.17-\hat{\boldsymbol{y}}0.70+\hat{\boldsymbol{z}}0.70$

3.9 $\hat{\boldsymbol{a}}=-(\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{y}}y+\hat{\boldsymbol{z}}2)/(5+y^2)^{1/2}$

3.11 $\hat{\boldsymbol{a}}=(\hat{\boldsymbol{x}}2+\hat{\boldsymbol{z}}4)/\sqrt{20}$

3.13 $\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{x}}0.8+\hat{\boldsymbol{y}}1.6$

3.15 $\hat{\boldsymbol{c}}=\hat{\boldsymbol{x}}0.37+\hat{\boldsymbol{y}}0.56+\hat{\boldsymbol{z}}0.74$

3.19 (a) 在柱坐标系中，$P_1=(2.24, 63.4°, 0)$；

在球坐标系中，$P_1=(2.24, 90°, 63.4°)$；

(b) 在柱坐标系中，$P_2=(0, 0°, 3)$；

在球坐标系中，$P_2=(3, 0°, 0°)$；

(c) 在柱坐标系中，$P_3=(1.41, 45°, 2)$；

在球坐标系中，$P_3=(2.45, 35.3°, 45°)$；

(d) 在柱坐标系中，$P_4=(4.24, 135°, -3)$；

在球坐标系中，$P_4=(5.2, 125.3°, 135°)$；

3.21 (a) $P_1(0, 0, 5)$

(b) $P_2(0, \pi, 5)$

(c) $P_3(3, \pi, 0)$

3.23 (a) $V=21\pi/2$

(b) $V=125\pi/3$

3.25 (a) $\boldsymbol{E}_n=-\hat{\boldsymbol{r}}4$

(b) $\boldsymbol{E}_t=\hat{\boldsymbol{z}}4$

3.27 (a) $\theta_{AB}=90°$

(b) $\pm(\hat{\boldsymbol{r}}0.487+\hat{\boldsymbol{\phi}}0.228+\hat{\boldsymbol{z}}0.843)$

3.29 (a) $d=\sqrt{2}$

(b) $d=2.67$

(c) $d=5$

3.31 (a) $\boldsymbol{A}(P_1)=\hat{\boldsymbol{R}}2.856-\hat{\boldsymbol{\theta}}2.888+\hat{\boldsymbol{\phi}}2.123$

(b) $\boldsymbol{B}(P_2)=-\hat{\boldsymbol{R}}0.896+\hat{\boldsymbol{\theta}}0.449-\hat{\boldsymbol{\phi}}5$

(c) $\boldsymbol{C}(P_3)=\hat{\boldsymbol{R}}0.854+\hat{\boldsymbol{\theta}}0.146-\hat{\boldsymbol{\phi}}0.707$

(d) $\boldsymbol{D}(P_4)=\hat{\boldsymbol{R}}3.67-\hat{\boldsymbol{\theta}}1.73-\hat{\boldsymbol{\phi}}0.707$

3.33 $T(z)=10+(1-e^{-2z})/2$

3.35 $dV/dl=-3/\sqrt{5}$

3.37 $dU/dl=-3.125\times10^{-2}$

3.39 (a) $\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}=-8/3$

(b) $\iiint \nabla\cdot\boldsymbol{E}dv=-8/3$

3.41 (a) $\oint \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{s}=150\pi$

(b) $\iiint \nabla\cdot\boldsymbol{D}dv=150\pi$

3.43 (a) $\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-1$

(b) $\iint \nabla\times\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}=-1$

3.45 (a) $\oint_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=8$

(b) $\int_S (\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{s}=8$

3.48 (a)**A** 是有旋场,但不是保守场。
(b)**B** 是保守场,但无旋。
(c)**C** 既非保守场,也非有旋场。
(d)**D** 是保守场,但无旋。
(e)**E** 是保守场,但无旋。
(f)**F** 既非保守场,也非有旋场。
(g)**G** 既非保守场,也非有旋场。
(h)**H** 是保守场,但无旋。

第4章

4.1 $Q=2.62\text{mC}$

4.3 $Q=0.173\text{C}$

4.5 (a)$Q=0$
(b)$Q=\pi a^2/\rho_{s0}/2$
(c)$Q=2\pi\rho_{s0}[1-e^{-a}(1+a)]$
(d)$Q=\pi\rho_{s0}[1-e^{-a}(1+a)]$

4.7 $I=1570.8\text{A}$

4.9 $\boldsymbol{E}=\hat{z}25.61\text{kV/m}$

4.11 $q_2=-63.13\mu\text{C}$

4.13 (a)$\boldsymbol{E}(0,0,0)=-\hat{x}1.6-\hat{y}0.66(\text{MV/m})$
(b)$\boldsymbol{E}(0,0,5\text{cm})=-\hat{x}81.4-\hat{y}33.7+\hat{z}226(\text{kV/m})$
(c)$\boldsymbol{E}(0,0,-5\text{cm})=-\hat{x}81.4-\hat{y}33.7-\hat{z}226(\text{kV/m})$

4.15 $\boldsymbol{E}=\hat{z}(\rho_{s0}h/2\varepsilon_0)[\sqrt{a^2+h^2}+h^2/\sqrt{a^2+h^2}-2h]$

4.17 $\boldsymbol{E}=0$

4.21 (a)$\rho_v=y^2z^3$

(b) $Q=64/3\text{C}$

(c) $Q=64/3\text{C}$

4.23 $Q=4\pi\rho_0 a^3\text{C}$

4.25 当 $1\leqslant r\leqslant 3\text{m}$ 时，$\boldsymbol{D}=\hat{\boldsymbol{r}}\rho_{s0}(r^2-1)/2r$；

当 $r\geqslant 3\text{m}$ 时，$\boldsymbol{D}=\hat{\boldsymbol{r}}4\rho_{s0}/r$。

4.29 (b) $\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{z}}(\rho_l a/2\varepsilon_0)[z/(a^2+z^2)^{3/2}]$(V/m)

4.31 $V(b)=(\rho_l/4\pi\varepsilon)\times\ln[(l+\sqrt{l^2+4b^2})/(-l+\sqrt{l^2+4b^2})]$(V)

4.35 $V_{AB}=-78.06\text{V}$

4.37 (a) $\sigma=4.32\times10^{-4}$(S/m)

(b) $I=542.9\text{nA}$

(c) $\boldsymbol{u}_e=-13\boldsymbol{E}/|\boldsymbol{E}|$(m/s)；$\boldsymbol{u}_h=5\boldsymbol{E}/|\boldsymbol{E}|$(m/s)

(d) $R=9.21\text{M}\Omega$

(e) $P=2.7\mu\text{W}$

4.41 $R=2.1\text{m}\Omega$

4.43 $\theta=42°$

4.45 $\boldsymbol{E}_1=\hat{\boldsymbol{R}}9\cos\theta-\hat{\boldsymbol{\theta}}3\sin\theta$(V/m)；

$\boldsymbol{D}_1=\varepsilon_0(\hat{\boldsymbol{R}}27\cos\theta-\hat{\boldsymbol{\theta}}9\sin\theta)$(C/m²)

4.47 $\theta_1=71.6°$；$\theta_2=78.7°$；$\theta_3=81.9°$；$\theta_4=45°$

4.49 (a) $|\boldsymbol{E}|$在 $r=a$ 处为最大值。

(b) 电容器的击穿电压为 $V=1.39\text{MV}$。

4.51 $W_e=4.62\times10^{-9}\text{J}$

4.53 (a) $C=3.1\text{pF}$

(b) $C=0.5\text{pF}$

(c) $C=0.31\text{pF}$

第5章

5.1 $\boldsymbol{a}=-\hat{\boldsymbol{y}}2.1\times10^{18}\text{m/s}^2$

5.3 $|\boldsymbol{B}|=410\text{mT}$

5.5 (a) $\boldsymbol{F}=0$

(b) $W=0$

(c) $\phi=0$

5.7 $\boldsymbol{B}=-\hat{\boldsymbol{z}}0.3\text{mT}$

5.9 $\boldsymbol{H}=\hat{\boldsymbol{z}}\dfrac{I\theta(b-a)}{4\pi ab}$，其中$\hat{\boldsymbol{z}}$的方向为由纸面向外。

5.11 $I_2=0.8\text{A}$，从上往下看时，方向为顺时针。

5.13 $I=320\text{A}$

5.15 $\boldsymbol{F}=-\hat{\boldsymbol{x}}0.1$(mN)，其中$\hat{\boldsymbol{x}}$在回路平面中，沿着离开导线的方向。因此，该力将回路拉向导线的方向。

5.17 (a) $\boldsymbol{H}(0,0,h)=-\hat{\boldsymbol{x}}\dfrac{I}{\pi w}\tan^{-1}\left(\dfrac{w}{2h}\right)$(A/m)

(b) $\boldsymbol{F}'_m=\hat{z}\frac{I^2\mu_0}{\pi w}\tan^{-1}\left(\frac{w}{2h}\right)$(N) 为互相排斥的力。

5.19　$\boldsymbol{F}=\hat{y}4\times10^{-5}$(N)

5.21　(a) $\boldsymbol{H}_1=\hat{\boldsymbol{\phi}}J_0$，当 $0\leqslant r\leqslant a$ 时。

(b) $\boldsymbol{H}_2=\hat{\boldsymbol{\phi}}J_0(a/r)$，当 $r\geqslant a$ 时。

5.23　$\boldsymbol{J}=\hat{z}16e^{-2r}$(A/m²)

5.25　(a) $\boldsymbol{B}=\hat{z}5\pi\sin\pi y-\hat{y}\pi\cos\pi x$(T)

(b) $\Phi=0$

(c) $\Phi=0$

5.27　(a) $\boldsymbol{A}=\hat{z}\mu_0 IL/(4\pi R)$

(b) $\boldsymbol{H}=(IL/4\pi)[(-\hat{x}y+\hat{y}x)/(x^2+y^2+z^2)^{3/2}]$

5.29　$n_e=1.5$(电子/原子)

5.31　$\boldsymbol{H}_2=\hat{z}4$

5.35　$L=(\mu l/\pi)\ln[(d-a)/a]$(H)

5.37　$W_m=139I^2$(nJ)

第 6 章

6.1　在 $t=0$ 时刻，上方回路电流的瞬时值是顺时针的；
在 $t=t_1$ 时刻，上方回路电流的瞬时值是逆时针的。

6.3　(a) $V_{emf}=125e^{-2t}$(V)

(b) $V_{emf}=62.3\sin10^3t$(kV)

(c) $V_{emf}=0$

6.5　$B_0=1.06$(nT)

6.7　$I_{ind}=37.7\sin(200\pi t)$(mA)

6.9　$V_{12}=-707$(μV)

6.11　$V_{12}=-3.77$V

6.13　$V=\omega B_0a^2/2$

6.15　$I=1.63\cos(120\pi t)$(μA)

6.19　$\rho_v=(6y/\omega)\sin\omega t+C_0$，这里 C_0 是积分常数。

6.23　$k=(4\pi/30)$rad/m；$\widetilde{\boldsymbol{E}}=-\hat{z}941e^{j4\pi y/30}$(V/m)

6.25　$\boldsymbol{H}=\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{53}{R}\sin\theta\cos(6\pi\times10^8t-2\pi R)$(μA/m)

第 7 章

7.1　(a) 正 y 轴方向

(b) $u_p=2\times10^8$m/s

(c) $\lambda=1.26$m

(d) $\varepsilon_r=2.25$

(e) $\widetilde{\boldsymbol{E}}=-\hat{x}12.57e^{-j5y}$(V/m)

7.3　(a) $\lambda=31.42$m

(b) $f=4.77$MHz

(c) $\varepsilon_r = 1.67$

(d) $\boldsymbol{H}(z,t) = \hat{\boldsymbol{x}}22.13\cos(9.54\pi\times10^6 t + 0.2z)$ (mA/m)

7.5 $\varepsilon_r = 4$

7.7 $\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{x}}\sqrt{2}\cos(\pi\times10^{10}t + 104.72z) - \hat{\boldsymbol{y}}\sqrt{2}\sin(\pi\times10^{10}t + 104.72z)$ (V/m)

7.9 $|\boldsymbol{E}| = 20$；$\psi(t=0) = 0$；$\psi(t=5\text{ns}) = -45°$；$\psi(t=10\text{ns}) = -90°$

7.11 (a) $\gamma = 65.5°$和$\chi = -11.79°$

(b) 右旋椭圆极化

7.19 $u_p = 6.28\times10^4$ (m/s)

7.21 $\boldsymbol{H} = -\hat{\boldsymbol{y}}0.16e^{-30x}\cos(2\pi\times10^9 t - 40x - 36.85°)$ (A/m)

7.23 $(R_{ac}/R_{dc}) = 143.55$

7.25 $\boldsymbol{S}_{av} = \hat{\boldsymbol{y}}0.12$ (W/m²)

7.27 (a) $\boldsymbol{S}_{av} = \hat{\boldsymbol{z}}500e^{-0.4z}$ (W/m²)

(b) $A = -1.74z$ (dB)

(c) $z = 23.03$m

7.29 $u_p = 6\times10^7$ (m/s)

第8章

8.1 (a) $\Gamma = -0.67$；$\tau = 0.33$

(b) $S = 5$

(c) $S_{av}^{i} = 0.13$ (W/m²)；$S_{av}^{r} = 0.06$ (W/m²)；$S_{av}^{t} = 0.07$ (W/m²)

8.5 (a) $\widetilde{\boldsymbol{E}}^{i} = 10(\hat{\boldsymbol{x}} + j\hat{\boldsymbol{y}})e^{-j4\pi z/3}$ (V/m)

(b) $\Gamma = -0.2$；$\tau = 0.8$

(c) $\widetilde{\boldsymbol{E}}^{r} = -2(\hat{\boldsymbol{x}} + j\hat{\boldsymbol{y}})e^{j4\pi z/3}$ (V/m)；

$\widetilde{\boldsymbol{E}}^{t} = 8(\hat{\boldsymbol{x}} + j\hat{\boldsymbol{y}})e^{-1.26\times10^{-2}z}e^{-j2\pi z}$ (V/m)；

$\widetilde{\boldsymbol{E}}_1 = 10(\hat{\boldsymbol{x}} + j\hat{\boldsymbol{y}})[e^{-j4\pi z/3} - 0.2e^{j4\pi z/3}]$ (V/m)

(d) 反射功率的百分比 = 4%；

透射功率的百分比 = 96%。

8.7 $|\widetilde{\boldsymbol{E}}_1|_{max} = 51.3$ (V/m)；$l_{max} = 1.5$m

8.9 $\varepsilon_{r_2} = \sqrt{\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_3}}$；$d = c/[4f(\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_3})^{1/4}]$

8.11 $Z_{in} \approx (100 - j127)\,\Omega$；入射功率中的反射部分 = 0.24

8.13 $f = 60$MHz

8.15 $P' = 4.04\times10^{-4}$ W/m²

8.17 $\theta_{min} = 27.92°$

8.19 $\dfrac{S^t}{S^i} = 0.835$

8.21 $d = 15$cm

8.23 $d = 68.42$cm

8.25 $f_p = 166.33$Mbit/s

8.29 $\theta_t = 18.44°$

8.33　(a) $R = 6.4\times10^{-3}$；$T = 0.9936$

(b) $P^i = 0.34\text{W}$；$P^r = 2.2\times10^{-3}\text{W}$；$P^t = 0.338\text{W}$

8.35　$s = 0.67\text{m}$；$f = 0.53\text{m}$

8.37　(a) $R = 32\text{cm}$

(b) $M = -4$

8.39　$s' = -25\text{cm}$；$M = 1.25$；成像为虚像、直立。

8.43　(a) $\frac{1}{f} = \left(\frac{n_l - n_m}{n_m}\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$

(b) $f = -60\text{cm}$ 空气中；$f = -235\text{cm}$ 水中

8.45　$s'_2 = 8.34\text{cm}$

8.47　$s'_2 = \infty$

第 9 章

9.1　$S_{max} = 1.9(\mu\text{W/m}^2)$

9.3　(a) 在最大辐射的方向上，为一个 120°的圆锥，其中心轴为正 z 轴。

(b) $D = 4 = 6\text{dB}$

(c) $\Omega_p = \pi(\text{sr}) = 3.14\text{sr}$

(d) $\beta = 120°$

9.5　(a) $\xi = 29.7\%$

(b) $G = 0.44 = -3.5\text{dB}$

(c) $I_0 = 33.8\text{A}$；$P_t = 67.3\text{W}$

9.7　$S_{max} = 2\times10^{-5}\text{W/m}^2$

9.9　$D = 40.13\text{dB}$

9.11　(a) $\xi = 99.3\%$

(b) $G = 1.63 = 2.1\text{dB}$

(c) $I_0 = 0.74\text{A}$；$P_t = 20.1\text{W}$

9.13　(a) $\tilde{\mathbf{E}}(R,\theta,\phi) = \hat{\boldsymbol{\theta}}\tilde{E}_\theta = \hat{\boldsymbol{\theta}} j\frac{I_0 lk\eta_0}{8\pi}\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right)\sin\theta(\text{V/m})$

(b) $S(R,\theta) = \left(\frac{\eta_0 k^2 I_0^2 l^2}{128\pi^2 R^2}\right)\sin^2\theta(\text{W/m}^2)$

(c) $D = 1.5$

(d) $R_{rad} = 20\pi^2(l/\lambda)^2(\Omega)$

9.17　(a) $\xi = 62\%$

(b) $G = 0.93 = -0.3\text{dB}$

(c) $I_0 = 47.5\text{A}$；$P_t = 32.3\text{W}$

9.19　$P_t = 25.9\text{mW}$

9.21　$P_t = 0.15\text{mW}$

9.23　$\beta_{null} = 5.73°$

9.25　(a) $\beta_{xz} = 0.5°$；$\beta_{yz} = 1.5°$

(b) $D = 5.41\times10^4 = 47.3\text{dB}$



9.27 (a) $\beta_c = 1.8°$; $\beta_a = 0.18°$

(b) $\Delta y = \beta_a R = 0.96\text{m}$

9.29 (a) $F_a(\theta) = 4\cos^2\left[\frac{\pi}{8}(4\cos\theta + 1)\right]$

(b) $F_a(\theta) = 5 + 4\cos(2\pi\cos\theta)$

(c) $F_a(\theta) = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

(d) $F_a(\theta) = 5 + 4\cos\left(\pi\cos\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

(e) $F_a(\theta) = 5 - 4\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)$

9.31 $d/\lambda = 1.414$

9.33 $F_{an}(\theta) = \dfrac{\sin^2[(15\pi/4)\cos\theta]}{25\sin^2[(3\pi/4)\cos\theta]}$; $\beta = 13.5°$

9.35 $\delta = -2.72(\text{rad}) = -155.9°$

第10章

10.1 $T = 105.08\text{min}$

10.3 166 通道

10.5 $(f_p)_{max} = 150\text{kHz}$

10.7 $R_{max} = 5.75\text{km}$

参 考 文 献

以下书籍按照主题分类排列，便于读者进一步阅读。

电磁学

Balanis, C. A., *Advanced Engineering Electromagnetics*, John Wiley & Sons, New York, 1989.

Cheng, D. K., *Fundamentals of Engineering Electromagnetics*, Addison Wesley, Reading, Reading, MA, 1993.

Crowley, J. M., *Fundamentals of Applied Electrostatics*, John Wiley & Sons, New York, 1986.

DuBroff, R. E., S. V. Marshall, and G. G. Skitek, *Electromagnetic Concepts and Applications*, 4th ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.

Hayt, W. H., Jr., *Engineering Electromagnetics*, 5th ed., McGraw-Hill, New York, 1989.

Iskander, M. F. *Electromagnetic Fields & Waves*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1992.

Johnk, C. T. A., *Engineering Electromagnetic Fields and Waves*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, 1988.

King, R. W. P. and S. Prasad, *Fundamental Electromagnetic Theory and Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1986.

Kong, J. A., *Electromagnetic Wave Theory*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, 1990.

Kraus, J. D., *Electromagnetics*, 4th ed., McGraw-Hill, New York, 1992.

Neff, H. P., Jr., *Introductory Electromagnetics*, JohnWiley & Sons, New York, 1991.

Parton, J. E, S. J. T. Owens, and M. S. Raven, *Applied Electromagnetics*, 2nd ed., Macmillan, London, 1986.

Paul, C. R. and S. A. Nasar, *Introduction to Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, New York, 1987.

Ramo, S., J. R. Whinnery, and T. Van Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, 1994.

Rao, N. N., *Elements of Engineering Electromagnetics*, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1987.

Shen, L. C. and J. A. Kong, *Applied Electromagnetism*. 2nd ed., PWS Engineering, Boston, Mass., 1987.

Taylor, D. M. and P. E. Secker, *Industrial Electrostatics: Fundamentals and Measurements*, John Wiley & Sons, New York, 1994.

Wait, J. R., *Electromagnetic Theory*, Harper & Row, New York, 1985.

天线和无线电波传播

Balanis, C. A., *Antenna Theory: Analysis and Design*, Harper & Row, New York, 1982.

Collin, R. E., *Antennas and Radiowave Propagation*, McGraw-Hill, New York, 1985.

Ishimaru, A., *Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1991.

Kraus, J. D., *Antennas*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1988.

Sander, K. F. and G. A. L. Reed, *Transmission and Propagation of Electromagnetic Waves*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, England, 1986.

Stutzman, W. L. and G. A. Thiele, *Antenna Theory and Design*, John Wiley & Sons, New York, 1981.

光学工程

Bohren, C. F. and D. R. Huffman, *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*, John Wiley & Sons, New York, 1983.

Born, M. and E. Wolf, *Principles of Optics*, 6th ed., Pergamon Press, New York, 1980.

Cho, Z. H., J. P. Jones, and M. Singh, *Foundations of Medical Imaging*, John Wiley & Sons, New York, 1993.

Hecht, E. *Optics*, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1990.

Keiser, G., *Optical Fiber Communications*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1991.

Lee, D, L., *Electromagnetic Principles of Integrated Optics*, John Wiley & Sons, New York, 1986.

Smith, W. J., *Modern Optical Engineering: The Design of Optical Systems*, McGaw-Hill, New York, 1991.

Walker, B. H., *Optical Engineering Fundamentals*, McGraw-Hill, New York, 1994.

微波工程

Freeman, J. C., *Fundamentals of Microwave Transmission Lines*, John Wiley & Sons, New York, 1996.

Pozar, D. M., *Microwave Engineering*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1990.

Richharia, M., *Satellite Communication Systems Design Principles*, McGraw-Hill, New York, 1995.

Scott, A. W., *Understanding Microwaves*, John Wiley & Sons, New York, 1993.

Sinnema, W., *Electronic Transmission Technology*, 2nd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.

Skolnik, M. I., *Introduction to Radar Systems*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1980.

Stimson, G. W., *Introduction to Airborne Radar*, Hughes Aircraft Company, El Segundo, California, 1983.



索　　引

索引中的页码为英文原书页码，与本书中页边标注的页码一致。

A

B

D

E

F

M

Q

R

S

W

Z



Fundamentals of Applied Electromagnetics
Fourth Edition

应用电磁学基础（第4版）

本书是作者多年教学成果的结晶，已经多次改版修订，以深入浅出、实践性强而闻名于世。本书新版反映了电气工程教学改革的成果，已被加州大学伯克利分校和洛杉矶分校、华盛顿大学、普度大学、杜克大学等世界众多高校用作教材。

本版的主要特色：

- 改革内容编排顺序，先讲授传输线，学生更易接受。
- 大幅变革教学重点，较多介绍动态场及其应用，既符合动态场的重要地位，又利于培养学生兴趣，也利于教师在课时受限的情况下完整传授电磁学内容。
- 提供交互式教学光盘，通过动画演示抽象的电磁现象，内容丰富、方便自学。
- 中文版对专业术语首次出现采用中英文对照索引，利于双语教学及国际交流。
- 除不含波导和谐振腔内容外，本书涵盖了传统电磁场与电磁波教材的全部内容，并基于培养兴趣考虑，介绍了物理光学、光纤等内容及卫星通信、雷达等实例。



Fawwaz T. Ulaby 是世界知名的电磁学家，美国工程院院士，IEEE会士。他拥有得克萨斯大学电气工程博士学位，目前是密歇根大学教授，曾任该校负责科研的副校长。除了本书外，他还在微波传感技术、成像雷达等方面出版了多部专著。他曾获得IEEE爱迪生奖、IEEE电磁奖以及科威特应用科学奖。



尹华杰 华中理工大学电气工程系博士（1994年），美国伊利诺伊大学（UIUC）电磁计算中心（CCEM）访问学者（1999~2000年），华南理工大学电气工程系副教授。主要从事工程电磁场数值计算、电气传动控制及电力电子等方向的研究与教学工作。曾主持国家自然科学基金项目“电磁场数值计算中的无网格方法研究”，现为国家自然科学基金的电磁场计算、电机与电器等领域的评审专家。



附赠教学光盘

PEARSON Prentice Hall

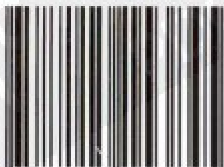
www.PearsonEd.com

本书相关信息请访问：图灵网站 http://www.turingbook.com
读者/作者热线：(010) 88593802
反馈/投稿/推荐信箱：contact@turingbook.com

分类建议 电子电气/电磁场

人民邮电出版社网址 www.ptpress.com.cn

ISBN 978-7-115-15384-5



9 787115 153845 >
定价：59.00 元
（附光盘）